

AHPを用いた最適ポートフォリオモデル

枇々木 規雄, 高山 俊則

Technical Report No.97003

1, V, 1997

枇々木 規雄

〒223 横浜市港北区日吉3-14-1

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

TEL 045-563-1141 ext.3628, FAX 045-563-5979

E-mail hibiki@ae.keio.ac.jp

高山 俊則

〒105 港区芝2-5-6 芝菱信ビル6階

MTB インベストメントテクノロジー研究所

TEL 03-3457-1977, FAX 03-3457-0910

E-mail takayama@mx.meshnet.or.jp

1 はじめに

投資意思決定問題における最も基本的かつ重要な資産配分問題に対するアプローチとして、平均・分散モデルや下方リスクモデルなどがある。しかし、これらのアプローチの問題点として、以下のようなことが挙げられる。

1. 投資家のリスク回避度(トレランス)の計測が困難である。
2. 投資意思決定に参加する個人の意思を適切に尊重することが難しい。
3. 質的情報を反映することができない。

これらの問題点に対して、Saaty et al. [5], Khaksari et al. [3], 吉井 [7], 開澤ら [2] は、AHP (Analytical Hierarchy Process : 階層化意思決定法) ¹ を用いたポートフォリオ構築法を提案している。Saaty et al. [5] は株式の順序付けをするため、Khaksari et al. [3] は架空の年金資金の資産運用をするため、吉井 [7] は株式分析をするため、開澤ら [2] グローバル・アセット・アロケーション (GAA) をするために AHP を用いている。これらは、AHP によって得られる代替案(投資対象)のウェイトを投資比率として求める手法である。以下にその方法を簡単に示す。

AHP では、「代替案」を決めるための「評価基準」を定め、例えば、図1のような階層図を用いることによって、その階層構造を表現する。ただし、ここでは簡単のため、「評価基準」のレベルは1、数は3、「代替案」の数は4の階層図を示す。

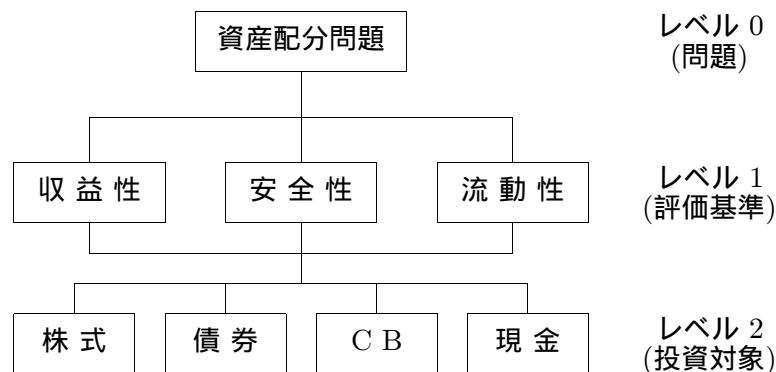


図 1 : 階層図の例

次に、AHP による投資比率の決定方法を簡単に記号を用いて説明する。ここで用いる記号を以下に示す ²。

$N + 1$: レベル数

M_i : レベル i における評価基準の数 ³, ($i = 0, \dots, N - 1$), ただし、 $M_0 = 1$

M_N : レベル N における代替案(投資対象)の数

¹AHP についての詳細は、Saaty [4], 刀根 [6] を参照されたい。

²2.2節以降のモデル化において、決定変数に小文字を使うため、添字以外のパラメータはすべて大文字にする。ただし、行列に関しては決定変数にも大文字を使う。また、太字になっているのはベクトルを表す。

³レベル i の評価基準は通常レベル $(i - 1)$ の評価基準別に決められることも多い。そのため、 M_i 個の評価基準は必ずしもすべてレベル $(i - 1)$ の評価基準に階層的につながっているとは限らない。しかし、つながっていない階層間のウェイトを 0 と考えれば、このように一般化しても問題ない。

- $P_i^{(j)}$: レベル i の評価基準 j に対する一対比較行列
 $P_i^{(j)} \in R^{M_i \times M_i}, (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1})$
- $W_i^{(j)}$: $P_i^{(j)}$ に対する最大固有ベクトル, $W_i^{(j)} \in R^{M_i}, (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1})$
 $P_i^{(j)} W_i^{(j)} = \lambda_{max,i}^{(j)} W_i^{(j)}$, ただし、 $\lambda_{max,i}^{(j)}$ は最大固有値
- Y_i : レベル i の評価基準に対する最大固有ベクトルを横に並べた行列,
 $Y_i = [W_i^{(1)}, \dots, W_i^{(M_{i-1})}] \in R^{M_i \times M_{i-1}}, (i = 1, \dots, N)$
- Z_i : レベル i の評価基準に対する合成ウェイトベクトル, $Z_i = Y_i Z_{i-1} \in R^{M_i}, (i = 1, \dots, N-1)$ 。ただし、 $Z_0 = 1$ 。したがって、 $Z_1 = Y_1 = W_1^{(1)}$ 。
- Z_N : 代替案(投資対象)に対するウェイトベクトル [(1)式より導出]

AHP において、投資比率 Z_N は次のようにして求めることができる。

$$\begin{aligned}
Z_N &= Y_N Z_{N-1} \\
&= Y_N (Y_{N-1} Z_{N-2}) \\
&= \vdots \\
&= Y_N Y_{N-1} \cdots Y_2 Y_1
\end{aligned} \tag{1}$$

これらの手法は、投資家の意思(価値観)を反映する一対比較行列に対する最大固有ベクトルを使って投資比率を求めていく手順をとる⁴ので、投資比率に対して実務上の諸制約を直接組み込むことができない。つまり、AHPでは、一対比較行列が決まると、投資比率 Z_N が決定するため、このままでは投資比率に諸制約を組み込むことはできない。しかし、資産配分においては、例えば、運用部門内で設定している上下限ルール、我が国における企業年金運用の 5:3:3:2 規制⁵や、ポートフォリオの組み替えコストを抑えるための売買回転率制約等も課されるのが現状である。

そこで、本研究では、AHPの持つ長所を取り込みながら、これらの諸制約を組み込むことができる AHP・数理計画モデルの構築を試みる。本研究によって得られる数理計画モデルは、平均・分散モデルや下方リスクモデルなどの数理計画モデルと組み合わせることによって、より投資家のニーズに合ったモデル化が可能になる。

2 AHP・数理計画モデルの構築法

2.1 AHPにおける固有値問題と数理計画モデル

AHPでは、一対比較行列に対する固有値問題を解くことによって最大固有ベクトルを各評価基準毎に求め、代替案に対するウェイトベクトルを求める。この最大固有値および最大固有ベクトル

⁴ Y_i は、 $W_i^{(j)}$ によって記述され、その $W_i^{(j)}$ は一対比較行列 $P_i^{(j)}$ により求められる。

⁵元本安全資産(債券・担保付貸付等)に 50%以上、国内株式に 30%以下、外貨建資産に 30%以下、不動産等に 20%以下という各資産への投資比率に対する制約。元本安全資産(債券・担保付貸付等)に 50%以上、国内株式に 30%以下、外貨建資産に 30%以下、不動産等に 20%以下という各資産への投資比率に対する制約。

ルを求める問題は以下のような数理計画問題 MPEV として定式化できる。

【 MPEV 】

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda_{max,i}^{(j)} \\ \text{s.t.} \quad & P_i^{(j)} \mathbf{W}_i^{(j)} = \lambda_{max,i}^{(j)} \mathbf{W}_i^{(j)} \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{W}_i^{(j)} = 1 \end{aligned}$$

ここで、 $P_i^{(j)}$ は既知の一対比較行列、 $\mathbf{e}^T = (1, \dots, 1) \in R^{1 \times M_i}$ である。この問題は、 $\lambda_{max,i}^{(j)}$ と $\mathbf{W}_i^{(j)}$ が決定変数となる非線形計画問題である。 $P_i^{(j)}$ は非負行列なので、 $P_i^{(j)}$ に対する最大固有ベクトル $\mathbf{W}_i^{(j)}$ は非負ベクトルになる(ペロン・フロベニウスの定理)。そこで、問題 MPEV は次のような非線形制約のみから記述することが可能である。

【 MPEV-C 】

$$\begin{aligned} P_i^{(j)} \mathbf{W}_i^{(j)} &= \lambda_{max,i}^{(j)} \mathbf{W}_i^{(j)} \\ \mathbf{e}^T \mathbf{W}_i^{(j)} &= 1 \\ \mathbf{W}_i^{(j)} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

2.2 モデル構築の考え方

投資比率 Z_N に制約を加えることは、結果として投資家の情報(意思や価値観)を表す一対比較行列に制約を加えることになる。そこで、AHPの長所を生かすために、投資比率制約を加えても、一対比較行列 $P_i^{(j)}$ をなるべく変更しないことを目的とするモデル化を考える。そのモデルは、以下のような非線形計画問題 PMA-0 (基本モデル) として定式化できる^{6 7}。

【 PMA-0 】

$$\min \quad \text{dev} \left[G \left(P_i^{(j)}, Q_i^{(j)} \right), G \left(Q_i^{(j)}, P_i^{(j)} \right) \right], \quad (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1}) \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \quad Q_i^{(j)} \mathbf{w}_i^{(j)} = \gamma_{max,i}^{(j)} \mathbf{w}_i^{(j)}, \quad (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1}) \quad (5)$$

$$\mathbf{z}_i = X_i \mathbf{z}_{i-1}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad \text{ただし}, z_0 = 1, X_i = \left[\mathbf{w}_i^{(1)}, \dots, \mathbf{w}_i^{(M_{i-1})} \right] \quad (6)$$

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w}_i^{(j)} = 1, \quad (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1}) \quad (7)$$

$$\mathbf{w}_i^{(j)} \geq \mathbf{0}, \quad (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1}) \quad (8)$$

⁶問題 PMA-0 は一般に多目的計画問題として定式化されるが、各目的関数を線形和として一目的関数にするならば、例えば、(2)式のように設定することができる。

$$\min \quad \sum_{i=1}^N \theta_i \left\{ \sum_{j=1}^{M_{i-1}} \eta_{i,j} \text{dev} \left[G \left(P_i^{(j)}, Q_i^{(j)} \right), G \left(Q_i^{(j)}, P_i^{(j)} \right) \right] \right\} \quad (2)$$

ここで、各階層はすべてつながっているとす。 θ_i は各階層(レベル)間の重みを、 $\eta_{i,j}$ はレベル i の評価基準間の重みを表すパラメータとする。簡単のためにすべての重みを同じにする場合は、 $\theta_i = \frac{1}{N}$, $\eta_{i,j} = \frac{1}{M_{i-1}}$ と設定すればよい。つまり、

$$\min \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{M_{i-1}} \sum_{j=1}^{M_{i-1}} \text{dev} \left[G \left(P_i^{(j)}, Q_i^{(j)} \right), G \left(Q_i^{(j)}, P_i^{(j)} \right) \right] \right\} \quad (3)$$

3節以降の代替モデルでも同様に設定することができる。

⁷図1に対する具体的な定式化を付録Aに示す。

$$z_N \in F \quad (9)$$

$$\frac{1}{H} \leq Q_{i,(a,b)}^{(j)} \leq H, \quad (10)$$

$$(i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1}, a = 1, \dots, M_i - 1, b = a + 1, \dots, M_i)$$

$$\frac{\gamma_{max,i}^{(j)} - M_i}{M_i - 1} \leq CI^{max}, \quad (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1}) \quad (11)$$

$\text{dev}[\cdot, \cdot]$ は、2つのパラメータの差異を表す一般的な関数式、 F は投資比率 z_N の諸制約空間を表す。 $Q_i^{(j)}$, $w_i^{(j)}$, $\gamma_{max,i}^{(j)}$, z_i , X_i はすべて、1節で示した記号の $P_i^{(j)}$, $W_i^{(j)}$, $\lambda_{max,i}^{(j)}$, Z_i , Y_i に相当する決定変数である。 $1/H$, H はそれぞれ一対比較行列の対角要素以外の要素に対する下限値と上限値⁸、 CI^{max} は整合度⁹の許容上限を表す。

また、 $Q_i^{(j)}$ は一対比較行列の構造を保つように変数が設定されている。 $Q_{i,(a,b)}^{(j)}$ は、 $Q_i^{(j)}$ の右上三角部分の要素を表す¹⁰。 $G(P, Q)$ は行列 P と Q の各要素を $P_{a,b}$, $Q_{a,b}$ とすると、 $P_{a,b}/Q_{a,b}$ を各要素とする行列を表す。(4)式の目的関数は、 $d = \left| \frac{P_{a,b}}{Q_{a,b}} - \frac{Q_{a,b}}{P_{a,b}} \right|$ をなるべく小さくすることを目的にしている。もし、 $P_{a,b} = Q_{a,b}$ ならば、 $d = 0$ である。また、このように設定することによって、行列の右上三角部分のみを要素として考えることができるからである。つまり、 $P_{a,b}$, $Q_{a,b}$ それぞれが、1よりも大きいか小さいかの区別を考慮する必要がない。さらに、 $P_{a,b}$, $Q_{a,b}$ の大きさの違いによる差異への影響を考慮(基準化)することができる。ただし、目的関数は非線形関数になる。そこで、(14)式のように書き直すことによって線形関数にすることができる。

$$\min \text{dev} \left[G \left(Q_i^{(j)}, P_i^{(j)} \right), 1 \right], \quad (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1}) \quad (14)$$

一方、差異を表す関数 $\text{dev} [a, b]$ として、次のような関数が考えられる。ここで、 a, b ともに M 個の要素から成るベクトルもしくは行列 ($a = \{a_i\}$, $b = \{b_i\}$, $(i = 1, \dots, M)$) とする。

(1) 絶対差異の p 次距離関数

$$\text{dev} [a, b] = \sqrt[p]{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |a_k - b_k|^p} \quad (15)$$

⁸AHPでは、一対比較行列の構成要素は通常、 $1/9 \sim 9$ の範囲に設定される。そこで、 $Q_{i,(a,b)}^{(j)}$ に対する下限値、上限値は、例えば、 $1/H = 1/9$, $H = 9$ と設定できる。

⁹AHPでは、一対比較行列の整合性を表す評価値として、(12)式に示す C.I.(Consistency Index) がある。

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - M}{M - 1} \quad (12)$$

ここで、 λ_{max} は最大固有値、 M は評価基準の数を表す。C.I. は 0.1 以下であれば良いと考える。

¹⁰行列 $Q_i^{(j)}$ を(13)式のように設定する。

$$Q_i^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & Q_{i,(1,2)}^{(j)} & \cdots & Q_{i,(1,M_{i-1})}^{(j)} & Q_{i,(1,M_i)}^{(j)} \\ \frac{1}{Q_{i,(1,2)}^{(j)}} & 1 & \cdots & \cdots & Q_{i,(2,M_i)}^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{Q_{i,(1,M_{i-1})}^{(j)}} & \vdots & \vdots & 1 & Q_{i,(M_{i-1},M_i)}^{(j)} \\ \frac{1}{Q_{i,(1,M_i)}^{(j)}} & \frac{1}{Q_{i,(2,M_i)}^{(j)}} & \cdots & \frac{1}{Q_{i,(M_{i-1},M_i)}^{(j)}} & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

(2) オープンL字関数¹¹

$$\text{dev}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (1 - \beta_p) \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |a_k - b_k| + \beta_p \cdot \max_k |a_k - b_k| \quad (17)$$

問題 PMA-0 は非凸な非線形制約式を含むため、全域的最適解を求めるためには極めて解きにくい問題である。そこで、AHP の構造をなるべく守りつつ、問題 PMA-0 に対する代替的なモデルを 3 節で検討する。

3 代替的なアプローチ

3.1 代替モデル 1

一対比較行列が完全に整合的な場合、最大固有ベクトルによって、その情報を表すことができる。例えば、評価基準が 3 つの場合、固有値問題は (18) 式で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} 1 & w^{(1)}/w^{(2)} & w^{(1)}/w^{(3)} \\ w^{(2)}/w^{(1)} & 1 & w^{(2)}/w^{(3)} \\ w^{(3)}/w^{(1)} & w^{(3)}/w^{(2)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

そこで、一対比較行列の構造が最大固有ベクトルに表現されていると考えて、最大固有ベクトル $W_i^{(j)}$ をなるべく変更しないモデル化を考える。そのモデルは以下のような非線形計画問題 PMA-1 として定式化できる。

【 PMA-1 】

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{dev} \left[W_i^{(j)}, w_i^{(j)} \right], \quad (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1}) \\ \text{s.t.} \quad & (6) \sim (9) \text{ 式} \end{aligned} \quad (19)$$

$Q_i^{(j)}, \gamma_{max,i}^{(j)}$ が問題から取り除かれたので、問題 PMA-0 に比べて解きやすくなっている¹² が、非凸な非線形制約式が残っているので、全域的最適解を求めるには、まだ解きにくい構造の問題である。

¹¹ $(1 - \beta_p)$ は平均差異の重み、 β_p は最大差異の重みを表す。オープンL字関数を最小化する問題は他の制約が線形制約式の場合、線形計画問題に帰着することができる。また、オープンL字関数の β_p は (16) 式によって、 p 次距離関数と関係付けることができる。詳しくは枇々木 [1] を参照されたい。

$$\beta_p = \frac{1}{M-1} \left(\frac{M}{pM} - 1 \right) \quad (16)$$

¹²求められた $w_i^{(j)}$ を用いて、 $Q_i^{(j)}, \gamma_{max,i}^{(j)}$ を求めることも可能であるが、問題 PMA-0 の解とは異なる。問題を分割した二段階モデルとなるので、問題 PMA-0 に比べて解きやすくなる。

3.2 代替モデル 2

代替モデル 1 で非線形制約式となっている (6) 式を緩和するために、評価基準に対するウェイトベクトル Z_i をなるべく変更しないような 2 種類の目標を持つモデルを考える。そのモデルは以下のような問題 PMA-2 として定式化できる¹³。(22), (23) 式が線形目的関数、(26) 式が線形制約式ならば、線形計画問題になる。

【 PMA-2 】

$$\min \quad \text{dev} [Z_i, z_i], \quad (i = 1, \dots, N-1) \quad (22)$$

$$\min \quad \text{dev} [z_i, Y_i z_{i-1}], \quad (i = 2, \dots, N) \quad (23)$$

$$\text{s.t.} \quad e^T z_i = 1, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (24)$$

$$z_i \geq \mathbf{o}, \quad (i = 1, \dots, N-1) \quad (25)$$

$$z_N \in F \quad (26)$$

(22) 式は以下に示す 目標 1 を、(23) 式は 目標 2 を目指す目的関数になる。

- (目標 1) 各レベルで求められる評価基準の合成ウェイトベクトル $Z_i (i = 1, \dots, N-1)$ と投資比率 (ウェイト) からさかのぼって求められる評価基準のウェイトベクトル $z_i (i = 1, \dots, N-1)$ との差をできるだけ小さくしたい。
- (目標 2) あるレベル i とその一つ上のレベル $(i-1)$ の評価基準に対する合成ウェイトベクトル z_i, z_{i-1} の関係をレベル間の関係を表す最大固有値ベクトルを横に並べた行列 Y_i によってできるだけ表したい。

3.3 代替モデル 3

投資家の情報は最終的に得られた投資ウェイトベクトル Z_N に反映されていると考え、それをなるべく変更しないことを目的とするモデルを考える。そのモデルは以下のような問題 PMA-3 として定式化できる。このモデルも、(27) 式が線形目的関数、(29) 式が線形制約式ならば、線形計画問題になる。

【 PMA-3 】

$$\min \quad \text{dev} [Z_N, z_N] \quad (27)$$

$$\text{s.t.} \quad e^T z_N = 1 \quad (28)$$

$$z_N \in F \quad (29)$$

¹³評価基準に対するウェイトベクトル Z_i をなるべく変更しないことを目的とする場合、次のようなモデルが考えられる。

$$\min \quad \text{dev} [Z_i, z_i], \quad (i = 1, \dots, N-1) \quad (20)$$

$$\text{s.t.} \quad z_i = Y_i z_{i-1}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad \text{ただし}, z_0 = 1 \quad (21)$$

(24) ~ (26) 式

しかし、 $M_i \geq M_{i-1}$ の場合、(21) 式は変数の数に比べて制約式の数が多く (等しく) なるために、実行不可能になる可能性が高い。そこで、実行不可能になるのを避けるために、問題 PMA-2 のように定式化を書き直している。

4 数値例

基本モデルと3つの代替モデルに対する数値例を示す。 $N = 2$ (評価基準は1レベル), $M_1 = 6$ (評価基準数は6), $M_2 = 6$ (投資対象数は6)の階層図(図2)を用いる¹⁴。

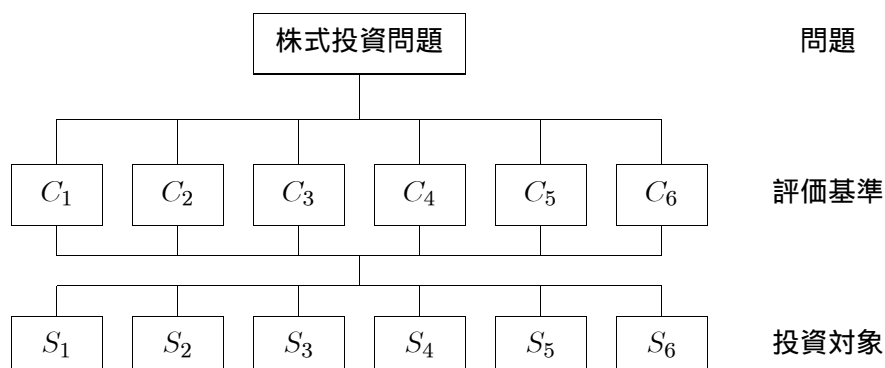


図2：階層図(数値例)

レベル1の一对比較行列を表1, レベル2の一对比較行列を表2に示す。

表1：一对比較行列(レベル1：評価基準間)

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆
C ₁	1	2	2	4	6	9
C ₂	1/2	1	1/2	2	2	4
C ₃	1/2	2	1	2	4	6
C ₄	1/4	1/2	1/2	1	2	2
C ₅	1/6	1/2	1/4	1/2	1	1
C ₆	1/9	1/4	1/6	1/2	1	1

$C.I. = 0.0164$

¹⁴この数値例は、吉井 [7] をもとにして作成した。ただし、一对比較行列が載っていなかったため、ウェイトベクトルから一对比較行列を作成した。そのため、作成した一对比較行列から求めた最大固有(ウェイト)ベクトルは吉井 [7] の結果とは異なる。また、評価基準や代替案(投資銘柄)もここでは記号に直して記す。

表 2：一対比較行列(レベル2：投資対象間(評価基準毎))

C₁	S₁	S₂	S₃	S₄	S₅	S₆
S₁	1	2	2	6	6	2
S₂	1/2	1	1	3	3	1
S₃	1/2	1	1	3	3	1
S₄	1/6	1/3	1/3	1	1	1/3
S₅	1/6	1/3	1/3	1	1	1/3
S₆	1/2	1	1	3	3	1
C.I. = 0.0000						

C₂	S₁	S₂	S₃	S₄	S₅	S₆
S₁	1	1	3	1/2	3	2
S₂	1	1	3	1/2	3	2
S₃	1/3	1/3	1	1/5	1	1/2
S₄	2	2	5	1	5	3
S₅	1/3	1/3	1	1/5	1	1/2
S₆	1/2	1/2	2	1/3	2	1
C.I. = 0.0039						

C₃	S₁	S₂	S₃	S₄	S₅	S₆
S₁	1	1	1/2	2	1/3	3
S₂	1	1	1/2	2	1/3	3
S₃	2	2	1	3	1/2	5
S₄	1/2	1/2	1/3	1	1/5	2
S₅	3	3	2	5	1	8
S₆	1/3	1/3	1/5	1/2	1/8	1
C.I. = 0.0046						

C₄	S₁	S₂	S₃	S₄	S₅	S₆
S₁	1	1/3	2	1	1/4	1/2
S₂	3	1	4	3	1/2	2
S₃	1/2	1/4	1	1/2	1/7	1/3
S₄	1	1/3	2	1	1/4	1/2
S₅	4	2	7	4	1	3
S₆	2	1/2	3	2	1/3	1
C.I. = 0.0094						

C₅	S₁	S₂	S₃	S₄	S₅	S₆
S₁	1	1/5	1/2	1/2	1/2	1/2
S₂	5	1	2	2	2	2
S₃	2	1/2	1	1	1	1
S₄	2	1/2	1	1	1	1
S₅	2	1/2	1	1	1	1
S₆	2	1/2	1	1	1	1
C.I. = 0.0011						

C₆	S₁	S₂	S₃	S₄	S₅	S₆
S₁	1	2	1/2	2	1/2	3
S₂	1/2	1	1/3	1	1/3	2
S₃	2	3	1	3	1	5
S₄	1/2	1	1/3	1	1/3	2
S₅	2	3	1	3	1	5
S₆	1/3	1/2	1/5	1/2	1/5	1
C.I. = 0.0039						

最大固有(ウェイト)ベクトルとそれらから求められる投資比率を表3に示す。

表 3：最大固有(ウェイト)ベクトルと投資比率

		C₁	C₂	C₃	C₄	C₅	C₆	投資 比率
レベル1		0.3899	0.1614	0.2426	0.1005	0.0595	0.0460	
レ ベ ル 2	S₁	0.3529	0.1989	0.1304	0.0867	0.0735	0.1672	0.2221
	S₂	0.1765	0.1989	0.1304	0.2397	0.3170	0.0962	0.1799
	S₃	0.1765	0.0651	0.2305	0.0498	0.1524	0.2934	0.1628
	S₄	0.0588	0.3570	0.0742	0.0867	0.1524	0.0962	0.1208
	S₅	0.0588	0.0651	0.3909	0.3893	0.1524	0.2934	0.1900
	S₆	0.1765	0.1152	0.0436	0.1478	0.1524	0.0536	0.1244

投資比率に関する諸制約として、ここでは上限制約と回転制約を課す。

(1) 上限制約

$$z_N \leq U \quad (30)$$

(2) 回転制約

$$e^T |z_N - x| \leq V \quad (31)$$

U は投資比率の上限ベクトル、 V は売買回転率の上限値、 x は現在のポートフォリオ・ベクトルを表す。以下の数値例では、 $U = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)^T$ 、 $x = (0.18, 0.18, 0.16, 0.16, 0.16, 0.16)^T$ 、 $V = 0.1$ 、 $H = 9$ 、 $CI^{max} = 0.05$ をパラメータとして設定する。基本モデル、代替モデル1の各レベルの重要度および代替モデル2の目標間の重要度は同じと設定する。また、差異関数 $\text{dev}[\cdot, \cdot]$ には、オープンL字関数を用いる。各モデルとも、 β_p の値を 0.000(PMA-X_1)、0.2899(PMA-X_2)、

0.4604(PMA-X_3)、0.6386(PMA-X_4)、0.8032(PMA-X_5)、1.000(PMA-X_6) と設定した 6 ケースについて結果を示す¹⁵。

問題を解くためのソフトウェアには基本モデル、代替モデル 1 (非線形計画問題) に対しては、NUOPT¹⁶、代替モデル 2、代替モデル 3(線形計画問題) に対しては、XPRESS-MP¹⁷ を用いる。

各モデルの制約式の本数、変数の数を表 4 に示す。ただし、「基本'」は基本モデルの目的関数に、(14) 式を用いた場合を示す。

表 4：モデルの問題の大きさ

モデル		基本	基本'	代替 1	代替 2	代替 3
制約式	非線形制約	153	48	6	0	0
	(目的関数)	(105)	(0)	(0)	(0)	(0)
	線形制約	119	224	91	26	13
	(目的関数)	(105)	(217)	(84)	(24)	(12)
	上下限制約	210	210	0	0	0
	非負制約	265	265	139	—	—
	小計	747	747	236	26	13
諸制約	上限制約	6	6	6	6	6
	売買回転率	7	7	7	7	7
	非負制約	12	12	12	—	—
	小計	25	25	25	13	13
	合計	772	772	261	39	26
変数	決定変数	160	160	48	6	6
	(一対値)	(105)	(105)	(0)	(0)	(0)
	差異変数	217	217	91	26	13
	小計	377	377	139	32	19
諸制約	決定変数	12	12	12	12	12
	合計	389	389	151	44	31
数理計画問題		非線形計画問題			線形計画問題	
ソフトウェア		NUOPT			XPRESS-MP	

¹⁵ β_p は、 $p = 1, 2, 3, 5, 10, \infty$ の p 次距離関数を代替するためのパラメータ値として設定した。

¹⁶NUOPT は (株) 数理システムの最適化ソフトウェアである。

¹⁷XPRESS-MP は、Dash Associates(日本では (株) ソーティスが販売)の最適化ソフトウェアである。

まずはじめに、4つのモデルに対する結果を表5～表8¹⁸、基本モデルの場合の C.I. 値を表9に示す。

表 5：基本モデル：最適投資比率

投資比率	PMA-0_1	PMA-0_2	PMA-0_3	PMA-0_4	PMA-0_5	PMA-0_6
$z_{2,1}$	0.2000	0.2000	0.2000	0.1998	0.1995	0.1995
$z_{2,2}$	0.1800	0.1800	0.1800	0.1800	0.1800	0.1800
$z_{2,3}$	0.1601	0.1600	0.1603	0.1604	0.1600	0.1600
$z_{2,4}$	0.1207	0.1216	0.1247	0.1251	0.1251	0.1251
$z_{2,5}$	0.1899	0.1900	0.1897	0.1899	0.1904	0.1905
$z_{2,6}$	0.1493	0.1484	0.1453	0.1449	0.1449	0.1449

表 6：代替モデル 1：最適投資比率

投資比率	PMA-1_1	PMA-1_2	PMA-1_3	PMA-1_4	PMA-1_5	PMA-1_6
$z_{2,1}$	0.1989	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000
$z_{2,2}$	0.1800	0.1800	0.1800	0.1800	0.1800	0.1809
$z_{2,3}$	0.1622	0.1619	0.1619	0.1619	0.1619	0.1617
$z_{2,4}$	0.1350	0.1338	0.1338	0.1338	0.1338	0.1391
$z_{2,5}$	0.1889	0.1881	0.1881	0.1881	0.1881	0.1757
$z_{2,6}$	0.1351	0.1363	0.1362	0.1362	0.1362	0.1426

表 7：代替モデル 2：最適投資比率

投資比率	PMA-2_1	PMA-2_2	PMA-2_3	PMA-2_4	PMA-2_5	PMA-2_6
$z_{2,1}$	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000
$z_{2,2}$	0.1799	0.1800	0.1800	0.1800	0.1799	0.1800
$z_{2,3}$	0.1600	0.1600	0.1600	0.1600	0.1628	0.1628
$z_{2,4}$	0.1429	0.1235	0.1235	0.1235	0.1236	0.1235
$z_{2,5}$	0.1900	0.1900	0.1900	0.1900	0.1872	0.1872
$z_{2,6}$	0.1272	0.1465	0.1465	0.1465	0.1465	0.1465

表 8：代替モデル 3：最適投資比率

投資比率	PMA-3_1	PMA-3_2	PMA-3_3	PMA-3_4	PMA-3_5	PMA-3_6
$z_{2,1}$	0.1972	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000
$z_{2,2}$	0.1799	0.1800	0.1800	0.1799	0.1799	0.1828
$z_{2,3}$	0.1628	0.1600	0.1600	0.1600	0.1600	0.1600
$z_{2,4}$	0.1208	0.1235	0.1235	0.1236	0.1236	0.1429
$z_{2,5}$	0.1900	0.1900	0.1900	0.1900	0.1900	0.1678
$z_{2,6}$	0.1493	0.1465	0.1465	0.1465	0.1465	0.1465

¹⁸各モデルに対する具体的な定式化を付録Bに示す。

表 9：基本モデル：C.I. 値

C.I.		PMA-0_1	PMA-0_2	PMA-0_3	PMA-0_4	PMA-0_5	PMA-0_6
レベル1		0.0164	0.0164	0.0164	0.0164	0.0164	0.0164
レベル2	C ₁	0.0337	0.0020	0.0035	0.0038	0.0044	0.0043
	C ₂	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039
	C ₃	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046
	C ₄	0.0094	0.0094	0.0094	0.0094	0.0094	0.0094
	C ₅	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011
	C ₆	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039
	平均	0.0104	0.0059	0.0061	0.0061	0.0062	0.0062

これらの結果を見ると、 $z_{2,1} \sim z_{2,3}$ はモデルおよび β_p の違いによる差はほとんど見られない。モデル間で大きな違いが見られないのは、一対比較行列の C.I. 値が小さかったため、基本モデルのように行列の各値を考慮しても、他の代替モデルのように考慮しなくても結果的に同じ傾向が表れたものと考えられる。C.I. 値と各モデルの結果については様々な例で検証する必要がある。また、 $z_{2,1}$ については、従来の AHP による投資比率が上限の 0.2 を上回っているため、制約値にほぼ等しくなることと、 $z_{2,2}$, $z_{2,3}$ については現在のポジションと従来の AHP による投資比率がほぼ同じもしくはとても近いことも理由の一つであろう。全体の傾向として、 β_p の値の設定方法によって、特に $\beta_p = 0$, $0 < \beta_p < 1$, $\beta_p = 1$ の3通りの違いによって、結果が大きく異なる可能性がある。

ここで、非線形計画問題(基本モデル、代替モデル 1)の初期解には従来の AHP により得られた値を設定している。非線形計画問題を解くことによって得られる最適解には全体的最適性の保証はないが、従来の AHP による問題をなるべく変更しないことが目的になるので、初期解として設定している値は、最も良い初期解になるであろう。

この数値例の目的はモデルの具体例を示し、モデルによって解が異なることを示すことと、非線形計画問題に対する解の導出可能性を示すことであり、その意味ではうまく結果を出すことができた。もちろん、モデルの違いによる特徴を考察するためには、いろいろな数値実験を行う必要がある。取り扱う問題は、一般制約が最適解に大きな影響を及ぼすことになるので、結果的にあまりモデル間での違いが出ない可能性もある。その場合には計算の負荷上、できるだけ簡略化したモデルを用いる方が良いだろう。

5 グループによる投資意思決定への適用

提案したモデルは、一人の意思決定者によって投資判断を行う場合に適用可能なモデルである。しかし、資産配分問題などの重要な投資判断は複数の意思決定者(グループ)によって行われる場合が少なくない。そのような場合にも AHP はその威力を十分に発揮する(「グループ AHP」と呼ばれる)。本節では、グループ AHP を用いた投資意思決定モデルについて2通りの方法を議論する。ここでは、グループ内の意思決定者は D 人いるとする。

5.1 一対比較値の幾何平均を用いる方法

グループ AHP の最も基本的な方法として、(32) 式のように意思決定者各個人の一対比較値 $P_{i,(a,b)}^{(j)}[h]$ の幾何平均値をグループの一対比較値 $P_{i,(a,b)}^{(j)}$ と考える方法がある。

$$P_{i,(a,b)}^{(j)} = \sqrt[D]{\prod_{h=1}^D P_{i,(a,b)}^{(j)}[h]} \quad (32)$$

この方法を用いれば、提案したモデルの枠組みをそのまま適用することが可能である。

5.2 個人の意思をできるだけ反映させる方法

幾何平均値を用いる方法は、はじめから各個人の意思の平均的な値を用いるので、モデルの中で個人の意思を反映させることが難しい。そこで、多少問題の規模は大きくなるが、これらのことを考慮することが可能なモデル化を示す。提案したモデルの簡単な拡張モデルとして記述することが可能である。以下に示す各モデルとも、 $D = 1$ のときは提案したモデルと同じになる。

5.2.1 基本モデルへの適用

各個人の一対比較行列 $P_i^{(j)}[h]$ とグループ決定による一対比較行列 $Q_i^{(j)}$ ができるだけ差がないようにすることを目的とするモデル化を考える。そのモデルは以下のような非線形計画問題 GPMA-0 として定式化できる。

【 GPMA-0 】

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{dev} \left[G \left(P_i^{(j)}[h], Q_i^{(j)} \right), G \left(Q_i^{(j)}, P_i^{(j)}[h] \right) \right], \\ & (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1}, h = 1, \dots, D) \\ \text{s.t.} \quad & (5) \sim (11) \text{ 式} \end{aligned} \quad (33)$$

5.2.2 代替モデル 1 への適用

各個人に対する最大固有ベクトル $W_i^{(j)}[h]$ とグループ決定に対する最大固有ベクトル $w_i^{(j)}$ ができるだけ差がないようにすることを目的とするモデル化を考える。そのモデルは以下のような非線形計画問題 GPMA-1 として定式化できる。

【 GPMA-1 】

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{dev} \left[W_i^{(j)}[h], w_i^{(j)} \right], (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M_{i-1}, h = 1, \dots, D) \\ \text{s.t.} \quad & (6) \sim (9) \text{ 式} \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、 $W_i^{(j)}[h]$ は (35) 式から求められる最大固有ベクトルを表す。

$$P_i^{(j)}[h] W_i^{(j)}[h] = \lambda_{i,max}^{(j)}[h] W_i^{(j)}[h] \quad (35)$$

5.2.3 代替モデル 2 への適用

同様に拡張することにより、モデルは以下のような問題 GPMA-2 として定式化できる。

【 GPMA-2 】

$$\min \quad \text{dev} [Z_i[h], z_i] , (i = 1, \dots, N - 1, h = 1, \dots, D) \quad (36)$$

$$\min \quad \text{dev} [z_i, Y_i[h]z_{i-1}] , (i = 2, \dots, N, h = 1, \dots, D) \quad (37)$$

s.t. (24) ~ (26) 式

ここで、 $Z_i[h]$, $Y_i[h]$ はそれぞれ意思決定者 h の Z_i (評価基準に対するウェイトベクトル), Y_i (最大固有ベクトルを横に並べた行列) を表す。

5.2.4 代替モデル 3 への適用

同様に、モデルは以下のような問題 GPMA-3 として定式化できる。

【 GPMA-3 】

$$\min \quad \text{dev} [Z_N[h], z_N] , (h = 1, \dots, D) \quad (38)$$

s.t. (28), (29) 式

ここで、 $Z_N[h]$ は意思決定者 h の Z_N (投資比率) を表す。

6 おわりに

本研究では、AHP によるポートフォリオ選択問題に対し、従来の方法では考慮することが難しかった制約条件を組み込むことができる数理計画モデルを示した。AHP の構造をそのまま保つことができる基本モデルと、それを代替する 3 つの簡略モデルを提案した。さらに、各モデルに対する簡単な数値例を示した。本研究で示したモデルは、ポートフォリオ選択問題だけでなく、代替案に制約が課されるタイプの問題に対しても、同様に適用可能である。

以下に、今後の課題を示す。

1. 本研究は、AHP の特徴を生かしてポートフォリオ選択を行う問題に対する新しいモデル化を中心に議論した。実際の資産配分問題に対して、これらのモデルを適用し、さらなる議論を行う必要がある。
2. 各モデル(基本モデル、代替モデル)の比較を様々な数値実験により行う。特に、C.I. 値と各モデルから得られる最適投資比率の関係については、より簡略なモデルを採用した方が計算負荷がかからないので、検討する必要がある。
3. 平均・分散モデルや下方リスクモデルと本モデルを同時に組み込むことにより、量的情報、質的情報の両方を含む統合モデルを構築する。

参考文献

- [1] 枇々木 規雄：目標ベクトル法で想定する効用関数に関する考察, 日本経営工学会誌, Vol.46, No.6(1995), pp.599-604.
- [2] 開澤 栄相, 鈴木 政博：Global Asset Allocation by AHP, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 1995年度秋季研究発表会予稿集, 34-35.
- [3] S.R.Khaksari, R.Kamath and R. Grieves：A New Approach to Determining Optimum Portfolio Mix, Journal of Portfolio Management, Vol.15, No. 3(1989), 43-49.
- [4] T.L.Saaty：The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill, 1980.
- [5] T.L.Saaty, P.C.Rogers and R.Pell：Portfolio Selection through Hierarchies, Journal of Portfolio Management, (1980), 16-21.
- [6] 刀根 薫：ゲーム感覚意志決定法 AHP 入門, 日科技連, 1986.
- [7] 吉井 邦恒：株式投資分析, 刀根 薫, 眞鍋龍太郎 編, AHP 事例集, 日科技連, 1990, pp.196-203.

付録

A 図1の階層図に対する基本モデルの定式化

具体的に分かりやすく示すために、図1の階層図に対する定式化を示す。

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \text{dev} \left[G \left(P_i^{(j)}, Q_i^{(j)} \right), G \left(Q_i^{(j)}, P_i^{(j)} \right) \right], \quad ((i, j) = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}) \\
 \text{s.t.} \quad & Q_1^{(1)} \mathbf{w}_1^{(1)} = \gamma_{\max, 1}^{(1)} \mathbf{w}_1^{(1)} \\
 & Q_2^{(j)} \mathbf{w}_2^{(j)} = \gamma_{\max, 2}^{(j)} \mathbf{w}_2^{(j)}, \quad (j = 1, 2, 3) \\
 & \mathbf{z}_2 = X_2 \mathbf{w}_1^{(1)} = \left[\mathbf{w}_2^{(1)}, \mathbf{w}_2^{(2)}, \mathbf{w}_2^{(3)} \right] \mathbf{w}_1^{(1)} \\
 & \mathbf{e}^T \mathbf{w}_1^{(1)} = 1 \\
 & \mathbf{e}^T \mathbf{w}_2^{(j)} = 1, \quad (j = 1, 2, 3) \\
 & \mathbf{w}_1^{(1)} \geq \mathbf{0} \\
 & \mathbf{w}_2^{(j)} \geq \mathbf{0}, \quad (j = 1, 2, 3) \\
 & \mathbf{z}_N \in \mathbf{F} \\
 & \frac{1}{H} \leq Q_{1,(a,b)}^{(1)} \leq H, \quad (a = 1, \dots, 5, b = a + 1, \dots, 6) \\
 & \frac{1}{H} \leq Q_{2,(a,b)}^{(j)} \leq H, \quad (j = 1, 2, 3, a = 1, \dots, 5, b = a + 1, \dots, 6) \\
 & \frac{\gamma_{\max, 1}^{(1)} - 3}{2} \leq CI^{\max} \\
 & \frac{\gamma_{\max, 2}^{(j)} - 4}{3} \leq CI^{\max}, \quad (j = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

ここで、 $P_1^{(1)}, Q_1^{(1)} \in R^{3 \times 3}$, $P_2^{(j)}, Q_2^{(j)} \in R^{4 \times 4} (j = 1, 2, 3)$, $\mathbf{w}_1^{(1)} \in R^3$, $\mathbf{w}_2^{(j)} \in R^4 (j = 1, 2, 3)$, $X_2 \in R^{4 \times 3}$, $\mathbf{z}_2 \in R^4$ である。

B 数値例・具体的な定式化

B.1 基本モデル: 数値例・定式化

【 PMA-0 : 数値例 】

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta \cdot \text{level}_1 + (1 - \theta) \cdot \text{level}_2 \\
 \text{s.t.} \quad & \text{level}_1 = \frac{1 - \beta_p}{M_1 \cdot (M_1 - 1)/2} \sum_{a=1}^{M_1-1} \sum_{b=a+1}^{M_1} \left(d_{1,(a,b)}^- + d_{1,(a,b)}^+ \right) + \beta_p \cdot d_1^{\max} \\
 & \frac{P_{1,(a,b)}}{Q_{1,(a,b)}} - \frac{Q_{1,(a,b)}}{P_{1,(a,b)}} + d_{1,(a,b)}^- - d_{1,(a,b)}^+ = 0, \quad (a = 1, \dots, M_1 - 1, b = a + 1, \dots, M_1) \\
 & d_{1,(a,b)}^- + d_{1,(a,b)}^+ - d_1^{\max} \leq 0, \quad (a = 1, \dots, M_1 - 1, b = a + 1, \dots, M_1)
 \end{aligned}$$

$$level_2 = \frac{1}{M_1} \sum_{k=1}^{M_1} \left\{ \frac{1 - \beta_p}{M_2 \cdot (M_2 - 1)/2} \sum_{a=1}^{M_2-1} \sum_{b=a+1}^{M_2} \left(d_{2,(a,b)}^{(k)-} + d_{2,(a,b)}^{(k)+} \right) + \beta_p \cdot d_2^{(k)max} \right\}$$

$$\frac{P_{2,(a,b)}^{(k)}}{Q_{2,(a,b)}^{(k)}} - \frac{Q_{2,(a,b)}^{(k)}}{P_{2,(a,b)}^{(k)}} + d_{2,(a,b)}^{(k)-} - d_{2,(a,b)}^{(k)+} = 0 ,$$

$$(a = 1, \dots, M_2 - 1, b = a + 1, \dots, M_2, k = 1, \dots, M_1)$$

$$d_{2,(a,b)}^{(k)-} + d_{2,(a,b)}^{(k)+} - d_2^{(k)max} \leq 0 ,$$

$$(a = 1, \dots, M_2 - 1, b = a + 1, \dots, M_2, k = 1, \dots, M_1)$$

$$\sum_{a=1}^{k-1} \frac{w_{1,a}}{Q_{1,(a,k)}} + (1 - \gamma_{max,1}) \cdot w_{1,k} + \sum_{b=k+1}^{M_1} Q_{1,(k,b)} \cdot w_{1,b} = 0 , (k = 1, \dots, M_1)$$

$$\sum_{a=1}^{j-1} \frac{w_{1,a}^{(k)}}{Q_{1,(a,j)}^{(k)}} + (1 - \gamma_{max,2}^{(k)}) \cdot w_{2,j}^{(k)} + \sum_{b=j+1}^{M_2} Q_{2,(j,b)}^{(k)} \cdot w_{2,b}^{(k)} = 0 ,$$

$$(j = 1, \dots, M_2, k = 1, \dots, M_1)$$

$$z_{2,j} - \sum_{k=1}^{M_1} w_{2,j}^{(k)} \cdot w_{1,k} = 0 , (j = 1, \dots, M_2)$$

$$\sum_{k=1}^{M_1} w_{1,k} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{M_2} w_{2,j}^{(k)} = 1 , (k = 1, \dots, M_1)$$

$$\frac{1}{H} \leq Q_{1,(a,b)} \leq H , (a = 1, \dots, M_1 - 1, b = a + 1, \dots, M_1)$$

$$\frac{1}{H} \leq Q_{2,(a,b)}^{(k)} \leq H , (a = 1, \dots, M_2 - 1, b = a + 1, \dots, M_2, k = 1, \dots, M_1)$$

$$\gamma_{max,1} \leq CI^{max} \cdot (M_1 - 1) + M_1$$

$$\gamma_{max,2}^{(k)} \leq CI^{max} \cdot (M_2 - 1) + M_2 , (k = 1, \dots, M_1)$$

$$z_{2,j} \leq U_j , (j = 1, \dots, M_2)$$

$$z_{2,j} + y_j^- - y_j^+ = x_j , (j = 1, \dots, M_2)$$

$$\sum_{j=1}^{M_2} (y_j^- + y_j^+) \leq V$$

$$\gamma_{max,2}^{(k)}, w_{1,k}, d_2^{(k)max} \geq 0 , (k = 1, \dots, M_1)$$

$$d_{1,(a,b)}^-, d_{1,(a,b)}^+ \geq 0 , (a = 1, \dots, M_1 - 1, b = a + 1, \dots, M_1)$$

$$z_{2,j}, y_j^-, y_j^+ \geq 0 , (j = 1, \dots, M_2)$$

$$w_{2,j}^{(k)} \geq 0 , (j = 1, \dots, M_2, k = 1, \dots, M_1)$$

$$d_{2,(a,b)}^{(k)-}, d_{2,(a,b)}^{(k)+} \geq 0 , (a = 1, \dots, M_2 - 1, b = a + 1, \dots, M_2, k = 1, \dots, M_1)$$

$$\gamma_{max,1}, d_1^{max} \geq 0$$

B.2 代替モデル 1 : 数値例・定式化

【 PMA-1 : 数値例 】

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta \cdot level_1 + (1 - \theta) \cdot level_2 \\
 \text{s.t.} \quad & level_1 = (1 - \beta_p) \cdot \left\{ \frac{1}{M_1} \sum_{k=1}^{M_1} (d_{1,k}^- + d_{1,k}^+) \right\} + \beta_p \cdot d_1^{max} \\
 & w_{1,k} + d_{1,k}^- - d_{1,k}^+ = W_{1,k}, \quad (k = 1, \dots, M_1) \\
 & d_{1,k}^- + d_{1,k}^+ - d_1^{max} \leq 0, \quad (k = 1, \dots, M_1) \\
 & level_2 = \frac{1}{M_1} \sum_{k=1}^{M_1} \left[(1 - \beta_p) \cdot \left\{ \frac{1}{M_2} \sum_{j=1}^{M_2} (d_{2,j}^{(k)-} + d_{2,j}^{(k)+}) \right\} + \beta_p \cdot d_2^{(k)max} \right] \\
 & w_{2,j}^{(k)} + d_{2,j}^{(k)-} - d_{2,j}^{(k)+} = W_{2,j}^{(k)}, \quad (j = 1, \dots, M_2, k = 1, \dots, M_1) \\
 & d_{2,j}^{(k)-} + d_{2,j}^{(k)+} - d_2^{(k)max} \leq 0, \quad (j = 1, \dots, M_2, k = 1, \dots, M_1) \\
 & z_{2,j} - \sum_{k=1}^{M_1} w_{2,j}^{(k)} \cdot w_{1,k} = 0, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
 & \sum_{k=1}^{M_1} w_{1,k} = 1 \\
 & \sum_{j=1}^{M_2} w_{2,j}^{(k)} = 1, \quad (k = 1, \dots, M_1) \\
 & z_{2,j} \leq U_j, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
 & z_{2,j} + y_j^- - y_j^+ = x_j, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
 & \sum_{j=1}^{M_2} (y_j^- + y_j^+) \leq V \\
 & w_{1,k}, d_{1,k}^-, d_{1,k}^+, d_2^{(k)max} \geq 0, \quad (k = 1, \dots, M_1) \\
 & z_{2,j}, y_j^-, y_j^+ \geq 0, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
 & w_{2,j}^{(k)}, d_{2,j}^{(k)-}, d_{2,j}^{(k)+} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, M_2, k = 1, \dots, M_1) \\
 & d_1^{max} \geq 0
 \end{aligned}$$

B.3 代替モデル 2 : 数値例・定式化

【 PMA-2 : 数値例 】

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \alpha \cdot dev_1 + (1 - \alpha) \cdot dev_2 \\
 \text{s.t.} \quad & dev_1 = (1 - \beta_p) \cdot \left\{ \frac{1}{M_1} \sum_{k=1}^{M_1} (d_{1,k}^- + d_{1,k}^+) \right\} + \beta_p \cdot d_1^{max} \\
 & z_{1,k} + d_{1,k}^- - d_{1,k}^+ = Z_{1,k}, \quad (k = 1, \dots, M_1) \\
 & d_{1,k}^- + d_{1,k}^+ - d_1^{max} \leq 0, \quad (k = 1, \dots, M_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dev_2 &= (1 - \beta_p) \cdot \left\{ \frac{1}{M_2} \sum_{j=1}^{M_2} (s_{2,j}^- + s_{2,j}^+) \right\} + \beta_p \cdot s_2^{max} \\
z_{2,j} - \sum_{k=1}^{M_1} Y_{2,j,k} \cdot z_{1,k} + s_{2,j}^- - s_{2,j}^+ &= 0, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
s_{2,j}^- + s_{2,j}^+ - s_2^{max} &\leq 0, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
\sum_{j=1}^{M_i} z_{i,j} &= 1, \quad (i = 1, 2) \\
z_{2,j} &\leq U_j, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
z_{2,j} + y_j^- - y_j^+ &= x_j, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
\sum_{j=1}^{M_2} (y_j^- + y_j^+) &\leq V \\
z_{1,k}, d_{1,k}^-, d_{1,k}^+ &\geq 0, \quad (k = 1, \dots, M_1) \\
z_{2,j}, s_{2,j}^-, s_{2,j}^+, y_j^-, y_j^+ &\geq 0, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
d_2^{max}, s_2^{max} &\geq 0
\end{aligned}$$

B.4 代替モデル 3 : 数値例・定式化

【 PMA-3 : 数値例 】

$$\begin{aligned}
\min \quad & (1 - \beta_p) \cdot \left\{ \frac{1}{M_2} \sum_{j=1}^{M_2} (d_{2,j}^- + d_{2,j}^+) \right\} + \beta_p \cdot d_2^{max} \\
\text{s.t.} \quad & z_{2,j} + d_{2,j}^- - d_{2,j}^+ = Z_{2,j}, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
& d_{2,j}^- + d_{2,j}^+ - d_2^{max} \leq 0, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
& \sum_{j=1}^{M_2} z_{2,j} = 1 \\
& z_{2,j} \leq U_j, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
& z_{2,j} + y_j^- - y_j^+ = x_j, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
& \sum_{j=1}^{M_2} (y_j^- + y_j^+) \leq V \\
& z_{2,j}, d_{2,j}^-, d_{2,j}^+, y_j^-, y_j^+ \geq 0, \quad (j = 1, \dots, M_2) \\
& d_2^{max} \geq 0
\end{aligned}$$