ALM における数理計画法の適用とそのモデル化

枇々木　規雄
慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

MTEC Journal : 平成 7 年 9 月 30 日

要旨

本論文では, 銀行のリスク管理を行うために開発された手法である ALM に対する数理計画法の適用とそのモデル化について議論する. 銀行全体のリスク管理のために, 経営の理念や目標などを反映させせることができるような最適化手法によるモデルアプローチを行う.

そこで, まず初めに最適化手法の特徴, 数理計画法によるモデル構築の具体的手順および ALM モデルの基本的な考え方を説明する. そして, シナリオで不確実性を考慮した問題を解くために, その方法論として主に目標計画法を適用できる ALM モデルの定式化を行う. さらに, ALM モデルに対する数値実験を行い, モデルの有用性を検討する. また, 少し視点を変えて, 数理計画法が適用されているポートフォリオ選択問題に対する下方リスクモデルと ALM モデルとの関係についても議論する.

1 はじめに

ALM(Asset Liability Management : 資産負債管理) は銀行のリスク管理を行うために開発された手法である. 生保, 損保, 年金に対してもALM の考え方は適用されているが, 本論文では都市銀行などの普通銀行のALM を対象にして議論を進める. ALM のとらえ方には, 「経営理念」の側面と「技術的」側面の二つの大きな側面がある. 最近, 日本でもデリバティブを使ったALM 手法が様々な本の中で紹介されている. このようなデリバティブ商品を用いた手法はALM を実施する上で不可欠な技術であるが, ALM のとらえ方としては後者の極めて技術的な側面である. 一方, 本論文ではALM に対し, 銀行全体のリスク管理のために, 経営の理念や目標などを反映させることができるような管理手法を開発する技術的側面からのアプローチを行う. 言い換えれば, ALM を「経営理念」に直結した「技術手法」によりとらえたアプローチと考えて良い. それを行うために, 数理計画法を用いたALM に対するモデルアプローチを試みる. そこで, 本論文ではALM を以下のように定義する.

「銀行のかかえる様々な制約の範囲で金利変動リスクなどの財務リスクおよびそれらとトレードオフの関係にある利益に対し, 経営目標に沿って設定されたそれらの目標値をできるだけ達成できるように資産と負債を中長期的に管理すること」

以下, 本論文の構成を記す. 2節で最適化手法の特徴, 数理計画法によるモデル構築の具体的手順, さらに3節で定式化を行うALM モデルの基本的な考え方を説明する. 3節では, シナリオで不確実性を考慮した問題を解くために, その方法論として主に目標計画法を適用できるALM モデルの定式化を行う. 4節では, ALM モデルに対する数値実験を行い, モデルの有用性を検討する. 5節では, 数理計画法が適用されているポートフォリオ選択問題に対する下方リスクモデルとALM モデルとの関係について議論する. 6節では, 結論と今後の課題を述べる.

2 モデル化の考え方

2.1 最適化手法

最適化手法は, 最適化計算をすることによって, より良い方策を見いだす方法である. 「想定した市場環境および銀行がかかえる制約の下で, 銀行が目指す目標を達成するためにはどのような方策が必要かを見い出すことにより, 銀行のALM を支援する」手法である. この最適化手法を用いることにより, 数理計画モデルで定式化された問題を解くことができる. そのためのALM モデルを3節で示し, 数理計画法の一つである目標計画法に不確実性を考慮した方法論によって問題を解く[1].

ところで, 最適化手法とシミュレーション法との違いについて考えてみよう. 将来におけるリスクを管理するためにどうすべきかという方策を見い出すには, シミュレーション法では試行錯誤を繰り返す必要があるのに対し, 最適化手法は極めて有効な手法である. 「ある方策を行ったときにリスクはどうなるか」を計算するのがシミュレーション法, 「リスクをある範囲にするためにはど

[1] 目標計画法については, 伏見ら [1987] を参照されたい.

のような方策をすべきか」を計算するのが最適化手法だからである. シミュレーション法と最適化手法は逆のアプローチと考えて良い. ただっし, 最適化手法にもモデルを複雑にし過ぎると最適解 (方策) を計算することが難かしくなるという欠点がある. 数理計画法では実行可能領域 (制約条件) の凸性が満たされないと全域的最適解が一般的に保証されない. また, モデルが非線形の場合, ある特殊な場合を除いて一般に線形よりも計算時間がかかる. それに対して, シミュレーション法は複雑になったとしても最適化手法に比べて計算量に対する影響は少ない. したがって, リスク管理を行うためには, 最適な方策を見い出せる最適化手法の方が良いが, それにシミュレーション機能を加えた手法も有効であろう.

2.2 数理計画モデルの構築

モデルで与えられた問題を解く方法論としては, リスクと利益のトレードオフの関係をうまく表現できて, 解くことが期待できる目標計画法を利用する. 目標計画法を利用すると, 銀行の経営政策や銀行が置かれている業務環境ならびに法律上の制約の下で, これらのリスクと利益に対する銀行の目標をできるだけ達成できる最適な方策 (例えば, 預金をどのくらい集めるかとか貸出をどのくらい行うかなど) を見いだすことができる.

リスクを管理するための ALM モデルは, 次の五段階の手続きによって構築する.

(1) 銀行が達成したい状況を目標として設定する. 銀行の経営指標やリスク指標, その他目標として考えているものを決定し, その目標レベルを定める. また, その目標を達成したい順に優先順位 (プライオリティ) を設定する.

(2) 銀行に課された制約条件や方針として守るべきものを制約条件として設定する. 目標として考えていない経営指標やリスク指標の上で守らなければならない制約レベルを設定する.

(3) 市場の環境条件を制約条件として設定する. 市場の環境条件とは計画期間中に調達や運用をすることが可能な預金や貸出金, 売買可能な債券など, 銀行が取り扱っている商品の取引可能な額の範囲を想定し, 設定する上下限額などである. 制約を設定する商品は銀行の性格や規模などに依存する.

(4) 設定した目標ならびに制約レベルと現在の銀行の貸借対照表 (B/S) や, その他のデータを利用してモデルの内容を表現する.

(5) モデルで与えられた問題を目標計画法を利用して解く. 解いて求まった決定変数が示す最適方策によって, 方策実行後の貸借対照表および目標や制約に用いた指標値を求める. この段階で, もしこれらの値に満足しなければ, 目標もしくは制約 (またはそのレベル) を再検討し, 適宜変更して, 再び問題を解き直す. 満足すれば, この時点で最適方策として採択する.

ところで, ALM モデルには定式化部分とデータによるパラメータ部分がある. 定式化は, 「できるだけ経営目標を達成したい」という目的関数およびそれに伴う目標制約式と政策的・法的な制約, 市場環境条件の制約, 等価式を含むその他の制約条件式から成る. 等価式には資金の流れ (キャッシュフロー), 会計的手続き, 経営指標の計算式などがある. また, パラメータ部分には目的関数や制約条件式を記述するために用いるデータを設定する. そして, この ALM モデルを適用した問題

を解くことによって,「何 (預金, 貸出金, など) を, いつ (現在, 3 カ月後, など), どのくらい (10 億円, など) 調達・運用するか」という方策を決めることができる.

2.3 シナリオモデルとそれに用いるリスク指標

2.3.1 シナリオモデルとは

金利の変動や市場の環境条件などの不確実な金融環境をできるだけ正確に数理計画モデルによってモデル化を行おうとすると非常に複雑なモデルとして記述する必要がある (記述できない可能性もある). また, 記述できたとしても実際にはモデルで与えられた問題を解くことができないということになりやすい. そのため, 不確実な状況をできるだけ簡潔に, すなわち実際の状況とあまりかけ離れていないように, かつ実際にモデルとして役に立つようなモデルを構築しなければならない. このような問題を解決するために, 不確実な状況をいくつかの簡潔でわかりやすいシナリオとして記述し, 将来の不確実性をそれぞれのシナリオの発生確率として取り扱うことによりモデル化したのがシナリオモデルである. このシナリオモデルでは, 不確実な状況をシナリオ木として記述し, 不確実なパラメータをシナリオ毎に設定する. 以下に, シナリオモデルの一般的な特徴と欠点を挙げる.

(1) モデルの特徴

- シナリオによって様々な状況を想定し, パラメータを設定することができる.
- 確率変数 (パラメータ) 同士の関連をシナリオの中に入れることができる.
- シナリオが離散的であるため, 不確実性 (シナリオ) を考慮する前のモデルが線形ならば, 線形モデルを保つことができ, 問題を解くのが容易である.

(2) モデルの欠点

- シナリオの数だけ, 制約式や決定変数が増える.
- 様々な確率変数の合成であるため, シナリオの発生確率を正確に計測するのが難しい.

2.3.2 目標値のシナリオ依存性

目標の立て方にはシナリオ依存型と非依存型の二つが考えられる. 依存型は銀行にとって良いシナリオが生じるときには目標を高く設定すべきだが, 悪いシナリオが生じてしまう場合には, その分だけ目標を低く設定せざるを得ないという考え方に基づき, それぞれのシナリオに依存して目標値を設定する. 非依存型はどのようなシナリオが生じても (どんな状況になろうとも) 同一の目標を目指すという考え方に基づき, シナリオに依存せずにすべてのシナリオで同じ目標値を設定する. リスク管理という視点から考えれば, どのようなことが起きても対処することができる必要があるので, シナリオに依存させないで目標値を設定する方が望ましい.

2.3.3 シナリオで不確実性を考慮したALMモデル

3節で定式化するALMモデルの特徴を以下に示す.

(1) シナリオ木によって, 不確実性のもとで意思決定が可能なモデルである.

(2) 利益, リスクの多目標を取り扱い, そのトレードオフの関係を表現したモデルである.

(3) シナリオ毎の利益のうち, 最も小さい利益の大きさ (MPS : Minimum Profit among the Scenarios) をリスク指標とするモデルである[2].

2.3.4 MAX–MPSモデル

最低でも得られる利益はできるだけ大きくした方がリスクを減らすことができるだろうと考え,「どのシナリオが生じようと得られる利益の最低額」を示すリスク指標MPSによるモデル化を行う. シナリオ s の利益を $RT^{(s)}$ とすると, MPSは(1)式で表すことができる.

$$\mathrm{MPS} = \min_{(s)} \; RT^{(s)} \tag{1}$$

したがって, リスクを減らすためにMPSを最大化するモデル (MAX–MPSモデル) は (2)〜(4)式で表すことができる.

$$\mathbf{max} \quad RT^{min} \; (= \mathrm{MPS} \;) \tag{2}$$

$$\mathbf{s.t.} \quad RT^{(s)} - RT^{min} \geq 0 \tag{3}$$

$$E\left[RT^{(s)}\right] \geq EPG \tag{4}$$

ここで, $E\left[RT^{(s)}\right]$ は利益の期待値, EPG は要求する期待利益を表す. (4)式の期待利益制約を目標制約式として書き直すと, (6)式になり, その目的関数は(5)式で示すことができる[3].

$$\mathbf{min} \quad d_P^- \tag{5}$$

$$\mathbf{s.t.} \quad E\left[RT^{(s)}\right] + d_P^- - d_P^+ = EPG \tag{6}$$

3節のALMモデルでは, MAX–MPSモデルをベースにして, 期待利益とリスク (MPS) の2つを目標にした定式化を行う.

[2]シナリオ毎の利益を用いたリスク指標としては, Brodt[1978] のMAD(平均絶対偏差)がある. しかし, MADに比べてMPSの方が良い指標であると考えられるので, MPSを用いる (枇々木[1993]) .

[3](4)式は制約式であるために, モデルで与えられた問題が実行不可能になる可能性があるが, (5), (6)式ではそのような問題は生じない.

3　ALM モデルの定式化

シナリオによって不確実性を考慮しつつ, 銀行が目指す目標を達成できるモデル化を試みる. 銀行には様々な目標や制約を考慮しなければならないが, モデルの本質的な部分に限定したモデル化として 2 種類の目標と 4 種類の制約を設定する. したがって, 実用にあたっては個々の銀行に固有の付随的条件の付加や項目のより詳細化など, 必要に応じて追加および修正を加えることになろう. まず, 定式化の中で用いる主な記号を 3.1節で示す. その他の記号は定式化の中で随時説明する.

3.1　記号の説明

3.1.1　添字およびパラメータの設定

(1) 添字

t: 「t 期以内の」という基準期間 [4] を表す. 基準期間数は T_t で示す $(t = 1, \ldots, T_t)$.

k: 「k 期における」という計画期間およびシナリオ設定期間を表す. 計画期間数は $T_k + 1$ $(k = 0, \ldots, T_k)$, シナリオ設定期間は $T_k + 1$ 以上として示す.

$\bullet$: 変数の説明が煩雑になるのを避けるための記号である. 定式化の中では, この部分に添字が付くことになる.

s: シナリオ s を表す. シナリオは計画期間 k や基準期間 t に依存するが, 煩雑になるのを避けるために省略する.

(2) パラメータ

$p^{(s)}$: シナリオ s の発生確率

L_k : k期に生じるシナリオの数

$S_\bullet$: 目標制約式における満足レベルの値

$\lambda_\bullet$: 目標制約式における必要レベルと満足レベルの値の差

$w_\bullet^+$, $w_\bullet^-$: 目的関数におけるウェイトの値

P : 絶対順位係数

$JI_\bullet^{(s)}$: 制約式の上限値または下限値

3.1.2　変数の設定

モデルの定式化の中で用いられる変数は, 次の 3 種類である.

(1) 決定変数：$\boldsymbol{x}_k^s$

最適な方策を表す変数で, k 期 $(k = 0, \ldots, T_k)$ における調達 (運用) 額の増加額, 減少額を表す.

(2) 差異変数：$d_\bullet^{-(s)}$, $d_\bullet^{+(s)}$

目標からのずれ (不足または超過) を表す変数で, 目標制約式およびそれに伴う目的関数の中で用いる.

[4] 将来の時間経過を適当な間隔に区分して設定する管理期間を基準期間と呼ぶ.

(3) 補助変数

式の意味を明らかにするために補助的な役割を果たす変数である. 決定変数を用いて記述できるので, その関数であることを示すために, '$(\boldsymbol{x}_k^s)$' を付ける.

3.2 目標の設定

リスクおよびそれとトレードオフの関係にある利益を管理することを中心に考えるために, 利益, リスクの 2 種類に関して目標を設定する.

(1) 利益に関する目標

k 期のシナリオ s における利益 $RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)$ は大きい方が望ましいが, トレードオフの関係にあるリスクに対する目標も達成したい. そこで, この程度利益を達成すれば良いという満足レベル $S_{1,k}$ と, 少なくともこれだけは達成したいという必要レベル ($S_{1,k} - \lambda_{1,k}$) を設定する. 期待利益を大きくすることを目標とし, その目標制約式を (7) 式で表す.

$$\begin{array}{ll} RT_0(\boldsymbol{x}_k^s) + \lambda_{1,0} \cdot \left(d_{1,0}^- - d_{1,0}^+\right) = S_{1,0} & ,\ (k=0) \\ E\left[RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)\right] + \lambda_{1,k} \cdot \left(d_{1,k}^- - d_{1,k}^+\right) = S_{1,k} & ,\ (k=1,\ldots,T_k+1) \end{array} \tag{7}$$

$$\text{ただし,} \quad E\left[RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)\right] = \sum_{s=1}^{L_k} p^{(s)} \cdot RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s),\ (k=1,\ldots,T_k+1) \tag{8}$$

この目標制約式に対応する目的関数は (9) 式で書くことができる.

$$\textbf{min} \quad P^{11} \cdot \left(\sum_{k=0}^{T_k+1} w_{1,k}^- \cdot d_{1,k}^-\right) - P^{12} \cdot \left(\sum_{k=0}^{T_k+1} w_{1,k}^+ \cdot d_{1,k}^+\right) \tag{9}$$

$P^{11} \gg P^{12}$ であり, P^{11} 優先順位で満足レベルまで, それ以上は P^{12} 優先順位で期待利益を大きくすることを示す. また, 利益に関する目標は (13) 式のようにシナリオ毎に利益を設定しても良い[5] .

[5] シナリオ毎の利益を目標とする場合と期待利益を目標とする場合の違いについて考察する. (9) 式の P^{11}優先順位の k期の目的関数部分に, (7) 式を代入すると (10) 式になる.

$$\textbf{min} \quad d_{1,k}^- = \textbf{min} \quad \frac{1}{\lambda_{1,k}}\left(S_{1,k} - E\left[RT_k^{(s)}(x_k^s)\right]\right) + d_{1,k}^+ \tag{10}$$

各シナリオ毎に利益を目標として設定する場合の目的関数は (11) 式の左辺で表すことができ, (13) 式を代入すると (11) 式の右辺になる.

$$\textbf{min} \quad \sum_{s=1}^{L_k} p^{(s)} \cdot d_{1,k}^{-(s)} = \textbf{min} \quad \frac{1}{\lambda_{1,k}}\left(S_{1,k} - E\left[RT_k^{(s)}(x_k^s)\right]\right) + \sum_{s=1}^{L_k} p^{(s)} \cdot d_{1,k}^{+(s)} \tag{11}$$

これら二つの場合が同じ結果になる条件は (10) 式と (11) 式が同じ値を持つことで, (12) 式の条件が成り立つことである.

$$\sum_{s=1}^{L_k} p^{(s)} \cdot d_{1,k}^{+(s)} = d_{1,k}^+ \tag{12}$$

これはすべてのシナリオにおいて $d_{1,k}^{+(s)} = 0$, すなわち $RT_k^{(s)}(x_k^s) \le S_{1,k}$ が成り立てば良い.

$$RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s) + \lambda_{1,k} \cdot \left(d_{1,k}^{-(s)} - d_{1,k}^{+(s)}\right) = S_{1,k} \ \ , \ (k = 0, \ldots, T_k + 1, \ s = 1, \ldots, L_k) \tag{13}$$

(2) **利益の変動リスク** (MPS) **に関する目標**

どのようなシナリオが生じてもできるだけ利益を大きくすることがリスクを小さくすると考え, 2.3.4**節で示した** MPS **をリスク指標として用いる**. **それを目指すための制約式を** (14) **式に示す**. RT_k^{min} **が** k **期における** MPS **を表す**.

$$RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s) - RT_k^{min} \geq 0, \quad (k = 1, \ldots, T_k + 1, \ s = 1, \ldots, L_k) \tag{14}$$

この制約式を用いて MPS **を大きくすることを目指すための目的関数を** (15) **式に示す**.

$$\textbf{max} \quad P^{21} \cdot \left(\sum_{k=1}^{T_k+1} w_{2,k} \cdot RT_k^{min}\right) \tag{15}$$

ところで, 利益およびリスクに関する目標制約式は, (16)〜(18) **式で表す目標計画法** (**目標ベクトル法**) **のオープン** L **字型モデルとして記述することができる**. **ただし**, **定式化が煩雑になるのを避けるために**, **期間** k **のみを記す**. **また**, θ **は効用関数の開き具合** (**不達成度** $d_{1,k}^{-(s)}$ **の期待値と最大不達成度** $d_{1,k}^{-(max)}$ **の結合の割合**) **を操作するパラメータを表す**.

$$\textbf{min} \quad \theta \cdot \sum_{s=1}^{L_k} p^{(s)} \cdot d_{1,k}^{-(s)} + (1-\theta) \cdot d_{1,k}^{-(max)} \tag{16}$$

$$\textbf{s.t.} \quad RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s) + \lambda_{1,k} \cdot \left(d_{1,k}^{-(s)} - d_{1,k}^{+(s)}\right) = S_{1,k} \tag{17}$$

$$d_{1,k}^{-(s)} - d_{1,k}^{-(max)} \leq 0 \quad \left(d_{1,k}^{-(max)} = \max_{(s)} \ d_{1,k}^{-(s)}\right) \tag{18}$$

次に, $RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s) \leq S_{1,k}$ **の条件の下では**, (9) **式第** 1 **項と** (15) **式の** k**期の目的関数部分で** (22) **式のように加重和をとれば**, **オープン** L **字型モデルとして書くことができる**[6] .

$$\textbf{min} \quad \theta \cdot d_{1,k}^{-} - (1-\theta) \cdot RT_k^{min}/\lambda_{1,k} \tag{22}$$

[6] $RT_k^{(s)}(x_k^s) \leq S_{1,k}$ **の条件の下では**, (10) **式と** (11) **式より**, (19) **式が成り立つ**.

$$\textbf{min} \quad \sum_{s=1}^{L_k} p^{(s)} \cdot d_{1,k}^{-(s)} = \textbf{min} \quad d_{1,k}^{-} \tag{19}$$

また, (14) **式に** (17) **式を代入すると**, $d_{1,k}^{+(s)} = 0$ **より**, (20) **式になる**.

$$d_{1,k}^{-(s)} - (S_{1,k} - RT_k^{min})/\lambda_{1,k} \leq 0 \tag{20}$$

(18) **式**, (20) **式および** (16) **式より**, (21) **式が成り立つ**.

$$\textbf{min} \quad d_{1,k}^{-(max)} \ = \ \textbf{max} \quad RT_k^{min}/\lambda_{1,k} \tag{21}$$

逆に言えば, このモデルは利益目標のオープン L 字型モデルを変形して, 利益とリスクの目標を持つ形として表現していることが分かる. このオープン L 字型モデルと下方リスクモデルの関係については, 5節で議論する.

3.3 銀行に課された制約条件

制約条件として, 流動性リスク, 自己資本比率 (信用リスク), 預金準備率 (現金 / 預金額), 市場環境制約の 4 種類を設定する. 市場環境制約を除く 3 つの指標は目標と考えることもできるが, 流動性リスクは制約が守られないと経営に重大な影響を及ぼす可能性があること, 自己資本比率は BIS 基準による法的な規制であること, また預金準備率は法的規制と同時に経営上, 現金の保有高をある程度の水準以上に持つ必要があるので, いずれも制約条件として扱う. その他にも銀行には様々な制約条件が考えられるが, ここでは環境制約も含む主要な 4 種類にしぼることにする.

(1) 流動性リスクに関する制約

流動性リスクを入ってくる資金から出ていく資金を引いた累積ギャップ $CG_{k,t}^{(s)}$ と, 流動性不足が生じたときに手当できる資金量 $MF_{k,t}^{(s)}$ の関数として表した尺度 $LG_{k,t}^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)$ により管理する. k 期における t 期以内の流動性リスク指標 $LG_{k,t}^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)$ は, 制約値 $JI_{1,k,t}^{(s)}$ よりも小さくしなければならないので, 流動性リスク制約式は (23) 式になる.

$$LG_{k,t}^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s) = -\frac{CG_{k,t}^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)}{MF_{k,t}^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)} \leq JI_{1,k,t}^{(s)}, \quad (k=0,\ldots,T_k,\ t=1,\ldots,T_t,\ s=1,\ldots,L_{k+t}) \tag{23}$$

(2) 自己資本比率に関する制約 (信用リスクに関する制約)

BIS 基準に用いられる自己資本比率 (リスクアセットレシオ) $CR_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)$ は, 自己資本額 $NP_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)$ とリスクアセット $RA_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)$ で求められる[7]. BIS 基準値 (8%) または銀行が政策的に定めた値 $JI_{2,k}^{(s)}$ 以上でなければならないので, それを示す制約式は (24) 式になる.

$$CR_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s) = \frac{NP_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)}{RA_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)} \geq JI_{2,k}^{(s)}, \quad (k=0,\ldots,T_k+1,\ s=1,\ldots,L_k) \tag{24}$$

また, BIS 基準には基本項目を越えて補完的項目は算入できないというルールがある. そこで, 基本項目はリスクアセットのうち, BIS 基準比率の半分 (4%) または, 銀行が政策上定めた値 $JI_{2,k}^{\prime(s)}$ 以上は持たなければならない. この制約式は, (25) 式で表すことができる.

$$\frac{NP_k^{C(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)}{RA_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)} \geq JI_{2,k}^{\prime(s)}, \quad (k=0,\ldots,T_k+1,\ s=1,\ldots,L_k) \tag{25}$$

(3) 預金準備率 (現金 / 預金額) に関する制約

預金準備率 $DR_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)$ に関しても自己資本比率と同様に, 制約値 $JI_{3,k}^{(s)}$ よりも大きくなければならないので, それを示す制約式は (26) 式になる.

[7] 本論文で取り扱う BIS 基準は, 信用リスクを管理するための 1 次規制 (1993 年施行) である. 市場リスクを含む場合でも, 同様にモデルの中に取り込むことができる.

$$DR_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s) = \frac{CS_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)}{DP_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)} \geq JI_{3,k}^{(s)}, \quad (k = 0, \ldots, T_k + 1,\ s = 1, \ldots, L_k) \tag{26}$$

ここで, $CS_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)$ は現金額, $DP_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s)$ は預金額を表す.

(4) 市場の環境制約条件の設定

市場の環境条件として, 調達や運用が可能な期中取引の範囲を上下限額制約として設定する.

3.4 目的関数の設定

(9) 式の利益に対する目的関数と (15) 式のリスクに対する目的関数を合わせて, 目的関数を設定する. 4節で行う数値実験では, (27) 式のように設定する.

$$\min \quad P_1 \cdot \left(\sum_{k=0}^{T_k+1} w_{1,k}^- \cdot d_{1,k}^- - \sum_{k=1}^{T_k+1} w_{2,k} \cdot RT_k^{min} \right) - P_2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{T_k+1} w_{1,k}^+ \cdot d_{1,k}^+ \right) \tag{27}$$

ただし, $P_1 \gg P_2$, $w_1^- = w_1^+ = 1$, $w_{2,k} = \dfrac{1}{\lambda_{1,k}}$

4 数値実験によるモデルの分析

シナリオで不確実性を考慮した ALM モデルの分析を数値実験によって行う. 数値実験は次の前提の下で行う.

(1) 取り扱う通貨は円のみとする. 決定変数として取り扱う勘定科目は短期貸付金 (3 カ月, 6 カ月, 1 年), 長期貸付金 (5 年) の資産 4 科目, 流動性預金, 定期預金 (6 カ月, 1 年), MMC(3 カ月, 6 カ月, 1 年) の負債 6 科目とする.

(2) 管理する期間は, 2 計画期間 (現在, 3 カ月後), 2 シナリオ設定期間 (3 カ月後, 6 カ月後) とする. 図 1のように, 3 カ月後には 3 シナリオ, 6 カ月後には 3 カ月後からそれぞれ 2 シナリオずつの計 6 シナリオを持つものとして問題を設定する.

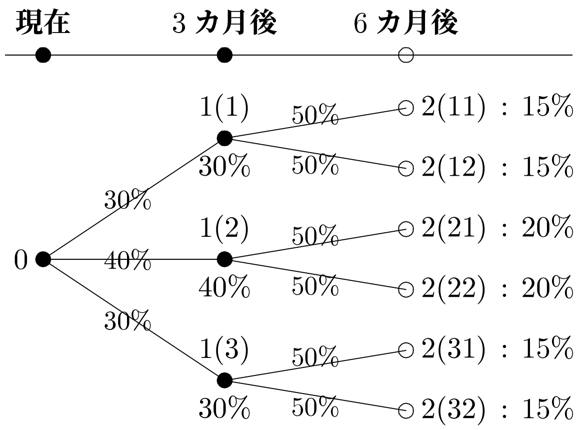

図 1 : 2 計画期間, 2 シナリオ設定期間のシナリオ木

数値実験として, 二つの分析を行う.

(分析 1) 利益に対する目標値が異なるケースの比較

(分析 2) 自己資本比率に対する制約値が異なるケースの比較

4.1 分析 1 : 利益に対する目標値が異なるケースの比較

(1) 目標値の設定

利益に対する目標値が異なる 7 ケースを行う. 現在, 3 カ月後, 6 カ月後の利益に共通な目標値を表 1に示す. かっこなしは満足レベル, かっこ内の値は必要レベルを表す.

表 1 : 利益に対する目標値が異なるケースの比較 : 目標値

(単位 : 百億円)

MN1-1	MN1-2	MN1-3	MN1-4	MN1-5	MN1-6	MN1-7
70.00	75.00	76.00	77.00	78.00	79.00	80.00
(50.00)	(55.00)	(56.00)	(57.00)	(58.00)	(59.00)	(60.00)

(2) 結果および考察

利益の期待値および MPS(リスク) の期待値を図 2に示す.

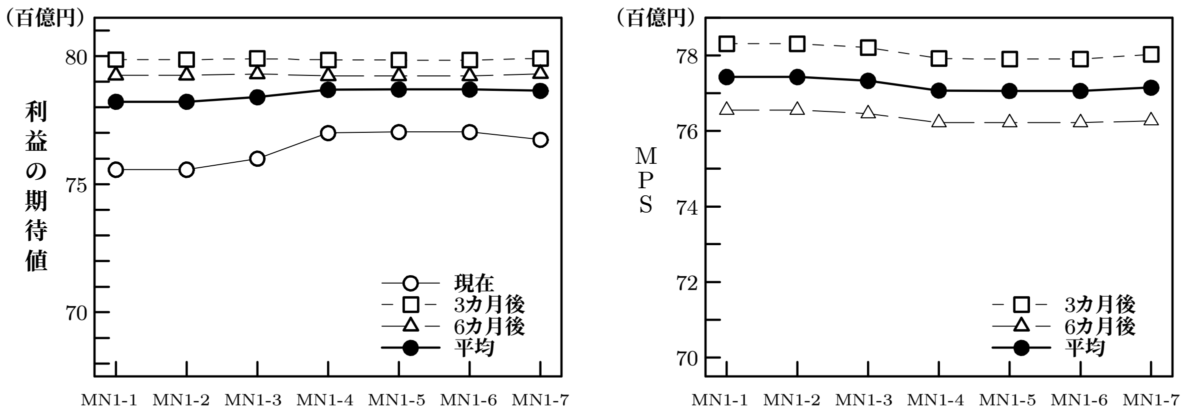

図 2：利益の目標値が異なるケースの比較

各ケースのリスク (MPS) も利益もあまり大きな変化はない．しかし，利益が大きくなれば，MPS も小さく (つまり，リスクも大きく) なっている．したがって，利益とリスクのトレードオフの関係を示すことができる．ここでリスク指標として用いるのは各シナリオの利益の中で最低の値 (MPS) であり，その値自体も利益 (の期待値) に影響を及ぼすことになり，このような規模の小さい数値実験では各ケースであまり大きな変化が表れなかったと考えられる．利益が大きくなれば MPS も小さくなるという関係が保たれているので，MPS はリスク指標としては問題ないであろう．

4.2　分析 2：自己資本比率に対する制約値が異なるケースの比較

(1) 制約値の設定

自己資本比率に対する制約値が異なる 5 ケースを行う．その制約値を表 2に示す．

表 2：自己資本比率に対する制約値が異なるケースの比較：制約値

		MN2-1	MN2-2	MN2-3	MN2-4	MN2-5
現在		8.00%	8.25%	8.50%	8.75%	8.95%
3 カ月後	シナリオ 1	8.00%	8.60%	9.20%	9.80%	10.30%
	シナリオ 2	8.00%	8.35%	8.70%	9.05%	8.30%
	シナリオ 3	8.00%	8.05%	8.15%	8.25%	8.35%
6 カ月後	シナリオ 11	8.00%	8.70%	9.40%	10.10%	10.90%
	シナリオ 12	8.00%	8.60%	9.20%	9.80%	10.55%
	シナリオ 21	8.00%	8.50%	9.00%	9.50%	9.90%
	シナリオ 22	8.00%	8.40%	8.80%	9.20%	9.50%
	シナリオ 31	8.00%	8.20%	8.40%	8.60%	8.80%
	シナリオ 32	8.00%	8.10%	8.20%	8.30%	8.40%

(2) 結果および考察

利益の期待値および自己資本比率の期待値を図3に示す.

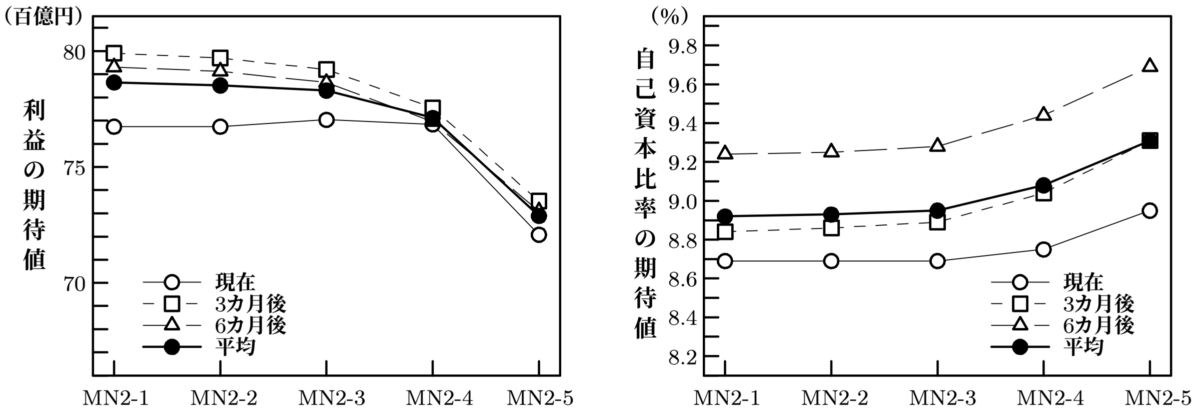

図3：自己資本比率の制約値が異なるケースの比較

自己資本比率の制約値を大きくしていく (制約をきつくしていく) と, その影響で利益の達成値は徐々に下がっていく. 特にケース MN2-4 からケース MN2-5 にかけて利益の達成値が大きく下がっている. ケース MN2-5 の制約値として, 現状のまま何の方策もしない場合に求められる値 (以降, 現状値) に近い値を設定しているためである. 自己資本比率の制約によって銀行の行動が制限され, 利益が他のケースに比べて下がり, ケース MN2-5 の利益の値は現状値に近い値が解として得られる. 自己資本比率の制約値が現状値に近いほど, 制約として効いてしまうので, その影響は大きくなる.

5 下方リスクモデルとの関係

ここで, 少し視点を変えて, 3節で示した数理計画 (ALM) モデルとポートフォリオ選択問題に対する数理計画法を用いた最適化モデルの関連について考察する.

5.1 下方リスクモデル

ポートフォリオ選択問題に対する数理計画モデルによる最初のアプローチは Markowitz による平均・分散 (Mean–Variance：MV) モデルである. MV モデルでは分散（または標準偏差）をリスク指標と考え, 定式化されている. 一方, 目標収益率に対する不足分をリスクと考える下方リスクモデルとして, Bawa and Lindenberg[1977] は, 平均・下方部分積率モデル (Mean–Lower Partial Moment Model：MLPM モデル) を提唱している. 目標収益率 (フロアー) r_G が与えられたとき, 収益率として離散データを用いるとすると, (28) 式に示す m 次の下方部分積率 $LPM_m(r_G)$ をリスクとして定義している. ここで, 離散データを表す時点または状態を $t\,(t = 1, \ldots, T\ :\ T$ はその数) で示す. また, r_t は時点 (または状態) t におけるポートフォリオの収益率を表す.

$$LPM_m(r_G) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\max(r_G - r_t, 0))^m \tag{28}$$

MLPM モデルは, 投資家が要求する最小の期待収益率 r_E のもとでリスク $LPM_m(r_G)$ を最小化する問題として定式化される. $m=1$ のときは線形計画問題, $m=2$ のときは 2 次計画問題として解くことができるが, $m \geq 3$ になると, m 次の非線形計画問題となり, 解くことが難しくなる. そこで, 枇々木 [1995] は非線形計画モデルである MLPM モデルを代替する線形計画モデルとして, 平均・オープン L 偏差モデル (Mean–Open-L Deviation model : MOLD モデル) を提案している. MOLD モデルでは, (29) 式に示すように, LPM_1 の比率を $(1-\alpha_m)$, LPM_∞ の比率を α_m として組み合わせた値 $OLD_\alpha(r_G)$ をリスクとして定義する.

$$
\begin{aligned}
OLD_\alpha(r_G) \;=\; & (1-\alpha_m)\cdot\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\max(r_G - r_t, 0)\right\} \\
& + \alpha_m \cdot \max_t \{\max(r_G - r_t, 0)\ ;\ t=1,\ldots,T\} \qquad (29)
\end{aligned}
$$

係数 α_m の大きさにより, リスク回避の選好を表すことになる[8] .

MOLD モデルは次の線形計画問題として定式化できる.

$$\textbf{min} \quad OLD_\alpha = (1-\alpha_m)\cdot\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_t^-\right) + \alpha_m \cdot d \qquad (31)$$

$$\textbf{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n}(r_{j,t} - r_G)\cdot x_j + d_t^- \geq 0, \quad (t=1,\ldots,T) \qquad (32)$$

$$d_t^- - d \leq 0, \quad (t=1,\ldots,T) \qquad (33)$$

$$\sum_{j=1}^{n} R_j \cdot x_j \geq r_E \qquad (34)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad (35)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1,\ldots,n) \qquad (36)$$

$$d_t^- \geq 0, \quad (t=1,\ldots,T) \qquad (37)$$

$$d \geq 0 \qquad (38)$$

[8] $\alpha_m = 0$ ならば, $m=1$ に, $\alpha_m = 1$ ならば, $m=\infty$ に相当する. MOLD モデルでは係数 α によって, MLPM モデルでは次数 m によってリスク回避の選好を表す. 係数 α と次数 m の代替関係については (30) 式でモデル化されている.

$$\alpha(m,T) \;=\; \frac{1}{T-1}\cdot\left(\frac{T}{\sqrt[m]{T}} - 1\right) \qquad (30)$$

ところで, 枇々木 [1995] では MOLD モデルの係数の記号には λ, MLPM モデルの次数の記号には k を用いているが, ALM モデルの記号と重複を避けるために, それぞれ α と m を用いる.

ここで, n は投資対象の資産数, x_j は資産 j への投資比率を表す. また, $R_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{j,t}$ である. $r_t = \sum_{t=1}^{T} r_{j,t} \cdot x_j$ とすると, $d_t^- = \max(r_G - r_t, 0)$, $d = \max_t \ d_t^-$ になる.

5.2 ALM モデルと下方リスクモデルの関係

3節の ALM モデルの利益およびリスクに対する目標制約式は, (16)〜(18) 式に示すように, 目標ベクトル法のオープン L 字型モデルとして記述できると説明した. $d_{1,k}^{-(s)}$ と $d_{1,k}^{-(max)}$ を 5.1節の下方リスクモデルの表現で書き直すと, それぞれ (39), (40) 式になる.

$$d_{1,k}^{-(s)} = \frac{1}{\lambda_{1,k}} \cdot \max\left(S_{1,k} - RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s), 0\right) \tag{39}$$

$$d_{1,k}^{-(max)} = \frac{1}{\lambda_{1,k}} \cdot \max_{(s)}\left\{\max\left(S_{1,k} - RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s), 0\right); s = 1, \ldots, L_k\right\} \tag{40}$$

簡単のために, $p^{(s)} = \frac{1}{L_k}$ とすると, (16) 式は次の (41) 式に書き直すことができる.

$$\begin{aligned}\textbf{min} \quad & \theta \cdot \frac{1}{L_k}\sum_{s=1}^{L_k} \max\left(S_{1,k} - RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s), 0\right) \\ & \qquad + (1-\theta) \cdot \max_{(s)}\left\{\max\left(S_{1,k} - RT_k^{(s)}(\boldsymbol{x}_k^s), 0\right); s = 1, \ldots, L_k\right\}\end{aligned} \tag{41}$$

(41) 式より, シナリオを考慮した ALM モデルが MOLD モデルと同じ形になることが分かる[9]. このことは, 利益の満足レベル $S_{1,k}$ とフロアー r_G とは考え方の異なる目標であるが, シナリオ ALM モデルが θ をいろいろと変えることによって下方リスクモデルと同様のリスク回避の選好を表現していると解釈することができる.

6 おわりに

本論文では, 銀行の経営理念を達成するということを念頭に置きつつ, 「リスク管理を考えながら, 資産と負債を今後どのようにすべきか」という ALM における問題を最適化手法により解決するために, 数理計画法を適用したアプローチを試みた. 資産と負債を管理するために, 実際に銀行が置かれている状況にできるだけ合うようにシナリオで不確実性を考慮し, かつ経営の意思決定に役立つような ALM モデルを構築した. モデルを用いて記述した ALM の問題に対する解法として, 多目標を取り扱うことができる数理計画法の一つである目標計画法を基本的な方法論として利用した.

そして, ALM モデルに対し, 数値実験による考察および検討を行った. 結果として, 利益とリスクのトレードオフの関係をうまく表現できるモデル化であること, また, 自己資本比率は利益に大

[9] θ を $1-\alpha$ に, L_k を T に, $S_{1,k}$ を r_G に, s を t に, $RT^{(s)}$ を r_t に直すことによって, MOLD モデルの目的関数と同じになる.

きな影響を及ぼすなどの一般的な問題状況を十分に反映させていることが確かめられた. 後者は, BIS 基準のために銀行が行う対策への重要な情報になり得るだろう.

本論文で示したモデルはプロトタイプであり, かつ数値実験で用いた例も小さいものである. しかし, モデル化にあたっては, 問題にかかわる本質的な要因を含めており, モデルの定式化やその特徴および数値実験より得られた結果から, これらのモデルが ALM における問題を解決するのに有用なモデルであることを示唆することができた. また, 個々の銀行の具体的な条件に合わせて, モデルにそれらの条件を追加および修正を行うことにより, 実務へも十分に対応できるだろう.

最後に, 今後の課題として, 5節で議論した数理計画 (ALM) モデルとポートフォリオ選択問題に対する下方リスクモデルの関連については, さらに研究を進める必要がある. そのことで, ALM モデルの実務への適用にさらに役立つことが期待できると考えている.

参考文献

[1] V.S.Bawa and E.B.Lindenberg : Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework, Journal of Financial Economics, Vol.5(1977), pp.189–200.

[2] A.I.Brodt : A Dynamic Balance Sheet Management Model for A Canadian Chartered Bank, Journal of Banking and Finance, Vol.2(1978), pp.221–241.

[3] 伏見多美雄, 福川忠昭, 山口俊和 : 経営の多目標計画, 森北出版, 1987.

[4] 枇々木規雄, 福川忠昭 : ALM(資産負債管理) の考え方に基づく銀行のリスク管理へのモデル・アプローチ, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.35, No.4(December 1992), pp.319–343.

[5] 枇々木規雄, 福川忠昭 : 多期間 ALM モデルによる銀行のリスク管理, 管理会計学, Vol.2, No.1(1993), pp.3–22.

[6] 枇々木規雄, 福川忠昭 : シナリオで不確実性を考慮した ALM モデルによる銀行のリスク管理, 慶應義塾大学 理工学部 管理工学科 テクニカルレポート, No.93016(1993).

[7] 枇々木規雄, 福川忠昭 : MIN–MAD モデルと MAX–MPS モデルの比較 — シナリオ ALM モデルに用いるリスク指標についての考察 —, 慶應義塾大学 理工学部 管理工学科 テクニカルレポート, No.93017(1993).

[8] 枇々木規雄 : 財務リスクを管理するための ALM モデル — 銀行の ALM(資産負債管理) に対する数理計画法を用いたモデル・アプローチ —, 慶應義塾大学理工学部管理工学科 博士論文, 1994.

[9] 枇々木規雄 : 下方リスクを考慮したポートフォリオ最適化モデル, 日本 OR 学会・「ファイナンスの OR」研究部会 (1995 年 9 月 30 日).

[10] 日本証券経済研究所 編：「リスクマネジメントハンドブック」, 第一法規, 1988.

[11] 日本証券経済研究所：「財務リスク・マネジメント —ALM の理論と実務—」, 日本証券経済研究所, 1992.

[12] 日本ユニシス監修, Bill Williams, 静岡銀行 ALM 研究会訳, 上田悦久, 日本ユニシス金融マーケティング研究会：「実践的 ALM：リスク測定法と ALM の導入から運用まで」, 近代セールス社, 1989.

枇々木 規雄
慶應義塾大学 理工学部 管理工学科
〒 223 横浜市港北区日吉 3-14-1
TEL 045-563-1141 ext.3628, FAX 045-563-5979
E-mail hibiki@ae.keio.ac.jp