Value at Risk 評価のための
モンテカルロ・シミュレーションの適用

枇々木　規雄

Technical Report　No.98003

19 , X , 1998

〒223-8522 **横浜市港北区日吉** 3-14-1

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

TEL 045-563-1141 ext.3628

FAX 045-563-5979

E-mail hibiki@ae.keio.ac.jp

1 はじめに

多種の金融資産のリスク量を計測するために、VaR(Value at Risk) が用いられている。VaR とは、「意思決定者によって決定されたある特定の確率水準 (信頼区間) のもとで、ある特定の期間に生じると予想される損失金額の最大額」のことである。例えば、99% の信頼区間であれば、99% の確率で、VaR の示す損失金額よりも小さい損失で済むことを表す。近年、VaR は標準的な銀行の市場リスク管理のための尺度として認識されつつある。なぜならば、BIS 二次規制 (市場リスク規制) [1] の中で、内部モデルを利用してリスク評価を行う場合の定量的基準として、VaR を提唱しているからである。VaR は現在のポジションに対する将来の損失金額を指標化したものであり、債券、為替などの市場取引のリスク評価を中心に使うことが可能である。

その VaR を評価するための一つの方法にモンテカルロ・シミュレーション法がある [2] 。各資産の変動は正規分布に従うと仮定することが多く、多資産のリスク評価をモンテカルロ・シミュレーションで行うためには、多次元の正規乱数を生成する必要がある。各金融資産には相関があり、その相関を持つような多次元正規乱数は、独立な多次元正規乱数に相関係数行列をコレスキー分解した行列 (下三角行列) をかけることによって生成することができる [3] 。

独立な n 次元標準正規乱数を $X = (X_1, \ldots, X_n)$, X_i は第 i 番目の正規乱数列, C を相関係数行列とする。C をコレスキー分解すると、(1) 式に示す下三角行列 A を得ることができる。

$$C = AA^T \tag{1}$$

$X^T X = I$ より (I は単位行列)、(1) 式は (2) 式に書き直すことができる。

$$C = AX^T XA^T = \left(XA^T\right)^T \left(XA^T\right) \tag{2}$$

したがって、相関係数行列 C を持つ n 次元標準正規乱数 Y は (3) 式で生成することができる。

$$Y = XA^T \tag{3}$$

独立な n 次元標準正規乱数 X をうまく生成することができれば、相関を持つ標準正規乱数 Y をうまく生成することができる。

ところが、実際に計算機を使って多次元標準正規乱数系列を作る場合、各乱数の期待値 が 0、分散が 1 で、独立な (相関のない) 乱数を作れるとは限らず、それゆえ、(3) 式によって生成される乱数の相関の精度も良くない可能性が高い。そのために、どのような乱数を生成し、利用するかが結果に大きな影響を与えると考えられる。具体的には、次のような 3 つの問題が考えられる。

(1) 期待値 が 0、分散が 1 になるような標準正規乱数をどのように生成するか ?

(2) 独立な (相関のない) 多次元標準正規乱数をどのように生成するか ?

(3) n 個の独立な (1 次元) 標準正規乱数が生成されたとき、相関を持つ n 次元標準正規乱数を生成するためには、相関係数行列をコレスキー分解した行列を用いる。そのとき、各変数にどの乱数系列を割り当てるのかによって、結果が変わらないのか ?

---

[1] 1996 年 1 月に、BIS のバーゼル銀行規制監督委員会が制定した「マーケットリスクを自己資本合意の対象に含めるための改定」[2] に基づく自己資本比率規制のことである。

[2] その他の代表的な方法に、(1) 分散共分散法、(2) ヒストリカル・シミュレーション法、がある。

[3] コレスキー分解の他に、(1) 固有値分解、(2) 特異値分解、によって相関を持つ多次元正規乱数を生成することが可能である。詳しくは付録 C を参照のこと。

(1) の問題に対する対処法は極めて簡単で、モーメント・マッチング (Moment Matching) 法を使えばよい。乱数を ε、その期待値を m、分散を s^2 とすると、

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon - m}{s} \tag{4}$$

とすることによって、乱数 ε' は期待値 0、分散 1 の乱数になる。また、乱数を発生させるときに、対称変量法 (負相関法) を使うことによって、歪度も修正することなく、0 にすることができる。

(2) の問題に対する対処法として、Barraquand [1] は Quadratic Resampling(QR) 法によって相関を正確にあわせる方法を示している。また、Curran [3] も同様のことを示している。Barraquand [1] は QR 法を使って、多資産の価格に依存するヨーロピアン・オプションの価格評価を行っている。また、Curran [3] は相関が 0 になるような多次元乱数を生成するための方法 [4] を示し、アジア・オプションのような経路依存型の証券の価値評価を行っている。本研究では、QR 法を VaR 計測に適用した場合の効果を確かめる。

一方、(3) の問題は取り扱う問題によっては大きな影響を及ぼす可能性がある。例えば、相関係数 ρ を持つ 2 資産から構成されるポートフォリオの VaR を計測する問題を考える。独立な標準正規乱数を X_1, X_2 とすると、相関係数 ρ を持つ 2 次元標準正規乱数 Y_1, Y_2 は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_2 &= \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2} X_2 \end{aligned}$$

2 次元標準正規乱数 Y_1, Y_2 を生成するとき、X_2 よりも X_1 の影響が大きいことが分かる [5] 。したがって、X_2 よりも X_1 の方により精度の高い乱数を用いた方がよいと考えられる。

VaR はある確率を示すパーセント点における損益を表すので、尖度 (4 次モーメント) の精度に影響を受ける。そこで、本研究では、VaR を計測する場合に、尖度が 3 に近い正規乱数系列が精度の高い乱数と考えて、尖度が 3 に近い正規乱数系列を VaR 計測に大きい影響を与える変数に割り当てていく方法を提案する (以降、KC(Kurtosis Control) 法と呼ぶ)。

以降、本論文の構成を示す。2節では、QR 法を説明する。3節では、提案する KC 法について議論する。4節では、3 資産の場合の VaR を計測し、QR 法、KC 法のその効果を確かめる。5節で結論と今後の課題を述べる。

[4] QR 法を用いて、相関行列が単位行列とした場合と同じ方法である。

[5] 2 次元の場合、影響の大きさを係数の絶対値の和とすると、X_1 は $1+|\rho|$、X_2 は $\sqrt{1-\rho^2}$ で表すことができる。

$$1+|\rho| \geq \sqrt{1-\rho^2}$$

であるので、X_1 の方が X_2 よりも影響が大きい。これは、コレスキー分解を行うことによって下三角行列ができるためであり (相関係数の値に依存するので 3 次元以上では必ずしもそうなるとは限らないが)、X_{i+1} よりも X_i の方が影響が大きくなりやすい。

2 Quadratic Resampling (QR 法)

2.1 二次元正規分布の場合

標準正規分布に従う独立な乱数を X_1, X_2 とする。すなわち、

$$E[X_1]=0, \quad V[X_1]=1$$

$$E[X_2]=0, \quad V[X_2]=1$$

$$Cov[X_1,X_2]=0$$

である。ここで、$E[x]$ は変数 x の期待値、$V[x]$ は x の分散、$Cov[x,y]$ は x と y の共分散を表す。そのとき、相関係数が ρ である二次元正規分布に従う乱数 Y_1, Y_2 は、X_1, X_2 を用いて、次のように作ることができる[6]。

$$Y_1 = X_1 \tag{5}$$

$$Y_2 = \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}X_2 \tag{6}$$

実際に計算機を使って正規乱数系列を作るときに生成する標準正規乱数系列を Z_1, Z_2 とする。説明を簡単にするため、すでにモーメント・マッチング済みで、

$$E[Z_1]=0, \quad V[Z_1]=1$$

$$E[Z_2]=0, \quad V[Z_2]=1$$

であるとする。Z_1 と Z_2 は厳密には独立な乱数ではなく、相関 (共分散) η を持つとする。ある程度、乱数の数が多くなると、η は 0 に近づく。ここで、Z_1, Z_2 を用いて、相関係数が ρ である二次元正規分布に従う乱数を作ることを考えよう。(5), (6) 式の X_1, X_2 の代わりに Z_1, Z_2 を用いると、正規乱数 Y_1', Y_2' の期待値、分散、共分散は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
E[Y_1'] &= E[Z_1]=0 \\
V[Y_1'] &= V[Z_1]=1 \\
E[Y_2'] &= E\left[\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2\right] = \rho E[Z_1] + \sqrt{1-\rho^2}E[Z_2] = 0 \\
V[Y_2'] &= V\left[\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2\right]
\end{aligned}$$

---

[6] Y_1, Y_2 はどちらも正規乱数の一次結合であるので、正規分布をし、以下のように、平均、分散、共分散を求めることができる。

$$\begin{aligned}
E[Y_1] &= E[X_1]=0 \\
V[Y_1] &= V[X_1]=1 \\
E[Y_2] &= E\left[\rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}X_2\right] = \rho E[X_1] + \sqrt{1-\rho^2}E[X_2]=0 \\
V[Y_2] &= V\left[\rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}X_2\right] \\
&= \rho^2 V[X_1] + \left(1-\rho^2\right)V[X_2] + 2\rho\sqrt{1-\rho^2}Cov[X_1,X_2]=1 \\
Cov[Y_1,Y_2] &= E\left[X_1\left(\rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}X_2\right)\right] = \rho E[X_1^2] + \sqrt{1-\rho^2}Cov[X_1,X_2] = \rho
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho^2 V[Z_1] + \left(1-\rho^2\right) V[Z_2] + 2\rho\sqrt{1-\rho^2}Cov[Z_1, Z_2] = 1 - 2\eta\rho\sqrt{1-\rho^2} \\
Cov[Y_1', Y_2'] &= E\left[Z_1\left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2\right)\right] \\
&= \rho E[Z_1^2] + \sqrt{1-\rho^2}Cov[Z_1, Z_2] = \rho + \eta\sqrt{1-\rho^2}
\end{aligned}
$$

乱数が独立でない場合、Z_2 の分散が 1 に、Z_1 と Z_2 の相関 (共分散) が ρ にならないことが分かる。もし、Z_1, Z_2 を用いて、相関係数が ρ である二次元正規分布に従う乱数 Y_1, Y_2 を作りたい場合には、(5), (6) 式の代わりに、以下に示す (7), (8) 式を用いる必要がある。

$$
Y_1 = Z_1 \tag{7}
$$

$$
Y_2 = \left(\rho - \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-\eta^2}} \cdot \eta\right) Z_1 + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-\eta^2}} Z_2 \tag{8}
$$

この場合も、Y_1, Y_2 はどちらも正規乱数の一次結合であるので、正規分布をし、以下のように、平均、分散、共分散を求めることができる。ただし、記述の煩雑さを避けるために、$\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-\eta^2}} = \alpha$ とする。

$$
\begin{aligned}
E[Y_1] &= E[Z_1] = 0 \\
V[Y_1] &= V[Z_1] = 1 \\
E[Y_2] &= E\left[(\rho - \alpha\eta)Z_1 + \alpha Z_2\right] = (\rho - \alpha\eta)E[Z_1] + \alpha E[Z_2] = 0 \\
V[Y_2] &= V\left[(\rho - \alpha\eta)Z_1 + \alpha Z_2\right] \\
&= (\rho - \alpha\eta)^2 V[Z_1] + \alpha^2 V[Z_2] + 2(\rho - \alpha\eta)\alpha Cov[Z_1, Z_2] \\
&= (\rho - \alpha\eta)\{\rho - \alpha\eta + 2\alpha\eta\} + \alpha^2 \\
&= \rho^2 - \alpha^2\eta^2 + \alpha^2 = \rho^2 + \alpha^2(1-\eta^2) \\
&= \rho^2 + \frac{1-\rho^2}{1-\eta^2}(1-\eta^2) = 1 \\
Cov[Y_1, Y_2] &= E\left[Z_1\left\{(\rho - \alpha\eta)Z_1 + \alpha Z_2\right\}\right] \\
&= (\rho - \alpha\eta)E[Z_1^2] + \alpha E[Z_1 Z_2] = \rho - \alpha\eta + \alpha\eta = \rho
\end{aligned}
$$

2.2 多次元正規分布の場合

2.1節の二次元正規分布に従う場合について示した方法を多次元に拡張する。生成した n 次元標準正規乱数 (行列) を $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$, Z_i は第 i 番目の標準正規乱数列とする。Z_i はすでにモーメント・マッチングにより、平均 0、標準偏差 1 の標準正規乱数に修正されているものとする。生成された Z には相関係数行列 D で表される相関があるとする。 D をコレスキー分解すると、(9) 式に示す下三角行列 E を得る。

$$
D = EE^T \tag{9}
$$

したがって、Z の相関係数は次のように計算できる。

$$
Z^T Z = EE^T = EX^T XE^T = \left(XE^T\right)^T \left(XE^T\right) \tag{10}
$$

相関係数行列 C を持つ n 次元標準正規乱数 Y を Z を用いて表現する。ただし、$A = BE$ で、E は正則行列とする。

$$\begin{aligned} Y^T Y &= \left(XA^T\right)^T \left(XA^T\right) = AX^T XA^T \\ &= BEX^T XE^T B^T = B\left(EX^T XE^T\right) B^T \\ &= BZ^T ZB^T = \left(ZB^T\right)^T \left(ZB^T\right) \end{aligned} \tag{11}$$

したがって、$B = AE^{-1}$ を用いて (12) 式により修正すれば、相関係数行列 C を持つ n 次元標準正規乱数 Y を生成することができる。

$$Y = ZB^T \tag{12}$$

相関係数行列を I とすると、$A = I$ となるので、修正行列 B に E^{-1} を用いることによって、独立な多次元標準正規乱数を生成することも可能である。

3 Kurtosis Control (KC 法)

VaR はある確率を示すパーセント点における損益を表すので、尖度 (4 次モーメント) の精度に影響を受ける。VaR を計測する場合に、尖度が 3 に近い正規乱数系列の方が、より正確に VaR を計測できると考えられる。相関係数行列をコレスキー分解によって生成した下三角行列によって線形変換した乱数系列の尖度ができるだけ 3 に近い値をとる方が良いのだが、線形変換された乱数の尖度はもとの乱数の尖度と線形関係にはない。しかし、ある乱数の組み合わせ比率を大きくすると、その乱数の尖度に近づきやすいといったある程度の関係があると思われるので、尖度が 3 に近い乱数系列を VaR 計測に大きな影響を与える変数に割り当てる方が良い結果になる可能性が高い。そこで、4節で取りあげる具体例を通して、その方法を説明する。相関係数行列を (13) 式のように設定する。

$$C = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.1446 & 0.7594 \\ 0.1446 & 1.0000 & 0.3269 \\ 0.7594 & 0.3269 & 1.0000 \end{bmatrix} \tag{13}$$

行列 C をコレスキー分解すると、(14) 式に示す行列 A が求められる。

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.1446 & 0.9895 & 0.0000 \\ 0.7594 & 0.2194 & 0.6125 \end{bmatrix} \text{, ただし、} C = AA^T \tag{14}$$

極めて簡便な方法として、行列 A の各列の値の絶対値の和をとることによって、値の大きい順に尖度が 3 に近い乱数を割り当てることを考える。この例では、$(1.9040, 1.2089, 0.6125)$ となる。そこで、生成した 3 次元正規乱数を尖度の精度の高い順 (3 に近い順番) に並び替えて、それぞれ Z_1, Z_2, Z_3 と設定することによって、相関を持つより良い乱数が作れると思われる。

4 Value at Risk 計測への適用

4.1 取り扱う問題と実験手順

株式、債券、CB の3資産のポートフォリオの Value at Risk を計測する。各資産はインデックスに投資していると考える。各資産は表1に示す平均、標準偏差、相関係数を持つと考える [7] 。

表 1 : 平均 $\overline{R}_i$、標準偏差 σ_i、相関係数 ρ_{ij}

	株式	債券	CB
$\overline{R}_i$	0.8108%	0.6239%	0.7708%
σ_i	5.5602%	1.3627%	3.5121%

ρ_{ij}	株式	債券	CB
株式	1.0000	0.1446	0.7594
債券	0.1446	1.0000	0.3269
CB	0.7594	0.3269	1.0000

各資産の収益率はすべて正規分布に従うと仮定し、表2に示す2種類のポートフォリオの Value at Risk を計測する。ここでは、1%点、5%点、10%点を計測する。

表 2 : ポートフォリオの構成

	株式	債券	CB
ポートフォリオ 1	40%	40%	20%
ポートフォリオ 2	30%	35%	35%

ポートフォリオの収益率は正規分布に従うので、各ポートフォリオの平均、標準偏差、ならびに Value at Risk に相当するパーセント点の理論値は表3のように求めることができる。

表 3 : 平均、標準偏差、パーセント点の理論値

	平均	標準偏差	パーセント点		
			1%	5%	10%
ポートフォリオ 1	0.7280%	2.9514%	−6.1418%	−4.1255%	−3.0501%
ポートフォリオ 2	0.7314%	2.8720%	−5.9537%	−3.9916%	−2.9452%

一方、本数値実験におけるモンテカルロ・シミュレーションによって、Value at Risk を計測する手順は次のように行う。シミュレーションは、S 言語を使って行った [8] 。

(手順 1) 3次元標準正規乱数を n 個生成する。対称変量法によって精度を上げるため、乱数 $n/2$ 個と、その負符号をつけたものを加えた n 個の乱数を生成する。このことにより、平均 (1次モーメント)、歪度 (3次モーメント) がともに 0 になる。さらに、(4) 式を用いて、2次モーメントのマッチングを行う。

(手順 2) 表1に示す平均、標準偏差、相関を持つような乱数に変換し、各資産の収益率を計算する。ここで、QR 法と KC 法の適用の有無によって4種類に加えて、比較のために (乱数

[7] 1980年1月〜1996年12月 (17年間) の日興株式パフォーマンスインデックス (SPI), 日興債券パフォーマンスインデックス (BPI), 日興CBパフォーマンスインデックス (CBPI) の各月次収益率をもとに計算した。

[8] 具体的なプログラムを付録C.3に示す。

の順番の重要性を認識するために) 精度の悪い順序に適用する (順序が逆) か否かの 2 種類も行う。したがって、計 6 種類のケースを行う。

		KC法		
		適用する	適用しない	順序が逆
QR法	適用する	QR–KC	QR–nKC	QR–rKC
	適用しない	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC

(手順 3) ポートフォリオの収益率を計算する。

(手順 4) VaR 計測に対する QR 法と KC 法の効果を調べるために、各ポートフォリオについて、手順 1 〜 手順 3 を 1,000 回繰り返し、理論値と比較する。

乱数の数が 1,000 個 (ケース 1) と 10,000 個 (ケース 2) の 2 種類のケースをそれぞれ 2 回行い、その結果を示す。

4.2 結果および考察

乱数 1,000 個 (ケース 1) と 10,000 個 (ケース 2) を使ったシミュレーションをそれぞれ 1,000 回行ったときの各ポートフォリオの収益率の各統計量 (標準偏差、尖度、最小値、最大値、1%点, 5%点, 10%点) の標準偏差を表 4(ケース 1)、表 5(ケース 2) に示す [9]。ここでは、紙面の都合上、2 回のうち、1 回目だけの結果を示す。

表 4：収益率の各統計量の標準偏差 (ケース 1)

ポートフォリオ 1

	QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
標準偏差	0.0000	0.0000	0.0000	0.0348	0.0355	0.0347
尖度	0.1368	0.2209	0.2966	0.1368	0.2209	0.2965
最小値	0.8054	1.0267	1.2248	0.8195	1.0403	1.2364
最大値	0.8054	1.0267	1.2248	0.8195	1.0403	1.2364
1%点	0.2418	0.2723	0.3126	0.2575	0.2864	0.3288
5%点	0.1149	0.1104	0.1142	0.1255	0.1228	0.1291
10%点	0.0827	0.0911	0.0997	0.0948	0.0999	0.1077

ポートフォリオ 2

	QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
標準偏差	0.0000	0.0000	0.0000	0.0443	0.0450	0.0441
尖度	0.1568	0.2248	0.2804	0.1569	0.2246	0.2803
最小値	0.8112	0.9959	1.1477	0.8342	1.0188	1.1662
最大値	0.8112	0.9959	1.1477	0.8342	1.0188	1.1662
1%点	0.2453	0.2691	0.2959	0.2692	0.2904	0.3193
5%点	0.1165	0.1122	0.1134	0.1338	0.1330	0.1366
10%点	0.0807	0.0873	0.0934	0.1004	0.1015	0.1064

[9] 各統計量のその他の統計量 (平均、最小値、最大値) は付録 A の表 10(ケース 1)、表 11(ケース 2) を参照のこと。

表 5：収益率の各統計量の標準偏差 (ケース 2)

ポートフォリオ 1

	QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
標準偏差	0.0000	0.0000	0.0000	0.0113	0.0115	0.0109
尖度	0.0454	0.0701	0.0943	0.0454	0.0701	0.0943
最小値	0.8085	0.9069	0.9503	0.8102	0.9080	0.9507
最大値	0.8085	0.9069	0.9503	0.8102	0.9080	0.9507
1%点	0.0746	0.0830	0.0957	0.0788	0.0874	0.1002
5%点	0.0365	0.0365	0.0365	0.0407	0.0408	0.0401
10%点	0.0260	0.0291	0.0326	0.0300	0.0326	0.0354

ポートフォリオ 2

	QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
標準偏差	0.0000	0.0000	0.0000	0.0143	0.0143	0.0138
尖度	0.0526	0.0699	0.0892	0.0526	0.0699	0.0892
最小値	0.7929	0.8601	0.9090	0.7954	0.8616	0.9106
最大値	0.7929	0.8601	0.9090	0.7954	0.8616	0.9106
1%点	0.0745	0.0815	0.0918	0.0812	0.0887	0.0984
5%点	0.0344	0.0359	0.0357	0.0413	0.0434	0.0419
10%点	0.0263	0.0280	0.0312	0.0324	0.0333	0.0351

ポートフォリオの収益率の平均は乱数を生成するときにマッチングを行っているので、理論値と必ず一致する。また、相関を持たせても歪度が 0 になるように調整している。そのため、平均と歪度のばらつきはない (これらの標準偏差は必ず 0 になる) ので、表から取り除いている。一方、モーメント・マッチングにより、各乱数の標準偏差もすべて 1 に調整したが、相関を持つ場合には、QR 法を用いない限り、理論値と一致しない。このことは、QR 法を適用する (QR–) と標準偏差にばらつきがないのに対し、QR 法を適用しない (nQR–) とばらつきがあることからも分かる。

尖度は QR 法適用の有無によってあまり変化がない。これは、その適用の有無によってコレスキー分解された行列にあまり大きな差がみられないからである。乱数 1,000 個 (ケース 1) では小数点以下 4 桁目で差が出ているが、乱数 10,000 個 (ケース 2) では差がみられない。乱数を増やすことによって多次元乱数間の独立性が高まるからである。一方、KC 法適用の有無は尖度のばらつき具合に大きな影響を与える。KC 法を適用すると、適用しないときに比べて、ばらつき (標準偏差) は約 35% 減少している。KC 法の順序を逆にすると、適用しない場合に比べて、ばらつき (標準偏差) は逆に約 35% 増加している。このことは、どの乱数をどの変数に割り当てるかがいかに重要であり、KC 法が有効であることを示している。また、最小値と最大値のばらつきも尖度と同様の結果になった [10]。

次に、各ポートフォリオの VaR に相当するパーセント点 (1%, 5%, 10%) の理論値とシミュレーション値の差 (誤差：「シミュレーション値−理論値」) の統計量 (絶対値平均、標準偏差) を表 6(ケース 1)、表 7(ケース 2) に示す [11]。ここで、p パーセント点は収益率を小さい順番に並べて、$1,000p$ 番目の収益率のことである (1%点は 10 番目、5%点は 50 番目、10%点は 100 番目の収益率を示す)。

[10] 最小値と最大値の標準偏差が同じなのは、対称変量法を用いているからである。

[11] 誤差のその他の統計量 (最小値、最大値) は付録 A の表 12(ケース 1)、表 13(ケース 2) を参照のこと (1 回目のみ)。

表 6： VaR の誤差の絶対値平均および標準偏差 (ケース 1)

ポートフォリオ 1

絶対値平均		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	1 回目	0.1967	0.2198	0.2488	0.2094	0.2310	0.2630
	2 回目	0.2022	0.2321	0.2584	0.2124	0.2446	0.2731
5%点	1 回目	0.0930	0.0883	0.0909	0.1006	0.0979	0.1018
	2 回目	0.0946	0.0919	0.0921	0.1053	0.1019	0.1027
10%点	1 回目	0.0688	0.0740	0.0791	0.0780	0.0814	0.0846
	2 回目	0.0697	0.0762	0.0828	0.0793	0.0843	0.0858

標準偏差		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	1 回目	0.2418	0.2723	0.3126	0.2575	0.2864	0.3288
	2 回目	0.2474	0.2873	0.3200	0.2617	0.3018	0.3371
5%点	1 回目	0.1149	0.1104	0.1142	0.1255	0.1228	0.1291
	2 回目	0.1179	0.1147	0.1154	0.1304	0.1266	0.1274
10%点	1 回目	0.0827	0.0911	0.0997	0.0948	0.0999	0.1077
	2 回目	0.0870	0.0942	0.1021	0.0985	0.1047	0.1077

ポートフォリオ 2

絶対値平均		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	1 回目	0.1982	0.2181	0.2385	0.2182	0.2346	0.2581
	2 回目	0.2004	0.2240	0.2440	0.2159	0.2425	0.2625
5%点	1 回目	0.0941	0.0915	0.0909	0.1100	0.1095	0.1090
	2 回目	0.0949	0.0922	0.0904	0.1097	0.1071	0.1065
10%点	1 回目	0.0658	0.0712	0.0744	0.0818	0.0817	0.0840
	2 回目	0.0688	0.0764	0.0777	0.0820	0.0887	0.0860

標準偏差		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	1 回目	0.2453	0.2691	0.2959	0.2692	0.2904	0.3193
	2 回目	0.2452	0.2742	0.3009	0.2657	0.2964	0.3247
5%点	1 回目	0.1165	0.1122	0.1134	0.1338	0.1330	0.1366
	2 回目	0.1168	0.1153	0.1126	0.1359	0.1359	0.1341
10%点	1 回目	0.0807	0.0873	0.0934	0.1004	0.1015	0.1064
	2 回目	0.0859	0.0945	0.0967	0.1023	0.1101	0.1075

表 7： VaR の誤差の絶対値平均および標準偏差 (ケース 2)

ポートフォリオ 1

絶対値平均		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	1 回目	0.0597	0.0665	0.0774	0.0635	0.0698	0.0802
	2 回目	0.0611	0.0682	0.0774	0.0648	0.0710	0.0802
5%点	1 回目	0.0291	0.0294	0.0292	0.0323	0.0327	0.0319
	2 回目	0.0296	0.0294	0.0292	0.0327	0.0321	0.0319
10%点	1 回目	0.0209	0.0233	0.0268	0.0242	0.0262	0.0289
	2 回目	0.0221	0.0236	0.0268	0.0250	0.0262	0.0289

標準偏差		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	1 回目	0.0746	0.0830	0.0957	0.0788	0.0874	0.1002
	2 回目	0.0764	0.0850	0.0957	0.0808	0.0895	0.1002
5%点	1 回目	0.0365	0.0365	0.0365	0.0407	0.0408	0.0401
	2 回目	0.0371	0.0365	0.0365	0.0403	0.0402	0.0401
10%点	1 回目	0.0260	0.0291	0.0326	0.0300	0.0326	0.0354
	2 回目	0.0274	0.0293	0.0326	0.0311	0.0325	0.0354

ポートフォリオ 2

絶対値平均		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	1 回目	0.0597	0.0649	0.0741	0.0649	0.0714	0.0793
	2 回目	0.0615	0.0676	0.0741	0.0683	0.0728	0.0793
5%点	1 回目	0.0274	0.0286	0.0286	0.0327	0.0344	0.0334
	2 回目	0.0282	0.0282	0.0286	0.0341	0.0339	0.0334
10%点	1 回目	0.0216	0.0227	0.0251	0.0265	0.0268	0.0282
	2 回目	0.0222	0.0231	0.0251	0.0265	0.0268	0.0282

標準偏差		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	1 回目	0.0745	0.0815	0.0918	0.0812	0.0887	0.0984
	2 回目	0.0760	0.0841	0.0918	0.0843	0.0916	0.0984
5%点	1 回目	0.0344	0.0359	0.0357	0.0413	0.0434	0.0419
	2 回目	0.0352	0.0353	0.0357	0.0423	0.0421	0.0419
10%点	1 回目	0.0263	0.0280	0.0312	0.0324	0.0333	0.0351
	2 回目	0.0276	0.0288	0.0312	0.0330	0.0339	0.0351

本実験の目的は、QR法およびKC法のVaR計測への有効性を検証することである。QR法を適用すると、VaRに相当するパーセント点は平均的に良くなっている。Barraquand [1]やCurran [3]はオプション評価における有効性を指摘したが、VaR計測においても有効であることを示すことができた。一方、KC法を適用すると、1%点と10%点については平均的に改善される。KC法の順序を逆にすると適用しないときに比べて誤差は大きくなることからもKC法の効果を見ることができる。しかし、5%点についてはその効果はほとんど見られない。なぜ、5%点のみに効果が見られない原因についてはまだ不明である。

ところで、ケース1に比べてケース2のパーセント点のばらつきの大きさ(絶対値平均もしくは標準偏差)は約 $1/3$ になっている($\sqrt{1,000/10,000} = \sqrt{1/10}$ に近い値)。

次に、QR法とKC法の効果の大きさを絶対値平均によって確認する [12]。また、QR法もしくはKC法を適用するか否かによってパーセント点が理論値に近づく割合(勝率)も調べる。その計算結果を表8(ケース1)、表9(ケース2)に示す。

表8：QR法およびKC法の効果(ケース1)

絶対値平均		ポートフォリオ1				ポートフォリオ2			
		QR法による差		KC法による差		QR法による差		KC法による差	
		KC	nKC	QR	nQR	KC	nKC	QR	nQR
1%点	1回目	−6.0%	−4.8%	−10.5%	−9.4%	−9.1%	−7.0%	−9.1%	−7.0%
	2回目	−4.8%	−5.1%	−12.9%	−13.2%	−7.2%	−7.6%	−10.6%	−11.0%
5%点	1回目	−7.6%	−9.8%	5.3%	2.8%	−14.4%	−16.5%	2.9%	0.4%
	2回目	−10.1%	−9.8%	2.9%	3.3%	−13.5%	−13.9%	2.9%	2.5%
10%点	1回目	−11.8%	−9.1%	−7.0%	−4.2%	−19.6%	−12.9%	−7.6%	0.2%
	2回目	−12.2%	−9.7%	−8.6%	−5.9%	−16.1%	−13.9%	−9.9%	−7.6%

勝率		ポートフォリオ1				ポートフォリオ2			
		QR法を適用する		KC法を適用する		QR法を適用する		KC法を適用する	
		KC	nKC	QR	nQR	KC	nKC	QR	nQR
1%点	1回目	57.0%	53.7%	55.1%	53.7%	57.1%	54.5%	56.1%	53.7%
	2回目	57.0%	53.7%	55.2%	56.1%	57.1%	54.5%	55.9%	56.1%
5%点	1回目	55.1%	56.6%	47.1%	49.4%	59.2%	59.6%	48.7%	49.4%
	2回目	55.1%	56.6%	49.2%	48.4%	59.2%	59.6%	47.3%	48.4%
10%点	1回目	59.4%	55.7%	53.0%	51.0%	61.6%	56.4%	54.3%	51.0%
	2回目	59.4%	55.7%	55.1%	53.3%	61.6%	56.4%	53.5%	53.3%

[12] 表6、表7を見ても分かるように、絶対値平均と標準偏差はほぼ同じ動きをしているので、絶対値平均を対象とする。標準偏差については、付録Aの表14(ケース1)、表15(ケース2)に示す。

表 9：QR 法および KC 法の効果 (ケース 2)

絶対値平均		ポートフォリオ1				ポートフォリオ2			
		QR 法による差		KC 法による差		QR 法による差		KC 法による差	
		KC	nKC	QR	nQR	KC	nKC	QR	nQR
1%点	1 回目	−6.0%	−4.7%	−10.2%	−9.0%	−8.0%	−9.1%	−8.0%	−9.1%
	2 回目	−5.8%	−3.9%	−10.5%	−8.7%	−9.9%	−7.1%	−9.0%	−6.2%
5%点	1 回目	−9.9%	−10.3%	−0.7%	−1.2%	−15.0%	−15.4%	−0.4%	−0.9%
	2 回目	−9.4%	−8.6%	0.9%	1.8%	−17.4%	−16.8%	0.1%	0.7%
10%点	1 回目	−13.6%	−11.0%	−10.4%	−7.7%	−16.8%	−16.1%	−7.0%	−6.3%
	2 回目	−11.5%	−9.8%	−6.5%	−4.6%	−16.1%	−13.8%	−3.8%	−1.2%

勝率		ポートフォリオ1				ポートフォリオ2			
		QR 法を適用する		KC 法を適用する		QR 法を適用する		KC 法を適用する	
		KC	nKC	QR	nQR	KC	nKC	QR	nQR
1%点	1 回目	55.1%	55.7%	54.6%	54.1%	56.7%	58.7%	52.7%	54.1%
	2 回目	55.1%	55.7%	54.3%	53.9%	56.7%	58.7%	52.5%	53.9%
5%点	1 回目	56.7%	56.1%	52.0%	50.7%	59.7%	61.5%	51.1%	50.7%
	2 回目	56.7%	56.1%	51.4%	49.1%	59.7%	61.5%	50.4%	49.1%
10%点	1 回目	57.1%	59.1%	52.8%	51.7%	61.1%	59.3%	52.2%	51.7%
	2 回目	57.1%	59.1%	51.5%	49.4%	61.1%	59.3%	50.1%	49.4%

表 8および表 9の各値の計算方法を以下に示す。

(1) 「絶対値平均」の差の計算法

QR 法による差

- KC の列 ： $\dfrac{[\text{QR–KC}] - [\text{nQR–KC}]}{[\text{nQR–KC}]}$
- nKC の列 ： $\dfrac{[\text{QR–nKC}] - [\text{nQR–nKC}]}{[\text{nQR–nKC}]}$

KC 法による差

- QR の列 ： $\dfrac{[\text{QR–KC}] - [\text{QR–nKC}]}{[\text{QR–nKC}]}$
- nQR の列 ： $\dfrac{[\text{nQR–nKC}] - [\text{nQR–nKC}]}{[\text{nQR–nKC}]}$

ここで、[QR–KC] は QR–KC 法によって計算された値 (絶対値平均) を示す。他も同様である。これらは表 6、表 7を用いて計算した。

ところで、乱数の尖度が 3 に近い順番に並んでいる場合には KC 法を適用しても結果が変わらないことに注意すべきである。具体的には、ケース 1(1 回目) は 160 回、ケース 1(2 回目) は 170 回、

ケース2(1回目)は191回、ケース2(2回目)は189回である [13] 。

(2) 「勝率」の計算法

QR法を適用する

- KCの列 : $\dfrac{\{\text{QR–KC}\}}{\{\text{QR–KC}\}+\{\text{nQR–KC}\}}\times 100\%$
- nKCの列 : $\dfrac{\{\text{QR–nKC}\}}{\{\text{QR–nKC}\}+\{\text{nQR–nKC}\}}\times 100\%$

KC法を適用する

- QRの列 : $\dfrac{\{\text{QR–KC}\}}{\{\text{QR–KC}\}+\{\text{QR–nKC}\}}\times 100\%$
- nQRの列 : $\dfrac{\{\text{nQR–KC}\}}{\{\text{nQR–KC}\}+\{\text{nQR–nKC}\}}\times 100\%$

ここで、QR法を適用する場合のKCの列の {QR–KC} はQR–KC法によるパーセント点がnQR–KC法のパーセント点に比べて理論値に近い回数を表す。他も同様であるが、比較する組み合わせに注意する必要がある。比較する組み合わせは各式の分母のところに記述してある2つの方法である。

まず、初めに絶対値平均を見てみよう。1%点についてはQR法に比べて、KC法の方がパーセント点を改善する効果は大きい。一方、10%点ではその効果の大きさは逆転する。5%点についてはKC法に効果が見られないので、比較はできない。一方、勝率を見てみると、QR法とKC法ともに1%、10%の場合には効果はあるものの、どちらが効果的かどうかは分からない。5%点については絶対値平均と同様に、KC法には効果が見られない。注意すべきことは、QR法、KC法ともにパーセント点を良くする可能性は高いものの必ずしも良くなるとは限らないということである。これは、最初に生成された乱数の方がパーセント点計測には良い(理論値に近い)場合もあり得るからである。しかし、1,000回行うと(KC法による5%を除いて)、良い結果を得られる可能性は高くなることから、これらの手法は有効であると言うことができる。

5 おわりに

本研究では金融資産のリスク量を計測するために用いられる Value at Risk(VaR) を評価するためにモンテカルロ・シミュレーションを用いるときの改善方法および注意点を示した。Barraquand [1] やCurran [3] が示したQR法はVaR計測においても有効であることが分かった。また、本研究で提案したKC法も 1%点と10%に関しては改善することを示した。特に、VaRは99% 信頼区間で計測することが多い [14] ので、1%点を改善するKC法はある程度有効であることが分かった。KC法による計算量の増加は各乱数系列の尖度を計算し、並び替えるだけである。KC法は、その計算

[13] 3変数なので、並ぶ順番は6通りある。したがって、平均的には167回同じ順番になり得る。したがって、その分修正するとさらにKC法による差は大きくなる(ここでは省略する)。

[14] BIS二次規制で内部モデルを用いてリスク計測を行う場合に、VaR を算出するときの信頼区間は片側 99% である[2]。

手続きが極めて簡単でありながら、改善効果を得られるという点で、実用的にはかなり有効であると思われる。しかし、5%点ではあまり改善しないなど、理論的な説明力が不足している点を今後解明する必要がある。

　また、相関のある多次元の変数を用いてシミュレーションを行う場合、変数の並び方によって相関係数行列が変わり、その結果としてコレスキー分解された行列も異なる。本数値実験で用いた例題を使ったとき、その並び方によって計算精度の結果は異なった。しかし、行列の形とその計算精度の関係の特徴を導き出すには至らなかった [15] 。変数の並び方と計算精度に本当に関係が存在するのかどうかも含めて、今後の課題としたい。

参考文献

[1] J.Barraquand : Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate European Securities, Management Science, Vol.41, No.12(1995), pp.1882–1891.

[2] バーゼル銀行監督委員会, 日本銀行訳 : マーケットリスクを自己資本合意の対象に含めるための改定, 1996年1月.

[3] M.Curran : Recovering Identity, Risk, Vol.9, No.5(1996), p.65.

[4] 伏見正則 : 乱数, 東大出版会, 1989.

[5] J.P. Morgan : RiskMetrics Technical Document (fourth edition), 1996.

[15] 詳しい結果は、付録Bに示す。

付録

A 詳細な結果

(1) 乱数 1,000 個 (ケース 1) と 10,000 個 (ケース 2) を使ったシミュレーションをそれぞれ 1,000 回行ったときの各ポートフォリオの収益率の各統計量 (標準偏差、尖度、最小値、最大値、1%点、5%点、10%点) の統計量 (平均、標準偏差、最小値、最大値) を表 10(ケース 1)、表 11(ケース 2) に示す。ここでは、紙面の都合上、2 回のうち、1 回目だけの結果を示す。各統計量の標準偏差は本文中 (表 4、表 5) と同じである。

(2) 各ポートフォリオのパーセント点 (1%, 5%, 10%) の理論値とシミュレーション値の差 (誤差 : 「シミュレーション値−理論値」) の統計量 (絶対値平均、標準偏差、最小値、最大値) を表 12(ケース 1)、表 13(ケース 2) に示す。ここで、p パーセント点は収益率を小さい順番に並べて、$1,000p$ 番目の収益率のことである (1%点は 10 番目、5%点は 50 番目、10%点は 100 番目の収益率を示す)。誤差の絶対値平均と標準偏差は本文中 (表 6、表 7) と同じである。

(3) 標準偏差を用いた QR 法および KC 法の効果を表 14(ケース 1)、表 15(ケース 2) に示す。計算方法および表の見方は本文中の表 8、表 9と同じである。

表 10：収益率の各統計量の統計量 (ケース 1)

ポートフォリオ1		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC	理論値
平均								0.7280
標準偏差	平均	2.9514	2.9514	2.9514	2.9528	2.9526	2.9525	2.9514
	標準偏差	0.0000	0.0000	0.0000	0.0348	0.0355	0.0347	
	最小	2.9514	2.9514	2.9514	2.8424	2.8543	2.8353	
	最大	2.9514	2.9514	2.9514	3.0502	3.0620	3.0617	
歪度								0.0000
尖度	平均	2.9853	2.9848	3.0051	2.9854	2.9847	3.0050	3.0000
	標準偏差	0.1368	0.2209	0.2966	0.1368	0.2209	0.2965	
	最小	2.5749	2.4741	2.4762	2.5748	2.4732	2.4759	
	最大	3.4428	3.9215	4.0861	3.4472	3.9152	4.0807	
最小	平均	−8.8255	−8.8544	−8.9234	−8.8299	−8.8581	−8.9274	
	標準偏差	0.8054	1.0267	1.2248	0.8195	1.0403	1.2364	
	最小	−12.2925	−13.4051	−13.9931	−12.2727	−13.6373	−14.2533	
	最大	−7.0993	−6.5474	−6.5474	−7.0266	−6.6098	−6.6098	
最大	平均	10.2815	10.3105	10.3795	10.2860	10.3142	10.3835	
	標準偏差	0.8054	1.0267	1.2248	0.8195	1.0403	1.2364	
	最小	8.5554	8.0035	8.0035	8.4827	8.0659	8.0659	
	最大	13.7486	14.8612	15.4492	13.7288	15.0933	15.7094	
1%点	平均	−6.1975	−6.1636	−6.1826	−6.2008	−6.1664	−6.1852	−6.1418
	標準偏差	0.2418	0.2723	0.3126	0.2575	0.2864	0.3288	
	最小	−6.9568	−7.0732	−7.2882	−7.0247	−7.2161	−7.3593	
	最大	−5.4168	−5.3032	−5.3647	−5.4031	−5.3319	−5.3319	
5%点	平均	−4.1416	−4.1386	−4.1297	−4.1443	−4.1396	−4.1309	−4.1255
	標準偏差	0.1149	0.1104	0.1142	0.1255	0.1228	0.1291	
	最小	−4.5054	−4.4678	−4.4908	−4.5284	−4.5163	−4.5033	
	最大	−3.7998	−3.8150	−3.7411	−3.7012	−3.7790	−3.6499	
10%点	平均	−3.0687	−3.0687	−3.0567	−3.0706	−3.0701	−3.0582	−3.0501
	標準偏差	0.0827	0.0911	0.0997	0.0948	0.0999	0.1077	
	最小	−3.3557	−3.3521	−3.3669	−3.3301	−3.3774	−3.4037	
	最大	−2.8224	−2.8061	−2.7082	−2.7846	−2.7751	−2.7316	

ポートフォリオ2		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC	理論値
平均								0.7314
標準偏差	平均	2.8720	2.8720	2.8720	2.8737	2.8742	2.8734	2.8720
	標準偏差	0.0000	0.0000	0.0000	0.0443	0.0450	0.0441	
	最小	2.8720	2.8720	2.8720	2.7267	2.7267	2.7203	
	最大	2.8720	2.8720	2.8720	2.9943	3.0131	3.0038	
歪度								0.0000
尖度	平均	2.9863	2.9834	3.0026	2.9865	2.9833	3.0025	3.0000
	標準偏差	0.1568	0.2248	0.2804	0.1569	0.2246	0.2803	
	最小	2.4932	2.4742	2.4662	2.4937	2.4730	2.4660	
	最大	3.5255	4.1600	4.1420	3.5231	4.1468	4.1393	
最小	平均	−8.5629	−8.5951	−8.6403	−8.5682	−8.6018	−8.6454	
	標準偏差	0.8112	0.9959	1.1477	0.8342	1.0188	1.1662	
	最小	−12.0330	−13.5600	−13.5241	−12.0219	−13.8966	−13.8798	
	最大	−6.6715	−6.2502	−6.2502	−6.5826	−6.3615	−6.3615	
最大	平均	10.0257	10.0579	10.1031	10.0310	10.0646	10.1082	
	標準偏差	0.8112	0.9959	1.1477	0.8342	1.0188	1.1662	
	最小	8.1343	7.7130	7.7130	8.0453	7.8242	7.8242	
	最大	13.4958	15.0227	14.9869	13.4847	15.3594	15.3426	
1%点	平均	−6.0049	−5.9771	−5.9894	−6.0085	−5.9818	−5.9931	−5.9537
	標準偏差	0.2453	0.2691	0.2959	0.2692	0.2904	0.3193	
	最小	−6.7427	−6.9297	−6.9858	−6.8125	−7.1043	−7.0957	
	最大	−5.2426	−5.0615	−5.2543	−5.1739	−5.2004	−5.1897	
5%点	平均	−4.0056	−4.0104	−3.9997	−4.0089	−4.0136	−4.0019	−3.9916
	標準偏差	0.1165	0.1122	0.1134	0.1338	0.1330	0.1366	
	最小	−4.3528	−4.3446	−4.3591	−4.5204	−4.4232	−4.4054	
	最大	−3.6699	−3.6699	−3.6363	−3.5947	−3.6257	−3.6094	
10%点	平均	−2.9601	−2.9615	−2.9536	−2.9621	−2.9639	−2.9551	−2.9452
	標準偏差	0.0807	0.0873	0.0934	0.1004	0.1015	0.1064	
	最小	−3.2100	−3.2142	−3.2082	−3.2512	−3.2900	−3.2750	
	最大	−2.6954	−2.6477	−2.6608	−2.6280	−2.6295	−2.5704	

表 11：収益率の各統計量の統計量 (ケース 2)

ポートフォリオ 1		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC	理論値
平均								0.7280
標準偏差	平均	2.9514	2.9514	2.9514	2.9515	2.9514	2.9518	2.9514
	標準偏差	0.0000	0.0000	0.0000	0.0113	0.0115	0.0109	
	最小	2.9514	2.9514	2.9514	2.9226	2.9195	2.9159	
	最大	2.9514	2.9514	2.9514	2.9818	2.9834	2.9881	
歪度								0.0000
尖度	平均	2.9981	2.9981	3.0023	2.9981	2.9981	3.0023	3.0000
	標準偏差	0.0454	0.0701	0.0943	0.0454	0.0701	0.0943	
	最小	2.8587	2.7748	2.7830	2.8585	2.7747	2.7830	
	最大	3.1607	3.2402	3.3388	3.1606	3.2401	3.3384	
最小	平均	−10.5992	−10.6343	−10.6590	−10.5992	−10.6343	−10.6608	
	標準偏差	0.8085	0.9069	0.9503	0.8102	0.9080	0.9507	
	最小	−14.2842	−14.7522	−14.8466	−14.2905	−14.7482	−14.7882	
	最大	−8.7467	−8.6522	−8.7115	−8.7611	−8.6623	−8.7353	
最大	平均	12.0553	12.0903	12.1151	12.0552	12.0904	12.1169	
	標準偏差	0.8085	0.9069	0.9503	0.8102	0.9080	0.9507	
	最小	10.2028	10.1083	10.1676	10.2172	10.1183	10.1914	
	最大	15.7403	16.2082	16.3026	15.7466	16.2042	16.2442	
1%点	平均	−6.1441	−6.1413	−6.1453	−6.1445	−6.1415	−6.1462	−6.1418
	標準偏差	0.0746	0.0830	0.0957	0.0788	0.0874	0.1002	
	最小	−6.3692	−6.4077	−6.4534	−6.3791	−6.4394	−6.4673	
	最大	−5.9342	−5.8774	−5.8634	−5.9281	−5.9103	−5.8299	
5%点	平均	−4.1289	−4.1291	−4.1288	−4.1289	−4.1291	−4.1294	−4.1255
	標準偏差	0.0365	0.0365	0.0365	0.0407	0.0408	0.0401	
	最小	−4.2543	−4.2431	−4.2416	−4.2597	−4.2555	−4.2636	
	最大	−4.0219	−4.0048	−4.0140	−4.0125	−3.9983	−4.0032	
10%点	平均	−3.0544	−3.0549	−3.0543	−3.0545	−3.0549	−3.0548	−3.0501
	標準偏差	0.0260	0.0291	0.0326	0.0300	0.0326	0.0354	
	最小	−3.1542	−3.1579	−3.1668	−3.1560	−3.1654	−3.1606	
	最大	−2.9763	−2.9616	−2.9557	−2.9550	−2.9494	−2.9382	

ポートフォリオ 2		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC	理論値
平均								0.7314
標準偏差	平均	2.8720	2.8720	2.8720	2.8721	2.8722	2.8723	2.8720
	標準偏差	0.0000	0.0000	0.0000	0.0143	0.0143	0.0138	
	最小	2.8720	2.8720	2.8720	2.8332	2.8331	2.8304	
	最大	2.8720	2.8720	2.8720	2.9127	2.9155	2.9156	
歪度								0.0000
尖度	平均	2.9978	2.9976	3.0014	2.9978	2.9976	3.0014	3.0000
	標準偏差	0.0526	0.0699	0.0892	0.0526	0.0699	0.0892	
	最小	2.8251	2.7718	2.7834	2.8247	2.7715	2.7836	
	最大	3.1880	3.2354	3.3366	3.1880	3.2355	3.3363	
最小	平均	−10.2907	−10.3107	−10.3547	−10.2906	−10.3112	−10.3557	
	標準偏差	0.7929	0.8601	0.9090	0.7954	0.8616	0.9106	
	最小	−14.2249	−14.2209	−13.9990	−14.2313	−14.2116	−14.2112	
	最大	−8.6896	−8.3651	−8.4379	−8.6599	−8.3761	−8.4489	
最大	平均	11.7534	11.7735	11.8175	11.7533	11.7739	11.8185	
	標準偏差	0.7929	0.8601	0.9090	0.7954	0.8616	0.9106	
	最小	10.1523	9.8278	9.9007	10.1227	9.8389	9.9117	
	最大	15.6877	15.6837	15.4617	15.6941	15.6744	15.6739	
1%点	平均	−5.9568	−5.9532	−5.9566	−5.9576	−5.9536	−5.9576	−5.9537
	標準偏差	0.0745	0.0815	0.0918	0.0812	0.0887	0.0984	
	最小	−6.2181	−6.2983	−6.2996	−6.2189	−6.2538	−6.2666	
	最大	−5.7313	−5.6708	−5.6837	−5.7216	−5.7081	−5.6344	
5%点	平均	−3.9931	−3.9951	−3.9922	−3.9934	−3.9951	−3.9924	−3.9916
	標準偏差	0.0344	0.0359	0.0357	0.0413	0.0434	0.0419	
	最小	−4.1033	−4.1076	−4.1165	−4.1275	−4.1382	−4.1094	
	最大	−3.8848	−3.8724	−3.8742	−3.8589	−3.8689	−3.8563	
10%点	平均	−2.9503	−2.9505	−2.9488	−2.9506	−2.9506	−2.9492	−2.9452
	標準偏差	0.0263	0.0280	0.0312	0.0324	0.0333	0.0351	
	最小	−3.0265	−3.0329	−3.0492	−3.0377	−3.0575	−3.0559	
	最大	−2.8657	−2.8515	−2.8438	−2.8549	−2.8499	−2.8201	

表 12 : VaR の誤差の統計量 (ケース 1)

ポートフォリオ1		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	**絶対値平均**	0.1967	0.2198	0.2488	0.2094	0.2310	0.2630
	標準偏差	0.2418	0.2723	0.3126	0.2575	0.2864	0.3288
	最小	−0.8151	−0.9314	−1.1464	−0.8829	−1.0743	−1.2176
	最大	0.7250	0.8386	0.7770	0.7386	0.8098	0.8098
5%点	**絶対値平均**	0.0930	0.0883	0.0909	0.1006	0.0979	0.1018
	標準偏差	0.1149	0.1104	0.1142	0.1255	0.1228	0.1291
	最小	−0.3799	−0.3423	−0.3653	−0.4029	−0.3908	−0.3778
	最大	0.3257	0.3105	0.3844	0.4243	0.3465	0.4756
10%点	**絶対値平均**	0.0688	0.0740	0.0791	0.0780	0.0814	0.0846
	標準偏差	0.0827	0.0911	0.0997	0.0948	0.0999	0.1077
	最小	−0.3056	−0.3020	−0.3168	−0.2799	−0.3273	−0.3536
	最大	0.2277	0.2440	0.3419	0.2655	0.2750	0.3185

ポートフォリオ1		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	**絶対値平均**	0.1982	0.2181	0.2385	0.2182	0.2346	0.2581
	標準偏差	0.2453	0.2691	0.2959	0.2692	0.2904	0.3193
	最小	−0.7890	−0.9760	−1.0321	−0.8588	−1.1506	−1.1421
	最大	0.7111	0.8922	0.6994	0.7798	0.7533	0.7640
5%点	**絶対値平均**	0.0941	0.0915	0.0909	0.1100	0.1095	0.1090
	標準偏差	0.1165	0.1122	0.1134	0.1338	0.1330	0.1366
	最小	−0.3612	−0.3529	−0.3675	−0.5288	−0.4316	−0.4138
	最大	0.3217	0.3217	0.3553	0.3969	0.3660	0.3822
10%点	**絶対値平均**	0.0658	0.0712	0.0744	0.0818	0.0817	0.0840
	標準偏差	0.0807	0.0873	0.0934	0.1004	0.1015	0.1064
	最小	−0.2649	−0.2690	−0.2630	−0.3060	−0.3448	−0.3299
	最大	0.2498	0.2975	0.2844	0.3172	0.3157	0.3748

表 13 : VaR の誤差の統計量 (ケース 2)

ポートフォリオ1		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	**絶対値平均**	0.0597	0.0665	0.0774	0.0635	0.0698	0.0802
	標準偏差	0.0746	0.0830	0.0957	0.0788	0.0874	0.1002
	最小	-0.2275	-0.2660	-0.3116	-0.2374	-0.2976	-0.3256
	最大	0.2075	0.2644	0.2784	0.2136	0.2315	0.3119
5%点	**絶対値平均**	0.0291	0.0294	0.0292	0.0323	0.0327	0.0319
	標準偏差	0.0365	0.0365	0.0365	0.0407	0.0408	0.0401
	最小	-0.1288	-0.1176	-0.1161	-0.1342	-0.1300	-0.1381
	最大	0.1036	0.1207	0.1115	0.1129	0.1272	0.1223
10%点	**絶対値平均**	0.0209	0.0233	0.0268	0.0242	0.0262	0.0289
	標準偏差	0.0260	0.0291	0.0326	0.0300	0.0326	0.0354
	最小	-0.1041	-0.1078	-0.1166	-0.1059	-0.1153	-0.1105
	最大	0.0739	0.0885	0.0944	0.0952	0.1007	0.1119

ポートフォリオ2		QR–KC	QR–nKC	QR–rKC	nQR–KC	nQR–nKC	nQR–rKC
1%点	**絶対値平均**	0.0597	0.0649	0.0741	0.0649	0.0714	0.0793
	標準偏差	0.0745	0.0815	0.0918	0.0812	0.0887	0.0984
	最小	-0.2644	-0.3446	-0.3459	-0.2652	-0.3001	-0.3129
	最大	0.2223	0.2829	0.2700	0.2321	0.2455	0.3193
5%点	**絶対値平均**	0.0274	0.0286	0.0286	0.0327	0.0344	0.0334
	標準偏差	0.0344	0.0359	0.0357	0.0413	0.0434	0.0419
	最小	-0.1116	-0.1160	-0.1248	-0.1358	-0.1466	-0.1178
	最大	0.1068	0.1192	0.1174	0.1327	0.1228	0.1353
10%点	**絶対値平均**	0.0216	0.0227	0.0251	0.0265	0.0268	0.0282
	標準偏差	0.0263	0.0280	0.0312	0.0324	0.0333	0.0351
	最小	-0.0814	-0.0878	-0.1041	-0.0925	-0.1123	-0.1107
	最大	0.0795	0.0936	0.1013	0.0903	0.0952	0.1251

表 14：QR 法および KC 法の効果 (標準偏差)(ケース 1)

標準偏差		ポートフォリオ 1				ポートフォリオ 2			
		QR 法による差		KC 法による差		QR 法による差		KC 法による差	
		KC	nKC	QR	nQR	KC	nKC	QR	nQR
1%点	1 回目	−6.1%	−4.9%	−11.2%	−10.1%	−8.9%	−7.3%	−8.8%	−7.3%
	2 回目	−5.5%	−4.8%	−13.9%	−13.3%	−7.7%	−7.5%	−10.6%	−10.4%
5%点	1 回目	−8.5%	−10.1%	4.1%	2.1%	−12.9%	−15.7%	3.9%	0.6%
	2 回目	−9.6%	−9.4%	2.8%	3.0%	−14.1%	−15.1%	1.3%	0.0%
10%点	1 回目	−12.8%	−8.8%	−9.3%	−5.1%	−19.6%	−14.0%	−7.6%	−1.1%
	2 回目	−11.6%	−10.0%	−7.6%	−5.9%	−16.0%	−14.1%	−9.2%	−7.1%

表 15：QR 法および KC 法の効果 (標準偏差)(ケース 2)

標準偏差		ポートフォリオ 1				ポートフォリオ 2			
		QR 法による差		KC 法による差		QR 法による差		KC 法による差	
		KC	nKC	QR	nQR	KC	nKC	QR	nQR
1%点	1 回目	−5.3%	−5.0%	−10.1%	−9.8%	−8.3%	−8.2%	−8.6%	−8.4%
	2 回目	−5.5%	−5.0%	−10.1%	−9.7%	−9.8%	−8.2%	−9.6%	−8.0%
5%点	1 回目	−10.4%	−10.5%	−0.1%	−0.2%	−16.7%	−17.1%	−4.3%	−4.8%
	2 回目	−7.8%	−9.2%	1.7%	0.2%	−16.7%	−16.3%	−0.1%	0.4%
10%点	1 回目	−13.4%	−10.7%	−10.7%	−7.9%	−18.8%	−16.0%	−6.1%	−2.8%
	2 回目	−12.0%	−10.0%	−6.5%	−4.4%	−16.5%	−14.9%	−4.3%	−2.4%

B　変数の並び方と計算精度の関係

相関のある多次元の変数を用いてシミュレーションを行う場合、変数の並び方によって相関係数行列が変わり、その結果としてコレスキー分解された行列も異なる。4節で示した例題を用いる場合、相関係数行列は6種類考えられ、それぞれに対してコレスキー分解した行列は次のように得られる。

$$C_{SBC} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.1446 & 0.9895 & 0.0000 \\ 0.7594 & 0.2194 & 0.6125 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{SCB} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.7594 & 0.6506 & 0.0000 \\ 0.1446 & 0.3337 & 0.9315 \end{bmatrix}$$

$$C_{BSC} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.1446 & 0.9895 & 0.0000 \\ 0.3269 & 0.7197 & 0.6125 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{BCS} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3269 & 0.9451 & 0.0000 \\ 0.1446 & 0.7535 & 0.6413 \end{bmatrix}$$

$$C_{CSB} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.7594 & 0.6506 & 0.0000 \\ 0.3269 & -0.1593 & 0.9315 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{CBS} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3269 & 0.9451 & 0.0000 \\ 0.7594 & -0.1097 & 0.6413 \end{bmatrix}$$

ここで、$C_{SBC} \sim C_{CBS}$ はそれぞれ株式、債券、CB を次のように並べた場合である [16] 。

	変数1	変数2	変数3
C_{SBC}	株式	債券	CB
C_{SCB}	株式	CB	債券
C_{BSC}	債券	株式	CB
C_{BCS}	債券	CB	株式
C_{CSB}	CB	株式	債券
C_{CBS}	CB	債券	株式

まずはじめに、表6、表7と同様に、VaR の誤差の絶対値平均によって、各方法の計算精度を確かめる。さらに、組み合わせの違いと計算精度の関係を見るための一つの方法として、各パーセント毎に最小値(6種類の誤差の絶対値平均の最小値)との差の平均(QR/KC の有無(4種類) × 2回 = 8個の平均)を調べる。各ケース毎に、VaR の誤差の絶対値平均(表16(ケース1)、表18(ケース2))と最小値との差の平均(表17(ケース1)、表19(ケース2))を示す。

表17を見ると、BCS の場合が目立って悪い結果を示している(表19は表17ほどではないが、BCS の場合が最も誤差の絶対値平均が大きい)。詳しく議論するために、表16を見ると、QR 法を適用しない(nQR–nKC, nQR–KC)場合に他との差が大きい。BCS の場合に誤差が大きくなる理由は現在のところ解明できていない。しかし、QR 法を適用すると、BCS の場合も他のケースとほとんど違いがなくなり、さらに6種類の平均および標準偏差も小さくなる。これはQR 法の適用の有無が精度も向上し、変数の並び方による差も小さくなるので、よりロバストな結果を得ることができることを示している。したがって、QR 法を適用すれば、変数の並び方に注意を支払う必要がない可能性があることを示唆している。

[16] 4節で示した結果はすべて、C_{SBC} を使って得られた結果である。

表 16：VaR の誤差の絶対値平均 (ケース 1)

ポートフォリオ1			SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS	平均	標準偏差
1%点	1回目	QR–KC	0.1967	0.1993	0.2100	0.2168	0.2062	0.2026	0.2053	0.0074
		QR–nKC	0.2198	0.2190	0.2190	0.2244	0.2167	0.2125	0.2186	0.0039
		nQR–KC	0.2094	0.2113	0.2291	0.2583	0.2347	0.2277	0.2284	0.0178
		nQR–nKC	0.2310	0.2315	0.2392	0.2523	0.2447	0.2406	0.2399	0.0081
	2回目	QR–KC	0.2022	0.2032	0.2129	0.2184	0.2167	0.2228	0.2127	0.0084
		QR–nKC	0.2321	0.2319	0.2218	0.2250	0.2272	0.2270	0.2275	0.0040
		nQR–KC	0.2124	0.2124	0.2327	0.2620	0.2404	0.2465	0.2344	0.0196
		nQR–nKC	0.2446	0.2432	0.2393	0.2608	0.2510	0.2510	0.2483	0.0076
5%点	1回目	QR–KC	0.0930	0.0950	0.0926	0.0934	0.0932	0.0957	0.0938	0.0013
		QR–nKC	0.0883	0.0909	0.0936	0.0899	0.0906	0.0916	0.0908	0.0018
		nQR–KC	0.1006	0.1013	0.1130	0.1250	0.1150	0.1188	0.1123	0.0097
		nQR–nKC	0.0979	0.1018	0.1149	0.1287	0.1176	0.1159	0.1128	0.0113
	2回目	QR–KC	0.0946	0.0949	0.0933	0.0908	0.0925	0.0943	0.0934	0.0015
		QR–nKC	0.0919	0.0915	0.0946	0.0952	0.0915	0.0946	0.0932	0.0017
		nQR–KC	0.1053	0.1045	0.1154	0.1240	0.1176	0.1183	0.1142	0.0077
		nQR–nKC	0.1019	0.1013	0.1099	0.1258	0.1163	0.1243	0.1133	0.0107
10%点	1回目	QR–KC	0.0688	0.0683	0.0697	0.0717	0.0678	0.0680	0.0691	0.0015
		QR–nKC	0.0740	0.0760	0.0725	0.0715	0.0737	0.0729	0.0734	0.0015
		nQR–KC	0.0780	0.0782	0.0846	0.0967	0.0903	0.0881	0.0860	0.0072
		nQR–nKC	0.0814	0.0833	0.0870	0.1014	0.0950	0.0920	0.0900	0.0076
	2回目	QR–KC	0.0697	0.0711	0.0715	0.0748	0.0710	0.0694	0.0712	0.0019
		QR–nKC	0.0762	0.0776	0.0726	0.0756	0.0762	0.0759	0.0757	0.0017
		nQR–KC	0.0793	0.0786	0.0872	0.0969	0.0885	0.0879	0.0864	0.0068
		nQR–nKC	0.0843	0.0851	0.0873	0.0998	0.0945	0.0942	0.0909	0.0062
ポートフォリオ2			SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS	平均	標準偏差
1%点	1回目	QR–KC	0.1982	0.2001	0.2099	0.2100	0.2035	0.1965	0.2031	0.0058
		QR–nKC	0.2181	0.2194	0.2186	0.2131	0.2210	0.2103	0.2168	0.0041
		nQR–KC	0.2182	0.2176	0.2322	0.2422	0.2229	0.2200	0.2255	0.0098
		nQR–nKC	0.2346	0.2348	0.2454	0.2427	0.2366	0.2294	0.2372	0.0059
	2回目	QR–KC	0.2004	0.2040	0.2081	0.2137	0.2066	0.2071	0.2067	0.0044
		QR–nKC	0.2240	0.2183	0.2151	0.2192	0.2197	0.2234	0.2199	0.0033
		nQR–KC	0.2159	0.2206	0.2340	0.2467	0.2231	0.2248	0.2275	0.0111
		nQR–nKC	0.2425	0.2343	0.2398	0.2474	0.2355	0.2391	0.2398	0.0048
5%点	1回目	QR–KC	0.0941	0.0920	0.0910	0.0905	0.0952	0.0943	0.0929	0.0019
		QR–nKC	0.0915	0.0868	0.0885	0.0904	0.0880	0.0909	0.0893	0.0018
		nQR–KC	0.1100	0.1084	0.1142	0.1165	0.1093	0.1088	0.1112	0.0033
		nQR–nKC	0.1095	0.1040	0.1150	0.1228	0.1066	0.1088	0.1111	0.0068
	2回目	QR–KC	0.0949	0.0924	0.0935	0.0898	0.0943	0.0943	0.0932	0.0019
		QR–nKC	0.0922	0.0864	0.0930	0.0910	0.0866	0.0925	0.0903	0.0030
		nQR–KC	0.1097	0.1106	0.1152	0.1182	0.1090	0.1091	0.1120	0.0038
		nQR–nKC	0.1071	0.1029	0.1150	0.1172	0.1041	0.1102	0.1094	0.0058
10%点	1回目	QR–KC	0.0658	0.0678	0.0677	0.0694	0.0636	0.0639	0.0664	0.0023
		QR–nKC	0.0712	0.0705	0.0691	0.0694	0.0704	0.0700	0.0701	0.0007
		nQR–KC	0.0818	0.0812	0.0890	0.0917	0.0797	0.0768	0.0834	0.0057
		nQR–nKC	0.0817	0.0827	0.0892	0.0930	0.0841	0.0836	0.0857	0.0044
	2回目	QR–KC	0.0688	0.0678	0.0683	0.0704	0.0668	0.0697	0.0686	0.0013
		QR–nKC	0.0764	0.0742	0.0706	0.0717	0.0750	0.0744	0.0737	0.0022
		nQR–KC	0.0820	0.0814	0.0908	0.0940	0.0807	0.0816	0.0851	0.0058
		nQR–nKC	0.0887	0.0859	0.0888	0.0936	0.0867	0.0868	0.0884	0.0028

表 17：最小値との差の平均 (ケース 1)

ポートフォリオ1

	SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS
1%点	0.0029	0.0033	0.0098	0.0241	0.0140	0.0132
5%点	0.0007	0.0017	0.0075	0.0131	0.0084	0.0107
10%点	0.0010	0.0018	0.0036	0.0106	0.0067	0.0056

ポートフォリオ2

	SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS
1%点	0.0041	0.0037	0.0105	0.0145	0.0062	0.0039
5%点	0.0039	0.0007	0.0060	0.0073	0.0019	0.0039
10%点	0.0026	0.0020	0.0048	0.0072	0.0015	0.0015

表 18：VaR の誤差の絶対値平均 (ケース 2)

ポートフォリオ1			SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS	平均	標準偏差
1%点	1回目	QR–KC	0.0597	0.0601	0.0631	0.0642	0.0629	0.0650	0.0625	0.0022
		QR–nKC	0.0665	0.0666	0.0688	0.0663	0.0675	0.0691	0.0675	0.0012
		nQR–KC	0.0635	0.0641	0.0699	0.0749	0.0710	0.0728	0.0694	0.0046
		nQR–nKC	0.0698	0.0702	0.0759	0.0777	0.0760	0.0766	0.0744	0.0035
	2回目	QR–KC	0.0611	0.0614	0.0650	0.0667	0.0644	0.0646	0.0639	0.0022
		QR–nKC	0.0682	0.0687	0.0686	0.0663	0.0690	0.0672	0.0680	0.0010
		nQR–KC	0.0648	0.0655	0.0721	0.0785	0.0719	0.0729	0.0710	0.0051
		nQR–nKC	0.0710	0.0719	0.0752	0.0777	0.0780	0.0748	0.0748	0.0029
5%点	1回目	QR–KC	0.0291	0.0292	0.0284	0.0287	0.0289	0.0289	0.0289	0.0003
		QR–nKC	0.0294	0.0288	0.0287	0.0290	0.0285	0.0283	0.0288	0.0004
		nQR–KC	0.0323	0.0320	0.0346	0.0395	0.0376	0.0376	0.0356	0.0031
		nQR–nKC	0.0327	0.0325	0.0353	0.0404	0.0376	0.0364	0.0358	0.0030
	2回目	QR–KC	0.0296	0.0290	0.0294	0.0288	0.0290	0.0289	0.0291	0.0003
		QR–nKC	0.0294	0.0293	0.0293	0.0293	0.0297	0.0287	0.0293	0.0003
		nQR–KC	0.0327	0.0320	0.0360	0.0409	0.0382	0.0370	0.0362	0.0034
		nQR–nKC	0.0321	0.0325	0.0360	0.0410	0.0382	0.0361	0.0360	0.0034
10%点	1回目	QR–KC	0.0209	0.0208	0.0226	0.0244	0.0220	0.0218	0.0221	0.0013
		QR–nKC	0.0233	0.0241	0.0232	0.0233	0.0234	0.0241	0.0236	0.0004
		nQR–KC	0.0242	0.0242	0.0281	0.0331	0.0295	0.0291	0.0280	0.0034
		nQR–nKC	0.0262	0.0269	0.0282	0.0324	0.0295	0.0303	0.0289	0.0023
	2回目	QR–KC	0.0221	0.0220	0.0228	0.0242	0.0236	0.0228	0.0229	0.0009
		QR–nKC	0.0236	0.0238	0.0231	0.0227	0.0239	0.0239	0.0235	0.0005
		nQR–KC	0.0250	0.0249	0.0279	0.0329	0.0298	0.0293	0.0283	0.0031
		nQR–nKC	0.0262	0.0264	0.0281	0.0315	0.0297	0.0301	0.0287	0.0021

ポートフォリオ2			SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS	平均	標準偏差
1%点	1回目	QR–KC	0.0597	0.0616	0.0605	0.0618	0.0600	0.0598	0.0605	0.0009
		QR–nKC	0.0649	0.0667	0.0654	0.0650	0.0662	0.0644	0.0654	0.0009
		nQR–KC	0.0649	0.0676	0.0691	0.0710	0.0656	0.0650	0.0672	0.0025
		nQR–nKC	0.0714	0.0722	0.0743	0.0742	0.0722	0.0708	0.0725	0.0014
	2回目	QR–KC	0.0615	0.0629	0.0640	0.0652	0.0593	0.0611	0.0623	0.0021
		QR–nKC	0.0676	0.0680	0.0657	0.0655	0.0674	0.0643	0.0664	0.0014
		nQR–KC	0.0683	0.0687	0.0747	0.0769	0.0656	0.0670	0.0702	0.0045
		nQR–nKC	0.0728	0.0726	0.0751	0.0751	0.0728	0.0691	0.0729	0.0022
5%点	1回目	QR–KC	0.0274	0.0279	0.0270	0.0271	0.0279	0.0284	0.0276	0.0005
		QR–nKC	0.0286	0.0280	0.0282	0.0285	0.0282	0.0281	0.0283	0.0002
		nQR–KC	0.0327	0.0330	0.0353	0.0369	0.0345	0.0346	0.0345	0.0015
		nQR–nKC	0.0344	0.0333	0.0362	0.0383	0.0340	0.0334	0.0349	0.0019
	2回目	QR–KC	0.0282	0.0289	0.0281	0.0281	0.0287	0.0289	0.0285	0.0004
		QR–nKC	0.0282	0.0287	0.0277	0.0278	0.0282	0.0288	0.0282	0.0005
		nQR–KC	0.0341	0.0348	0.0366	0.0380	0.0353	0.0350	0.0356	0.0014
		nQR–nKC	0.0339	0.0339	0.0363	0.0376	0.0343	0.0341	0.0350	0.0016
10%点	1回目	QR–KC	0.0216	0.0215	0.0217	0.0221	0.0209	0.0216	0.0215	0.0004
		QR–nKC	0.0227	0.0224	0.0238	0.0231	0.0223	0.0229	0.0229	0.0005
		nQR–KC	0.0265	0.0268	0.0294	0.0305	0.0260	0.0261	0.0275	0.0019
		nQR–nKC	0.0268	0.0269	0.0306	0.0310	0.0273	0.0277	0.0284	0.0019
	2回目	QR–KC	0.0222	0.0216	0.0219	0.0226	0.0227	0.0222	0.0222	0.0004
		QR–nKC	0.0231	0.0232	0.0233	0.0229	0.0233	0.0227	0.0231	0.0002
		nQR–KC	0.0265	0.0261	0.0284	0.0300	0.0267	0.0267	0.0274	0.0015
		nQR–nKC	0.0268	0.0273	0.0301	0.0308	0.0276	0.0269	0.0282	0.0017

表 19：最小値との差の平均 (ケース 2)

ポートフォリオ1

	SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS
1%点	0.0003	0.0008	0.0045	0.0062	0.0048	0.0051
5%点	0.0006	0.0003	0.0019	0.0043	0.0031	0.0024
10%点	0.0002	0.0004	0.0018	0.0043	0.0027	0.0027

ポートフォリオ2

	SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS
1%点	0.0016	0.0028	0.0038	0.0046	0.0014	0.0004
5%点	0.0003	0.0005	0.0013	0.0022	0.0008	0.0008
10%点	0.0004	0.0003	0.0020	0.0025	0.0004	0.0004

表8、表9と同様に、VaR の誤差の絶対値平均を表20(ケース1)、表21(ケース2) に示す。変数の並び方を変えると、効果の大きさは違うものの、QR 法はすべてのケースで、KC 法は 1%, 10% で効果をあげていることが分かる。

表 20：QR 法および KC 法の効果 (ケース1)

ポートフォリオ1				SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS
1%点	1回目	QR法による差	KC	−6.0%	−5.7%	−8.4%	−16.1%	−12.1%	−11.0%
			nKC	−4.8%	−5.4%	−8.4%	−11.1%	−11.5%	−11.7%
		KC法による差	QR	−10.5%	−9.0%	−4.1%	−3.4%	−4.8%	−4.7%
			nQR	−9.4%	−8.7%	−4.2%	2.4%	−4.1%	−5.4%
	2回目	QR法による差	KC	−4.8%	−4.3%	−8.5%	−16.7%	−9.9%	−9.6%
			nKC	−5.1%	−4.6%	−7.3%	−13.7%	−9.5%	−9.6%
		KC法による差	QR	−12.9%	−12.4%	−4.0%	−2.9%	−4.6%	−1.8%
			nQR	−13.2%	−12.7%	−2.8%	0.5%	−4.2%	−1.8%
5%点	1回目	QR法による差	KC	−7.6%	−6.1%	−18.0%	−25.3%	−19.0%	−19.4%
			nKC	−9.8%	−10.7%	−18.5%	−30.2%	−23.0%	−21.0%
		KC法による差	QR	5.3%	4.6%	−1.1%	3.9%	2.8%	4.5%
			nQR	2.8%	−0.5%	−1.6%	−2.9%	−2.3%	2.5%
	2回目	QR法による差	KC	−10.1%	−9.2%	−19.2%	−26.7%	−21.4%	−20.3%
			nKC	−9.8%	−9.7%	−13.9%	−24.4%	−21.3%	−23.9%
		KC法による差	QR	2.9%	3.7%	−1.4%	−4.6%	1.1%	−0.3%
			nQR	3.3%	3.2%	5.0%	−1.5%	1.1%	−4.8%
10%点	1回目	QR法による差	KC	−11.8%	−12.7%	−17.7%	−25.8%	−24.9%	−22.9%
			nKC	−9.1%	−8.8%	−16.7%	−29.4%	−22.5%	−20.8%
		KC法による差	QR	−7.0%	−10.1%	−3.9%	0.2%	−7.9%	−6.7%
			nQR	−4.2%	−6.1%	−2.8%	−4.7%	−5.0%	−4.2%
	2回目	QR法による差	KC	−12.2%	−9.5%	−18.0%	−22.8%	−19.8%	−21.1%
			nKC	−9.7%	−8.9%	−16.9%	−24.3%	−19.4%	−19.4%
		KC法による差	QR	−8.6%	−8.3%	−1.5%	−1.1%	−6.8%	−8.6%
			nQR	−5.9%	−7.7%	−0.1%	−2.9%	−6.4%	−6.7%

ポートフォリオ2				SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS
1%点	1回目	QR法による差	KC	−9.1%	−8.0%	−9.6%	−13.3%	−8.7%	−10.7%
			nKC	−7.0%	−6.6%	−10.9%	−12.2%	−6.6%	−8.3%
		KC法による差	QR	−9.1%	−8.8%	−4.0%	−1.4%	−7.9%	−6.6%
			nQR	−7.0%	−7.3%	−5.4%	−0.2%	−5.8%	−4.1%
	2回目	QR法による差	KC	−7.2%	−7.5%	−11.1%	−13.3%	−7.4%	−7.9%
			nKC	−7.6%	−6.8%	−10.3%	−11.4%	−6.7%	−6.6%
		KC法による差	QR	−10.6%	−6.6%	−3.2%	−2.5%	−5.9%	−7.3%
			nQR	−11.0%	−5.9%	−2.4%	−0.3%	−5.3%	−6.0%
5%点	1回目	QR法による差	KC	−14.4%	−15.1%	−20.3%	−22.3%	−12.9%	−13.3%
			nKC	−16.5%	−16.5%	−23.0%	−26.5%	−17.4%	−16.5%
		KC法による差	QR	2.9%	6.0%	2.8%	0.2%	8.1%	3.8%
			nQR	0.4%	4.3%	−0.7%	−5.2%	2.5%	0.1%
	2回目	QR法による差	KC	−13.5%	−16.5%	−18.8%	−24.1%	−13.5%	−13.5%
			nKC	−13.9%	−16.0%	−19.1%	−22.4%	−16.8%	−16.1%
		KC法による差	QR	2.9%	6.9%	0.5%	−1.4%	8.9%	2.0%
			nQR	2.5%	7.5%	0.2%	0.9%	4.8%	−1.1%
10%点	1回目	QR法による差	KC	−19.6%	−16.5%	−23.9%	−24.3%	−20.3%	−16.8%
			nKC	−12.9%	−14.8%	−22.5%	−25.4%	−16.4%	−16.2%
		KC法による差	QR	−7.6%	−3.7%	−2.0%	0.0%	−9.7%	−8.7%
			nQR	0.2%	−1.7%	−0.2%	−1.4%	−5.2%	−8.1%
	2回目	QR法による差	KC	−16.1%	−16.8%	−24.7%	−25.1%	−17.2%	−14.5%
			nKC	−13.9%	−13.6%	−20.5%	−23.4%	−13.5%	−14.4%
		KC法による差	QR	−9.9%	−8.7%	−3.2%	−1.8%	−10.9%	−6.2%
			nQR	−7.6%	−5.2%	2.2%	0.5%	−6.9%	−6.1%

表 21：QR 法および KC 法の効果 (ケース 2)

ポートフォリオ 1				SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS
1%点	1 回目	QR 法による差	KC	−6.0%	−6.3%	−9.7%	−14.4%	−11.5%	−10.7%
			nKC	−4.7%	−5.2%	−9.4%	−14.6%	−11.1%	−9.8%
		KC 法による差	QR	−10.2%	−9.7%	−8.3%	−3.3%	−6.9%	−5.9%
			nQR	−9.0%	−8.6%	−8.0%	−3.6%	−6.5%	−4.9%
	2 回目	QR 法による差	KC	−5.8%	−6.2%	−9.8%	−15.0%	−10.4%	−11.3%
			nKC	−3.9%	−4.5%	−8.9%	−14.6%	−11.5%	−10.1%
		KC 法による差	QR	−10.5%	−10.6%	−5.1%	0.6%	−6.7%	−3.8%
			nQR	−8.7%	−8.9%	−4.1%	1.1%	−7.8%	−2.5%
5%点	1 回目	QR 法による差	KC	−9.9%	−8.9%	−17.9%	−27.4%	−23.1%	−23.2%
			nKC	−10.3%	−11.6%	−18.5%	−28.1%	−24.2%	−22.4%
		KC 法による差	QR	−0.7%	1.4%	−1.2%	−1.1%	1.4%	2.2%
			nQR	−1.2%	−1.6%	−1.9%	−2.0%	0.0%	3.4%
	2 回目	QR 法による差	KC	−9.4%	−9.2%	−18.4%	−29.6%	−24.0%	−22.1%
			nKC	−8.6%	−10.0%	−18.6%	−28.5%	−22.2%	−20.6%
		KC 法による差	QR	0.9%	−0.7%	0.3%	−1.6%	−2.3%	0.6%
			nQR	1.8%	−1.6%	0.0%	−0.2%	0.0%	2.6%
10%点	1 回目	QR 法による差	KC	−13.6%	−14.3%	−19.6%	−26.3%	−25.5%	−25.0%
			nKC	−11.0%	−10.3%	−17.8%	−28.0%	−20.8%	−20.5%
		KC 法による差	QR	−10.4%	−13.9%	−2.4%	4.6%	−5.9%	−9.5%
			nQR	−7.7%	−9.9%	−0.3%	2.2%	0.0%	−4.1%
	2 回目	QR 法による差	KC	−11.5%	−11.8%	−18.3%	−26.3%	−20.8%	−22.4%
			nKC	−9.8%	−9.8%	−17.8%	−27.9%	−19.5%	−20.6%
		KC 法による差	QR	−6.5%	−7.8%	−1.4%	6.6%	−1.3%	−4.9%
			nQR	−4.6%	−5.7%	−0.7%	4.3%	0.2%	−2.7%

ポートフォリオ 2				SBC	SCB	BSC	BCS	CSB	CBS
1%点	1 回目	QR 法による差	KC	−8.0%	−8.9%	−12.5%	−13.0%	−8.5%	−8.0%
			nKC	−9.1%	−7.6%	−12.0%	−12.5%	−8.2%	−9.1%
		KC 法による差	QR	−8.0%	−7.7%	−7.5%	−4.9%	−9.4%	−7.2%
			nQR	−9.1%	−6.4%	−7.0%	−4.3%	−9.1%	−8.2%
	2 回目	QR 法による差	KC	−9.9%	−8.5%	−14.4%	−15.2%	−9.6%	−8.8%
			nKC	−7.1%	−6.3%	−12.4%	−12.8%	−7.5%	−6.9%
		KC 法による差	QR	−9.0%	−7.5%	−2.7%	−0.4%	−11.9%	−5.0%
			nQR	−6.2%	−5.3%	−0.5%	2.4%	−9.9%	−3.1%
5%点	1 回目	QR 法による差	KC	−16.1%	−15.3%	−23.4%	−26.6%	−19.1%	−18.1%
			nKC	−16.8%	−15.7%	−22.0%	−25.5%	−17.3%	−15.7%
		KC 法による差	QR	−4.3%	−0.3%	−4.3%	−4.9%	−1.0%	0.8%
			nQR	−5.1%	−0.8%	−2.5%	−3.6%	1.2%	3.8%
	2 回目	QR 法による差	KC	−17.4%	−17.2%	−23.3%	−26.1%	−18.8%	−17.6%
			nKC	−16.8%	−15.3%	−23.6%	−26.2%	−17.6%	−15.4%
		KC 法による差	QR	0.1%	0.6%	1.3%	1.1%	1.6%	0.1%
			nQR	0.7%	2.8%	0.8%	0.9%	3.1%	2.8%
10%点	1 回目	QR 法による差	KC	−18.5%	−19.8%	−26.2%	−27.5%	−19.7%	−17.4%
			nKC	−15.3%	−16.8%	−22.3%	−25.2%	−18.4%	−17.1%
		KC 法による差	QR	−5.0%	−4.3%	−8.8%	−4.5%	−6.3%	−6.0%
			nQR	−1.4%	−0.7%	−3.9%	−1.5%	−4.7%	−5.6%
	2 回目	QR 法による差	KC	−16.1%	−17.4%	−23.0%	−24.6%	−15.0%	−17.0%
			nKC	−13.8%	−15.0%	−22.4%	−25.5%	−15.4%	−15.6%
		KC 法による差	QR	−3.8%	−7.0%	−6.2%	−1.6%	−2.8%	−2.4%
			nQR	−1.2%	−4.3%	−5.5%	−2.7%	−3.2%	−0.7%

C　相関を持つ乱数の生成方法：その他の方法

独立な n 次元標準正規乱数を $X = (X_1, \ldots, X_n)$, X_i は第 i 番目の正規乱数列, C を相関係数行列とする。そのとき、相関を持つ乱数を生成するコレスキー分解以外の方法を示す。QR 法、KC 法ともに、これらの方法にも適用可能である。

C.1　固有値分解

C をスペクトル分解 (spectral decomposition) すると、(15) 式を得ることができる。

$$C = V\Delta V^T = AA^T \tag{15}$$

ここで、V は n 行 n 列の固有ベクトルの直交行列である。すなわち、$V^T V = I$ である。Δ は 行列 C の n 個の固有値を対角要素に置き、その他の要素はすべて 0 である n 行 n 列 の対角行列である。$A = V\Delta^{1/2}$ である。したがって、乱数の生成手順は以下の通りになる。

(1) 相関係数行列 C の固有値、固有ベクトルを求める。

(2) 独立な n 次元標準正規乱数 X を生成する。

(3) $Y = XA^T$ により、相関係数行列 C を持つ標準正規乱数 Y を計算する。

$$C = AA^T = A(X^T X)A^T = (XA^T)^T(XA^T) = Y^T Y$$

【数値例】(13) 式に示した相関係数行列を用いる。

$$V = \begin{bmatrix} 0.6409 & -0.3782 & 0.6680 \\ 0.3555 & 0.9175 & 0.1783 \\ 0.6803 & -0.1232 & -0.7225 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1.8863 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.8965 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2172 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$A = V\Delta^{1/2} = \begin{bmatrix} 0.8803 & -0.3581 & 0.3113 \\ 0.4886 & 0.8687 & 0.0831 \\ 0.9343 & -0.1166 & -0.3367 \end{bmatrix} \tag{17}$$

C.2　特異値分解

C の特異値分解 (singular value decomposition) は (18) 式で表すことができる。

$$C = SQU^T \tag{18}$$

ここで、S と U は n 行 n 列の直交行列である。すなわち、$S^T S = U^T U = I$ である。Q は 行列 C の n 個の特異値を対角要素に置き、その他の要素はすべて 0 である n 行 n 列 の対角行列である。平方対称行列の S と U は一致する。相関係数行列は平方対称行列であるので、C は (19) 式で表すことができる。

$$C = UQU^T = AA^T \tag{19}$$

$A = UQ^{1/2}$ である。したがって、乱数の生成手順は以下の通りになる。

(1) 相関係数行列 C の特異値分解を行い、U と Q を求める。

(2) 独立な n 次元標準正規乱数 X を生成する。

(3) $Y = XA^T$ により、相関係数行列 C を持つ標準正規乱数 Y を計算する。

平方対称行列の場合、固有値分解と同じ結果が得られる。

C.3 QR–KC 法の S 言語での書き方

C を相関係数行列とする。d を次元数とする。n を乱数の数とする。

【 S 言語・主要部分 】

```
p_n/2
A_t(chol(C))                     # コレスキー分解(上三角行列ができるので転値する)
acs_matrix(1,1,d) %*% abs(A)     # 各列の値の絶対値和
y_rnorm(p,0,1)                   # 標準正規乱数の発生(変数1)
w_c(y,-y)                        # 対称変量法
u_w/(var(w)^0.5)                 # moment matching
for(i in 2:d){                   # 変数2〜d
  y_rnorm(p,0,1)                 # 標準正規乱数の発生(変数2〜d)
  w_c(y,-y)                      # 負相関法
  u_cbind(u,w/(var(w)^0.5))      # moment matching
}
# KC 法適用のための乱数系列の順番の交換
v_apply(u,2,kurt)
kv_abs(v-3)
z_matrix(0,n,d)
for(i in 1:d){
  for(j in 1:d){
    if(rank(kv)[i]==d+1-rank(acs)[j]){
      z[,j]_u[,i]
      k[f,j]_v[i]
    }
  }
}
corz_cor(z)                   # 乱数の相関係数の計算
Einv_solve(t(chol(corz)))     # 乱数の相関のコレスキー分解と逆行列の計算
B_A %*% Einv                  # 修正行列の生成
r_z %*% t(B)                  # QR-KC 法適用後の相関を持つ標準正規乱数の生成
```

その他の手法の場合には次のように書き直す。固有値分解と特異値分解は同じ結果が得られる。

(1) **固有値分解の場合**

2**行目**

```
A_eigen(C)                              # 相関係数行列の固有値計算
a_A$vectors %*% diag(A$values^0.5)      # 相関を持たせるための行列の計算
```

26〜28**行目**

```
rz_eigen(corz)                          # 相関係数行列の固有値計算
az_rz$vectors %*% diag(rz$values^0.5)   # 相関を持たせるための行列の計算
Einv_solve(az)                          # 逆行列の計算
B_a %*% Einv                            # 修正行列の生成
r_z %*% t(B)                            # QR-KC法適用後の相関を持つ標準正規乱数の生成
```

(2) **特異値分解の場合**

2**行目**

```
A_svd(C)                       # 相関係数行列の固有値計算
a_A$v %*% diag(A$d^0.5)        # 相関を持たせるための行列の計算
```

26〜28**行目**

```
rz_svd(corz)                   # 相関係数行列の固有値計算
az_rz$v %*% diag(rz$d^0.5)     # 相関を持たせるための行列の計算
Einv_solve(az)                 # 逆行列の計算
B_a %*% Einv                   # 修正行列の生成
r_z %*% t(B)                   # QR-KC法適用後の相関を持つ標準正規乱数の生成
```