

最適資産配分のための  
シミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル  
— 一般的なモデル化の方法、数値実験による考察 —

枇々木 規雄

Technical Report No.2004-002

27, VII, 2004

〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

TEL 045-566-1635

FAX 045-566-1617

E-mail hibiki@ae.keio.ac.jp

# 1 はじめに

年金基金などの長期的な資金運用を行う投資家にとって、様々な実務制約のもとで、多期間にわたる不確実性を考慮した動的投資政策の決定を明示的にモデル化するためには、1期間モデルではなく、多期間モデルを構築する必要がある。多期間ポートフォリオ最適化問題を実際に解くためのモデルとしては、シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルが中心となって発展している。シナリオ・ツリー型モデルは近年、コンピュータの高速化と解法アルゴリズムの発展に伴い、大規模な問題を解くことが可能になり、様々な研究が行われている。詳細は、Mulvey and Ziemba[11, 12]の参考文献を参照されたい<sup>1</sup>。

一方、枇々木[19]は、離散時間で離散分布に従う確率変数をモンテカルロ・シミュレーションにより発生させたパスを利用して不確実性を記述することによって、数理計画問題として定式化が可能なシミュレーション型多期間確率計画モデルを開発している。さらに、枇々木[20]は、シミュレーション・アプローチのもとで、シナリオ・ツリーと同様の条件付き意思決定ができるモデルとして、シミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデルも開発している。

シミュレーション型モデルは、様々なタイプの問題への適用が試みられている。齋藤, 枇々木[15]は銀行ALMに、多田羅, 枇々木[16]は年金ALMに対し、シミュレーション型モデルを用いて定式化を行い、数値実験によりその有用性を検証している。Bogentoft, Romeijn, and Uryasev[2]はオランダの年金基金に対し、混合型モデルの特殊形によって、CVaR(条件付きバリュー・アット・リスク)をリスク尺度に用いたALMモデルを構築し、その有用性を示している。一方、多期間計画問題は大規模な数理計画問題になるため、計算効率も重要な研究課題である。枇々木, 田辺[23]は内点法のナイーブな実装で生じる問題点に対する回避策(Augmented System Approach[8])と他の様々な内点法の実装上の技法、特に一次方程式の解法に対する技法を工夫することによって計算速度を向上させることができることを示している。また、枇々木[22]は、コンパクト表現によって、計算速度を高速化させることができることを示している。他にも、枇々木[21]は、シミュレーション型モデルのモデル化に対し、① サンプルング・エラーの検討、② 投資量関数を用いたモデルによる時系列相関の考慮、③ 1期間ロール・オーバーモデルとの比較、という3つの点について検討している。

本論文の目的は、入力データとしてモンテカルロ・シミュレーションにより生成されたデータを用いつつ、条件付き意思決定を行うことができる多期間確率計画モデルである混合型モデルの一般的な構築方法を再検討し、数値実験によってその特徴を明らかにすることである。枇々木[20]は混合型モデルの考え方の提案とその定式化の方法および簡単な数値例を示しているが、モデルの特徴を十分には検討していなかった。

本論文の構成は以下の通りである。2節では、シミュレーション/ツリー混合型モデルの概要を示し、その定式化を示す。投資量関数を用いたモデルの定式化を示し、投資量関数によって様々な投資戦略を記述できることを示す。また、簡単な数値例も示す。混合型モデルを用いるためにその入力データとして必要な① 資産価格(収益率)シナリオと② 拡張決定ツリーの生成方法をそれぞれ3節と4節で説明する。拡張決定ツリーの生成方法として2つの方法を示し、それらを数値実験によって比較する。5節では① 分岐数の違いによる比較、② 経路数の違いによる比較、③ サ

<sup>1</sup>多期間モデルによるポートフォリオ最適化問題は、Merton[9]とSamuelson[13]によって基本的枠組みが提示されて以来、金融経済学の側面から様々な研究がされている。詳しくは本多[24]を参照してもらおうとして、本論文では数理計画における多期間最適資産配分モデルの構築方法について議論する。

ンプリング・エラーの検討を行う数値実験によってモデルの特徴を分析する。6節では、基本ケース、相関ケースの2種類の基本統計量を用いて生成したシナリオのもとで、数値実験によって3つの取引戦略(投資量決定戦略、投資額決定戦略、投資比率決定戦略)を比較し、戦略の違いによる最適解の特徴を検討する。また、比較を行うに際して、非凸非線形計画問題として定式化される投資比率決定戦略モデルに対する最適解(近似解)を得るための計算アルゴリズムを提案し、その評価を行う。7節では、混合型モデルに対するコンパクト表現の定式化と数値実験例を示す。最後に、8節で結論と今後の課題を述べる。

## 2 モデル化の基本的な考え方、定式化、数値例

### 2.1 投資の意思決定とモデル化

多期間確率計画モデルでは、図1(左)のようなシナリオ・ツリーによって不確実性を離散的に記述し、各ノードにおいて条件付き意思決定を行うモデルが広く使われている。シナリオ・ツリー型多期間確率計画モデルは、離散的な確率変数を用いることによって、定式化上では確定的なパラメータによる数理計画モデルとして記述でき、様々な実務的制約を入れて問題を解くことができる。しかし、不確実性の記述を詳細にしようとする、問題の規模が指数的に増加するという欠点がある。その一方で、問題を大規模にしないためには数少ないシナリオでうまく不確実性を記述しなければいけない難しさもある。

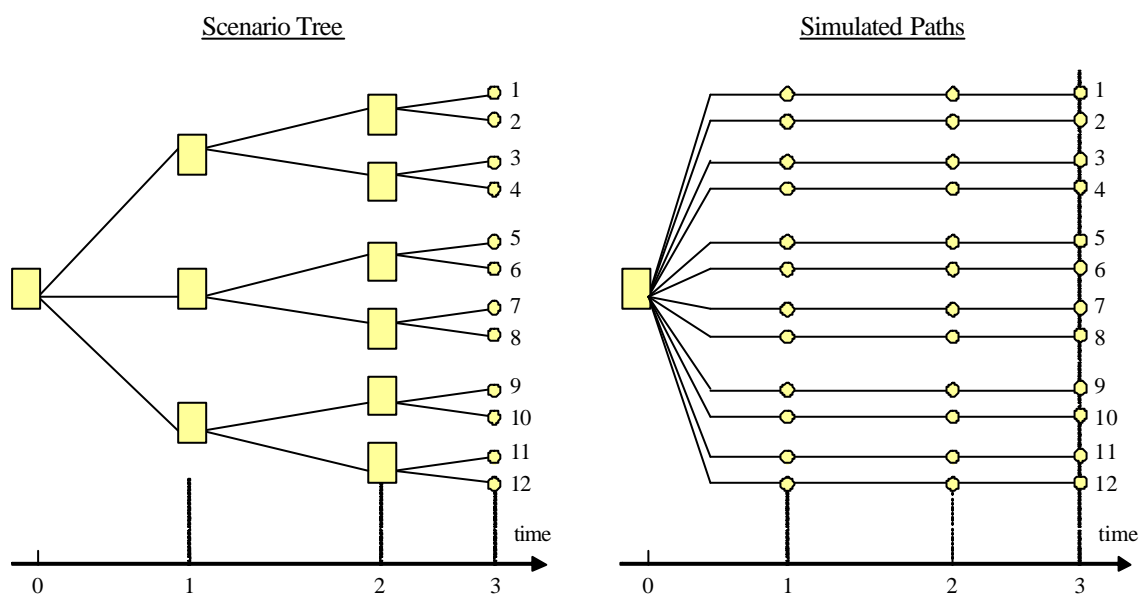


図1：シナリオ・ツリーとシミュレーション経路

一方、将来の資産価格の不確実な変動を図1(右)に示すようなモンテカルロ・シミュレーションによって生成された複数のサンプル・パス(シミュレーション経路)で記述することも広く行われている<sup>2</sup>。確率微分方程式(確率差分方程式)モデルや時系列モデルを作ることができれば、シナリオは、標準的なモンテカルロ・シミュレーションの技法を使うことによって比較的容易に生成できる。

<sup>2</sup>数値的にリスク評価を行う場合には、モンテカルロ・シミュレーションで記述する方が一般的である。

しかし、意思決定の取り扱いに関しては注意が必要である。シミュレーション経路は1本の経路にだけ注目すると、 $t$ 時点の状態の次に発生する $t+1$ 時点の状態は1つしか想定しないからである。そのため、危険資産に対して各状態ごとに意思決定を行うと、確実性下での意思決定となる(不確実性下での意思決定ではなくなる)。投資決定を行う確率計画モデルでは、将来生じる状態を確定的に知っていることを利用して意思決定ができる機会をなくす条件(非予想条件: non-anticipativity condition)が必要である。そこで、不確実性下での意思決定を保ちつつ、条件付き意思決定を可能にするために、経路をツリー構造でいくつかのグループに分けていき、そのグループに属する経路では同一の投資決定に従わせるモデル化の方法を考える。ただし、シミュレーション経路の各状態における現金の保有額は同一になることを要求しない。なぜならば、現金の収益率は金利であり、投資時点で決定される(投資決定時点においては無リスクである)からである。このモデルをシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル(簡単のため、混合型モデル; hybrid model)と呼ぶ。また、条件付き意思決定を表すツリーをシナリオ・ツリーや通常の決定ツリーと区別するために、拡張決定ツリー(extended decision tree)と呼ぶ。たとえば、3期間問題で、シミュレーション経路が12本、1時点で3ノード(3通りの意思決定)、2時点でさらに2ノードに分かれる(計6通りの意思決定の)拡張決定ツリーを生成することを考えよう。この場合、図2(左)のように、同一の意思決定を行うノードでシミュレーション経路を束ねていき、図2(右)に示す拡張決定ツリーを生成する。図2(右)はツリーをイメージするための図であり、両方の図は同じことを表す。これを3-2 ツリー(3-2 branching tree)と呼ぶ。

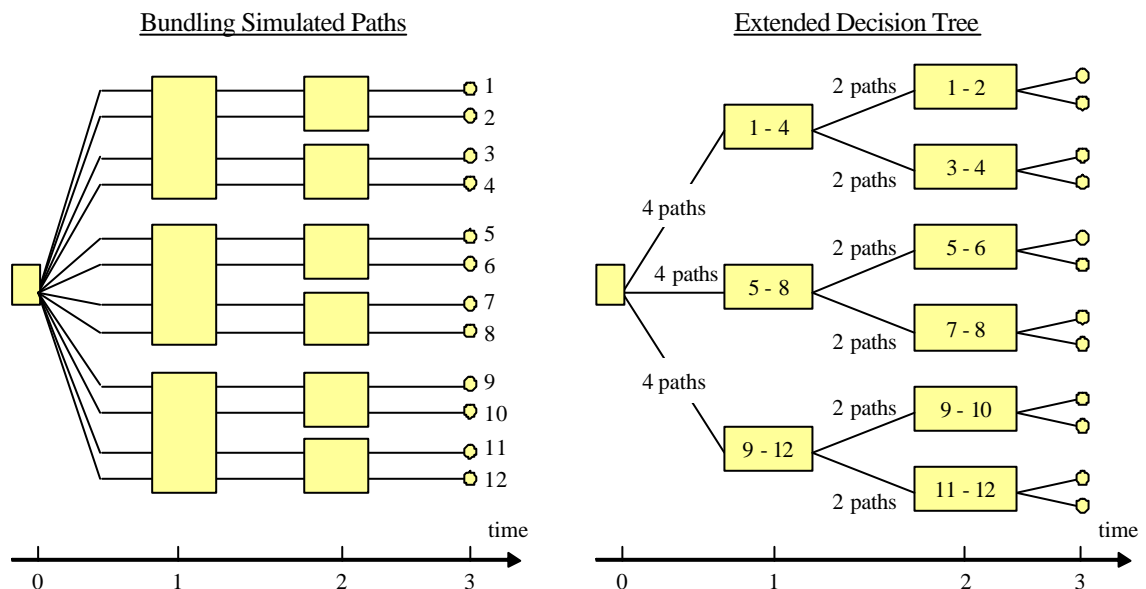


図 2 : シミュレーション経路と拡張決定ツリー

1時点、2時点、3時点ともに不確実な状態の数は12個に保たれているが、価格の変動によって1時点では3通りの条件付き意思決定、2時点ではそれぞれさらに2通り(合計6通り)の条件付き意思決定を行うことができる。より詳しい拡張決定ツリーの生成方法は、4節で議論する。

ノードで表されるグループに属する状態に対して同一の意思決定を行うとは、ノードごとに設定される決定変数の値をその中のすべての状態に適用させることを表す。決定変数として、投資比率、投資額、投資量(投資単位数)を用いることによって取引戦略の違うモデル化を行うことが

できる<sup>3</sup>。一般に、決定変数が異なれば、異なるモデルを設定する必要があるが、ここでは投資量関数を用いることにより共通のモデルで定式化できる方法を提案する。

ノード内で同一の投資比率を適用する場合、各状態において投資比率は同じ値をとるが、投資額や投資量は異なる値をとる。すなわち、投資比率に関しては同一の値を用いた意思決定を行うことになるが、投資額や投資量に関しては同一でない値を用いた意思決定も許している。このことは各ノード内で同一の投資比率をとるという投資ルールさえ与えておけば、各ノード内の投資量は異なる値をとったとしても非予想条件を保つことができることを表す。非予想条件を保つために同一の投資ルールを適用すれば、各ノード内の投資量は異なる値をとってもよいと一般的に考えることができる。したがって、投資量を決める(投資ルールを表す)関数を用いて、経路ごとに異なる投資量の値をとるモデル化が可能である。この関数を投資量関数(investment unit function)と呼び、投資量のベースを表す基礎変数の関数として記述する<sup>4</sup>。基礎変数が最適化モデルでは決定変数となる。異なる投資量関数を用いることにより、様々な取引戦略を記述することができる。投資比率、投資額、投資量はそれぞれ資産の価格もしくは収益率によって関連付けることができるので、投資量関数を用いて各ノード内で同一の投資比率もしくは同一の投資額を持つような投資戦略をとる(意思決定を示す)ことも可能である。以降は、投資量関数を用いた定式化の方法を示す。

## 2.2 モデルの定式化

混合型モデルを用いた資産配分問題を記述する。 $n$  個の危険資産( $j = 1, \dots, n$ ) と現金( $j = 0$ ) に資金を配分する問題を考える。資産0を現金(安全資産)、資産1 ~ 資産 $n$  を危険資産とする対象資産数が  $n + 1$  個の資産配分問題である。0時点を投資開始時点、 $T$  時点を計画最終時点とする。「同一意思決定を行うノード」を簡単のために「決定ノード」と呼ぶ。

リターン尺度には計画最終時点における富(最終富)の期待値(期待最終富)、リスク尺度には計画最終時点における富の1次の下方部分積率を設定する。下方部分積率とは富の目標水準(目標富)を下回る大きさ(富の不足分)をリスクと考える下方リスク尺度の1つである(Bawa and Lindenberg[1], Harlow[7])。  $W_T^{(i)}$  を経路  $i$  における最終富、  $W_G$  を目標富、  $I$  を経路数、次数  $k$  をリスク選好の度合いを表すパラメータとすると、離散データを用いた場合の下方部分積率  $LPM_k$  は、(1)式のように記述できる<sup>5</sup>。

$$LPM_k \equiv \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I |W_T^{(i)} - W_G|_-^k \quad (1)$$

ここで、  $|a|_- = \max(-a, 0)$  である。以降のモデルでは、線形計画問題として記述するために、1次( $k = 1$ )の下方部分積率を用いる<sup>6</sup>。

<sup>3</sup>シナリオ・ツリー型モデルの場合には、投資比率、投資額、投資量(投資単位数)のうち、どれを用いても同じ最適解を得ることができるので、取引戦略を考える必要はない。

<sup>4</sup>詳細は、2.2.2項で説明する。投資比率、投資額を用いた関数でも同様に記述できる。

<sup>5</sup>最終富  $\tilde{W}_T$  が連続分布  $f(\tilde{W}_T)$  に従うときの下方部分積率は以下のように記述できる。

$$LPM_k \equiv \int_{-\infty}^{W_G} (W_G - \tilde{W}_T)^k f(\tilde{W}_T) d\tilde{W}_T$$

<sup>6</sup>2次以上にしても凸計画問題として記述できるので、大域的最適解の導出は保証される。

## 2.2.1 記号

### (1) 集合および添字

$i$  : 経路(パス)を表す添字。

$s$  : 決定ノードを表す添字で、時点( $t$ )とともに記述する。

$s'$  : 任意の時点の決定ノード  $s$  につながっている1時点前の決定ノードを表す添字。

$V_t^s$  :  $t$  時点の決定ノード  $s$  に含まれる経路の集合。 $|V_t^s|$  は  $t$  時点の決定ノード  $s$  に含まれる経路数を表す。

$S_t$  :  $t$  時点の決定ノード  $s$  の集合。

### (2) パラメータ

$I$  : 経路の本数

$\rho_{j0}$  : 0時点の危険資産  $j$  の価格。 $(j = 1, \dots, n)$

$\rho_{jt}^{(i)}$  :  $t$  時点の経路  $i$  の危険資産  $j$  の価格。 $(j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I)$

$r_0$  : 期間 1 の金利(0 時点のコールレート)。

$r_{t-1}^{(i)}$  : 期間  $t$  の経路  $i$  の金利( $t-1$  時点のコールレート)。 $(t = 2, \dots, T; i = 1, \dots, I)$

$W_0$  : 0時点での富(初期富)。

$W_G$  : 計画最終時点での目標富。

$W_E$  : 計画最終時点で投資家が要求する期待富。

$\gamma$  : リスク回避係数。

### (3) 決定変数

$z_{j0}$  : 0 時点の危険資産  $j$  への投資量。 $(j = 1, \dots, n)$

$z_{jt}^s$  :  $t$  時点の決定ノード  $s$  の危険資産  $j$  への投資量のベースを表す決定変数。  
 $(j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t)$

$W_t^{(i)}$  :  $t$  時点の経路  $i$  の富。 $(t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I)$

$q^{(i)}$  : 計画最終時点の経路  $i$  の富の目標富に対する不足分。 $(i = 1, \dots, I)$

$v_0$  : 0 時点の現金(コール運用額)。

$v_t^{(i)}$  :  $t$  時点の経路  $i$  の現金(コール運用額)。 $(t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$

## 2.2.2 投資量関数を用いたモデルの定式化

1時点以降の投資量を状態(経路  $i$ ) ごとに変えることができるように、 $z_{jt}^s$  の投資量関数  $h^{(i)}(z_{jt}^s)$  を以下のように定義する<sup>7</sup>。ここで、 $a_{jt}^{(i)}$  を投資量パラメータとする。

<sup>7</sup> $h^{(i)}(\cdot)$  の上付き添字  $i$  は関数形が経路  $i$  ごとに異なることを表すのではなく、とりうる値が経路  $i$  ごとに異なることを表す。(2)式の場合、 $h(z_{jt}^s, a_{jt}^{(i)})$  と記述するのが正確な表現であるが、 $z_{jt}^s$  が決定変数であることを明示し、投資量が経路ごとに異なることを強調するために、このように定義する。

また、複数( $K$ 個)の投資量のベースを表す決定変数  $z_{jt,k}^s$  を用いて、以下のように投資量関数を定義してもよい。

$$h^{(i)}(z_{jt,k}^s) = \sum_{k=1}^K a_{jt,k}^{(i)} z_{jt,k}^s$$

$$h^{(i)}(z_{jt}^s) = a_{jt}^{(i)} z_{jt}^s \quad (2)$$

ただし、非予想条件を保つために、 $a_{jt}^{(i)}$  の値は、 $t$  時点以降の経路  $i$  の (個々の経路の) 収益率に依存して設定してはいけない。

様々な投資戦略に対する投資量関数を以下に示す<sup>8</sup>。

(1) 投資量決定戦略 :  $h^{(i)}(z_{jt}^s) = z_{jt}^s$

各ノードにおける危険資産  $j$  への投資量が同一になるようにリバランス (取引) を行う。各経路において異なる富と危険資産への投資額の違いはすべて現金で保有する。シミュレーション経路の各時点、各状態における現金の保有額は同一ではない。

(2) 投資額決定戦略 :  $h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left( \frac{\rho_{j0}^{(i)}}{\rho_{jt}^{(i)}} \right) z_{jt}^s$

各ノードにおける危険資産  $j$  への投資額が同一になるようにリバランス (取引) を行う。各経路において異なる富と危険資産への投資額の違いはすべて現金で保有する。シミュレーション経路の各時点、各状態における現金の保有額は同一ではない<sup>9</sup>。

(3) 投資比率決定戦略 :  $h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left( \frac{W_t^{(i)}}{\rho_{jt}^{(i)}} \right) z_{jt}^s$

各ノードにおける危険資産  $j$  への投資比率が同一になるようにリバランス (取引) を行う。現金の保有比率も同一になる。

投資量決定戦略と投資額決定戦略は2.2.3項に示す定式化において線形計画問題として記述できる。しかし、投資比率決定戦略は、 $W_t^{(i)}$  は決定変数の関数となるため、非凸非線形計画問題となる。その他の投資戦略として、順バリ戦略と逆バリ戦略の例を示す。

(4) 順バリ戦略 : 価格が上昇 (下落) したら、それに応じて投資量も増やす (減らす)。

$$\text{(例)} \quad a_{jt}^{(i)} = 1 + \mu_{jt}^{(i)} = \frac{\rho_{jt}^{(i)}}{\rho_{j,t-1}^{(i)}} ; h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left( 1 + \mu_{jt}^{(i)} \right) z_{jt}^s$$

ここで、 $\mu_{jt}^{(i)}$  は 期間  $t$  の経路  $i$  の危険資産  $j$  の収益率を表す。

(5) 逆バリ戦略 : 価格が下落 (上昇) したら、それに応じて投資量も増やす (減らす)。

$$\text{(例)} \quad a_{jt}^{(i)} = \frac{1}{1 + \mu_{jt}^{(i)}} = \frac{\rho_{j,t-1}^{(i)}}{\rho_{jt}^{(i)}} ; h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left( \frac{1}{1 + \mu_{jt}^{(i)}} \right) z_{jt}^s$$

<sup>8</sup> 投資量関数ではなく、投資額のベースを表す決定変数  $x_{jt}^s$  を用いた投資額関数で記述するならば、各投資戦略は以下のように表すことができる。2.2.3 項においては  $h^{(i)}(z_{jt}^s)$  ではなく、 $h^{(i)}(x_{jt}^s)$  による定式化を行う必要がある。

(1) 投資量決定戦略 :  $h^{(i)}(x_{jt}^s) = \left( \frac{\rho_{jt}^{(i)}}{\rho_{j0}^{(i)}} \right) x_{jt}^s$

(2) 投資額決定戦略 :  $h^{(i)}(x_{jt}^s) = x_{jt}^s$

(3) 投資比率決定戦略 :  $h^{(i)}(x_{jt}^s) = \left( \frac{W_t^{(i)}}{\rho_{j0}^{(i)}} \right) x_{jt}^s$

<sup>9</sup>  $t$  時点の価格  $\rho_{jt}^{(i)}$  が下落 (上昇) したら、それに応じて投資量も増やす (減らす) という一種の逆バリ戦略である。

### 2.2.3 定式化

配分決定のための制約条件式、およびそれを用いた各時点の富の計算式を以下に示す。

(1) 0時点での配分決定： $z_{j0}, v_0$

初期富  $W_0$  を用いて、価格  $\rho_{j0}$  の危険資産  $j$  に  $z_{j0}$  単位投資し、残りを現金  $v_0$  で運用する。

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \quad (3)$$

(2) 0時点の配分決定による1時点の経路  $i$  の富 ( $i = 1, \dots, I$ )

0時点で  $z_{j0}$  単位投資している危険資産  $j$  の1時点での価格は  $\rho_{j1}^{(i)}$  であるので、その価値は  $\rho_{j1}^{(i)} z_{j0}$  となる。すべての危険資産に対する合計と0時点からの現金  $v_0$  の運用分  $(1+r_0)v_0$  を足し合わせたものが1時点での富になる。

$$W_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1+r_0)v_0 \quad (4)$$

(3)  $t-1$  時点の配分決定 ( $h^{(i)}(z_{j,t-1}^{s'}), v_{t-1}^{(i)}$ ) による  $t$  時点の経路  $i$  の富

$$(t = 2, \dots, T; s' \in S_{t-1}; i \in V_{t-1}^{s'})$$

同様に、 $t$  時点の経路  $i$  の富は  $t-1$  時点での配分決定をもとにして (5) 式で表すことができる。

$$W_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{j,t-1}^{s'}) + (1+r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} \quad (5)$$

$$(t-1 \text{ 時点の配分決定}) \quad \sum_{j=1}^n \rho_{j,t-1}^{(i)} h^{(i)}(z_{j,t-1}^{s'}) + v_{t-1}^{(i)} = W_{t-1}^{(i)} \quad (6)$$

特に、 $t = T$  のときは、計画最終時点 ( $T$  時点) における経路  $i$  の富を表し、(7) 式で表すことができる。

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} h^{(i)}(z_{j,T-1}^{s'}) + (1+r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \quad (7)$$

また、(4)~(6) 式をまとめると、(8), (9) 式で記述できる。

$$W_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1+r_0)v_0 = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} h^{(i)}(z_{j1}^s) + v_1^{(i)}, \quad (s \in S_1; i \in V_1^s) \quad (8)$$

$$W_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{j,t-1}^{s'}) + (1+r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jt}^s) + v_t^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T-1; s \in S_t; i \in V_t^s) \quad (9)$$

(4) 目的関数

以下の2種類のタイプのどちらかを用いる。



① ER モデル

計画最終時点での富(最終富)の期待値をある一定以上にするという制約((13)式)のもとで、最終富の1次の下方部分積率を最小化する<sup>10</sup>。

$$\text{Minimize } \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (10)$$

$$\text{subject to } W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (11)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (12)$$

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \geq W_E \quad (13)$$

② EU モデル

計画最終時点での富(最終富)の期待値から最終富の1次の下方部分積率の  $\gamma$  倍を差し引いた目的関数を最大化する。

$$\text{Maximize } \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} - \gamma \left( \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \right) \quad (14)$$

$$\text{subject to } (11), (12) \text{ 式} \quad (15)$$

ER モデルの定式化をまとめて記述すると、以下のようになる。

$$\text{Minimize } \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (16)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \quad (17)$$

$$(W_1^{(i)} =) \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} h^{(i)}(z_{j1}^s) + v_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1 + r_0) v_0, \quad (s \in S_1; i \in V_1^s) \quad (18)$$

$$(W_t^{(i)} =) \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jt}^s) + v_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{j,t-1}^{s'}) + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T-1; s \in S_t; i \in V_t^s) \quad (19)$$

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} h^{(i)}(z_{j,T-1}^{s'}) + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)}, \quad (s' \in S_{T-1}; i \in V_{T-1}^{s'}) \quad (20)$$

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \geq W_E \quad (21)$$

$$W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (22)$$

$$z_{j0} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (23)$$

$$z_{jt}^s \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (24)$$

<sup>10</sup>(10) ~ (12) 式によって

$$\text{Minimize } \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I |W_T^{(i)} - W_G|_-$$

を表すことができる。

$$v_0 \geq 0 \quad (25)$$

$$v_t^{(i)} \geq 0, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (26)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (27)$$

このモデルを解くと、最適解  $z_{j0}^*, z_{jt}^{s*}, v_0^*, v_t^{(i)*}$  が求められる<sup>11</sup>。それらを用いて、危険資産  $j$  への投資額や各資産の投資比率は以下のように計算することができる。

### 投資額<sup>12</sup>

- 0 時点の危険資産  $j$  への投資額 :  $\rho_{j0} z_{j0}^*, (j = 1, \dots, n)$
- $t$  時点の経路  $i$  の危険資産  $j$  への投資額 :  $\rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jt}^{s*})$   
 $(j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t; i \in V_t^s)$

### 投資比率<sup>13</sup>

- 0 時点の危険資産  $j$  の投資比率 :  $\frac{\rho_{j0} z_{j0}^*}{W_0}, (j = 1, \dots, n)$
- 0 時点の現金 (コール運用) の比率 :  $\frac{v_0^*}{W_0}$
- $t$  時点の経路  $i$  の危険資産  $j$  の投資比率 :  $\frac{\rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jt}^{s*})}{W_t^{(i)*}}$   
 $(j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t; i \in V_t^s)$
- $t$  時点の経路  $i$  の現金 (コール運用) の比率 :  $\frac{v_t^{(i)*}}{W_t^{(i)*}}, (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$

## 2.2.4 対象資産に現金を含める必要性

混合型モデルでは投資比率決定戦略を採らない限り、モデルの構造上、期中において現金への投資を必要とする。したがって、投資量決定戦略や投資額決定戦略では、期中での現金を決定変数として設定しなければならない。この理由はシミュレーション経路上で非予想条件を保つために、各経路において異なる富と危険資産への投資額の違いをすべて現金で保有する必要があるからである (各シミュレーション経路上で現金は異なる)。ただし、0 時点においては必ずしも設定しなくてよい<sup>14</sup>。資産配分問題においては現金を対象資産として含める場合がほとんどであるので、現金を含む定式化を行わなければならないことはそれほど大きな問題ではない。しかし、期中において現金への投資を必要とすることは (内包された) 制約と考えてよいので、この条件には注意が必要である。6.2節の数値実験において、内包する制約がどの程度効くかどうかについて検討を行う。

<sup>11</sup> 決定変数に  $*$  (アスタリスク) が付いている場合には最適解を表す。

<sup>12</sup> 投資量関数として、 $h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left( \frac{\rho_{j0}}{\rho_{jt}^{(i)}} \right) z_{jt}^s$  を用いると、 $t$  時点の経路  $i$  の危険資産  $j$  への投資額は  $\rho_{j0} z_{jt}^{s*}$  となり、決定ノード内の各経路の投資額は同一になる。

<sup>13</sup> 投資量関数として、 $h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left( \frac{W_t^{(i)}}{\rho_{jt}^{(i)}} \right) z_{jt}^s$  を用いると、 $t$  時点の経路  $i$  の危険資産  $j$  の投資比率は  $z_{jt}^{s*}$  となり、決定ノード内の各経路の投資比率は同一になる。危険資産の投資比率が同一になるので、結果的に現金の比率も同一になる。

<sup>14</sup> 0 時点では状態は一つである (確定している) ので、現金もある一つの値に決まるため、現金を投資対象からはずすことができる (現金を持たないと制約を置くことができる)。詳しくは、枇々木 [19] を参照されたい。

## 2.3 追加的な制約式

実務制約には様々なものが考えられるが、ここではよく使われる2種類の制約条件を示し、線形制約式へ書き換える。

### (1) 組み入れ比率の上下限制約

各資産に対して投資が可能な組み入れ比率の制約式を設定する。1時点以降の各資産に対する投資比率はシミュレーション経路ごとに異なるが、ここでは各決定ノードごとの平均投資比率に対して制約式を設定する。

$$\text{現金 : (0 時点) } L_{00}^I \leq \frac{v_0}{W_0} \leq U_{00}^I \quad (28)$$

$$(t \text{ 時点) } L_{0t}^I \leq \frac{\bar{v}_t^s}{\bar{W}_t^s} \leq U_{0t}^I, (t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (29)$$

$$\text{危険資産 : (0 時点) } L_{j0}^I \leq \frac{\rho_{j0} z_{j0}}{W_0} \leq U_{j0}^I, (j = 1, \dots, n) \quad (30)$$

$$(t \text{ 時点) } L_{jt}^I \leq \frac{\frac{1}{|V_t^s|} \sum_{i \in V_t^s} \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jt}^s)}{\bar{W}_t^s} \leq U_{jt}^I, \\ (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (31)$$

ここで、 $\bar{v}_t^s (= \frac{1}{|V_t^s|} \sum_{i \in V_t^s} v_t^{(i)})$ ,  $\bar{W}_t^s (= \frac{1}{|V_t^s|} \sum_{i \in V_t^s} W_t^{(i)})$  はそれぞれ決定ノードごとの現金の平均値

と富の平均値を表す。投資量関数  $h^{(i)}(z_{jt}^s) = a_{jt}^{(i)} z_{jt}^s$  を代入し、 $\bar{a}_{jt}^s = \frac{1}{|V_t^s|} \sum_{i \in V_t^s} \rho_{jt}^{(i)} a_{jt}^{(i)}$  とすると、

(28) ~ (31) 式は以下のように線形式に書き直すことができる。

$$\text{現金 : (0 時点) } L_{00}^I W_0 \leq v_0 \leq U_{00}^I W_0 \quad (32)$$

$$(t \text{ 時点) } L_{0t}^I \bar{W}_t^s \leq \bar{v}_t^s \leq U_{0t}^I \bar{W}_t^s, (t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (33)$$

$$\text{危険資産 : (0 時点) } L_{j0}^I W_0 \leq \rho_{j0} z_{j0} \leq U_{j0}^I W_0, (j = 1, \dots, n) \quad (34)$$

$$(t \text{ 時点) } L_{jt}^I \bar{W}_t^s \leq \bar{a}_{jt}^s z_{jt}^s \leq U_{jt}^I \bar{W}_t^s, (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (35)$$

### (2) 危険資産の売買回転率の上限制約

各資産をリバランスするとき可能な投資比率に関する売買回転率の上限を設定する。売買回転率は平均投資比率で定義する。

$$\left| \frac{\frac{1}{|V_t^s|} \sum_{i \in V_t^s} \rho_{jt}^{(i)} \{h^{(i)}(z_{jt}^s) - h^{(i)}(z_{j,t-1}^s)\}}{\bar{W}_t^s} \right| \leq U_{jt}^T, (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (36)$$

$\bar{b}_{jt}^s = \frac{1}{|V_t^s|} \sum_{i \in V_t^s} \rho_{jt}^{(i)} a_{j,t-1}^{(i)}$  とすると、(36) 式は以下のように線形式に書き直すことができる。

$$-U_{jt}^T \bar{W}_t^s \leq \bar{a}_{jt}^s z_{jt}^s - \bar{b}_{jt}^s z_{j,t-1}^s \leq U_{jt}^T \bar{W}_t^s, (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (37)$$

投資量決定戦略 ( $a_{jt}^{(i)} = 1$ ) の場合、 $\bar{a}_{jt}^s$  と  $\bar{b}_{jt}^s$  はともに決定ノードごとの平均資産価格  $\bar{p}_{jt}^s$

$(= \frac{1}{|V_t^s|} \sum_{i \in V_t^s} \rho_{jt}^{(i)})$  を表す。その場合、(37)式は以下のように書くことができる。

$$-U_{jt}^T \bar{W}_t^s \leq \bar{\rho}_{jt}^s (z_{jt}^s - z_{j,t-1}^s) \leq U_{jt}^T \bar{W}_t^s, (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (38)$$

## 2.4 数値例

本論文の数値実験は、特に断りのない限り、以下のような設定条件のもとで、4期間、4資産問題に対して行う ( $T = 4, n + 1 = 4$ )。計算機は IBM ThinkPad, Pentium IV 1.8GHz, 768MB メモリ、数理計画ソフトウェアは NUOPT Ver. 5.1.0a((株)数理システム)を用いる。

- 4つの対象資産は、株式 (stock)、債券 (bond)、転換社債 (CB)、現金 [コール運用] (cash) である。
- 初期時点での資産価格はすべて 1 とする (一般性を失わない)。また、コールレートの初期金利は、0.44%(1期間) とする。
- 初期 (時点の) 富 ( $W_0$ ) は 1 億円とする。
- 計画期末 (4時点後) の目標富 ( $W_G$ ) は 1 億円とする。
- 5.1節の分岐数による比較実験を除き、決定ノードの分岐数は、1時点を 5個、2時点を 4個、3時点を 3個とする (5-4-3 ツリー)。決定ノード数は、1時点が 5個、2時点が 20個、3時点が 60個となる。
- 2.5節の計算時間、4.3節の拡張決定ツリーの生成方法の違いによる比較実験、5.2節の経路数による比較実験、5.3節のサンプリング・エラーの実験を除き、経路数は 10,000本とする。

ここでは、3節に示す表1の基本ケースのデータを用いて、投資量決定戦略による ER モデルで問題を解いた場合の最適解の例を示す。 $W_E = 10,340$  の場合の最適投資量を図3、最適平均投資比率を図4に示す。図4は、最適投資量を用いて計算した投資比率の平均値である。具体的には以下の計算値である。

$$\begin{aligned} \text{現金} &: \frac{v_0^*}{W_0}, \frac{\bar{v}_t^{s*}}{\bar{W}_t^{s*}}, (t = 1, 2, 3) \\ \text{危険資産} &: \frac{\rho_{j0} z_{j0}^*}{W_0}, (j = 1, 2, 3), \frac{\bar{\rho}_{jt} z_{jt}^{s*}}{\bar{W}_t^{s*}}, (j = 1, 2, 3; t = 1, 2, 3; s \in S_t) \end{aligned}$$

最適投資量、最適平均投資比率はシナリオ・ツリー型モデルと同じように、各ノードごとに意思決定が異なる条件付き意思決定として求められる。また、図5(左)に効率的フロンティアを示す。投資家はこの効率的フロンティアをもとにして、リスクとリターンの関係を考え、最適な投資決定を行うことができる。図5(右)は、 $W_E = 10,280, 10,340, 10,385$  の場合の最終富の累積分布関数を示す。これらに対する効率的フロンティア上の3点は、この分布の期待値 (リターン尺度) と  $LPM_1$  (リスク尺度) を計算し、描いたものである。 $W_E$  が大きくなるにつれて、分布が広がり、 $W_G$  を下回る部分が増加し、リスクの大きい投資決定を行うことができる。

図6に様々な  $W_E$  (最小値、最大値を除き<sup>15</sup>、10万円刻み) に対する各時点の平均投資比率の推移を示す。 $W_E$  の値が大きくなるにつれて、より安全な資産である現金や債券の比率が下がり、より危険な資産である CB や株式に推移する。また、投資量決定戦略では、各経路での富と危険資

<sup>15</sup>期待最終富の最小値は 10,237.5万円、最大値は 10,404.3万円である。

産への投資額の違いはすべて現金で保有する必要があるため、 $W_E$  を大きく設定した場合でも1時点以降、ある程度の現金を持つことになる。

Cash				Stock				Bond				CB			
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1,140	4,985	402	339	437	225	0	0	5,978	4,695	9,583	9,673	2,445	0	0	0
			321				0				9,677				0
			345				0				9,275				349
		325	280			0	0			9,624	9,686			0	0
			327				0				9,629				0
			255				0				8,441				1,279
		1,833	332			0	0			7,120	9,630			1,000	0
			3,081				344				6,527				0
			244				0				8,509				1,163
		298	6,802			0	0			6,412	3,132			3,215	0
			1,770				0				8,149				14
			925				0				1,261				7,785
	4,268	3,747	387	1,152	0	0	0	4,576	6,238	9,703	9,703	0	0	0	0
			6,333				0				3,659				0
			324				0				9,165				460
		2,656	5,377		600	0	0			6,749	4,636			0	0
			760				0				9,238				0
			540				0				4,702				4,755
		178	445			0	0			7,140	9,534			2,667	0
			221				1,705				7,335				719
			834				0				0				9,235
		331	7,798			0	0			5,411	2,252			4,190	0
			3,924				0				2,474				3,649
			936				1,041				0				7,932
	369	8,426	597	1,035	0	0	0	7,832	1,527	9,498	9,498	766	0	0	0
			5,209				16				4,769				0
			7,084				0				16				2,914
		3,298	1,815		1,484	0	0			5,252	8,228			0	0
			318				0				5,694				3,985
			1,509				0				2,913				5,587
		315	317			0	491			5,057	9,208			4,617	0
			609				0				9,441				0
			588				0				2,169				7,214
		809	907			0	0			548	9,150			8,591	0
			493				0				2,610				6,883
			1,358				5,669				0				2,880
	121	7,018	523	0	1,223	0	0	5,621	1,769	9,556	9,556	4,237	0	0	0
			592				0				9,398				0
			393				0				4,299				5,196
		3,963	1,078			1,281	0			4,834	9,050			0	0
			517				0				9,530				0
			823				0				0				9,048
		1,692	2,781			1,880	0			3,844	7,335			2,590	0
			3,533				1,668				2,614				2,255
			753				2,139				0				7,024
		704	6,479			0	3,644			0	0			9,183	0
			532				1,817				904				6,626
			859				3,398				0				5,618
	670	9,241	906	0	199	235	235	0	679	8,992	8,992	9,166	0	0	0
			691				3,234				4,499				1,559
			788				0				0				8,938
		6,599	906			3,546	724			0	8,554			0	0
			624				0				5,295				4,082
			622				1,660				0				7,482
		3,801	7,694			3,042	2,568			0	0			3,187	0
			1,728				6,205				0				1,916
			509				0				0				9,287
		992	4,362			4,720	5,667			0	0			4,052	0
			696				1,195				0				7,944
			1,745				8,022				0				0

図 3 : 最適投資量

Cash				Stock				Bond				CB			
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
11.4%	50.6%	4.1%	3.5%	4.4%	2.2%	0.0%	0.0%	59.8%	47.2%	95.9%	96.5%	24.5%	0.0%	0.0%	0.0%
			3.2%				0.0%				96.8%				0.0%
			3.4%				0.0%				93.2%				3.3%
			3.3%				0.0%				96.7%				0.0%
			2.5%				0.0%				85.1%				12.4%
			18.4%				0.0%				96.6%				9.8%
			30.8%				3.4%				65.9%				0.0%
			2.4%				0.0%				86.1%				11.5%
			3.0%				0.0%				31.7%				32.0%
			17.5%				0.0%				82.4%				0.1%
			9.0%				0.0%				12.8%				78.2%
			42.7%				11.4%				96.1%				0.0%
			37.8%				0.0%				36.6%				0.0%
			63.4%				0.0%				92.3%				4.5%
			3.2%				0.0%				46.1%				0.0%
			26.5%				5.9%				92.5%				0.0%
			7.5%				0.0%				47.5%				47.2%
			5.3%				0.0%				95.6%				26.5%
			1.8%				0.0%				73.5%				7.2%
			4.4%				17.1%				0.0%				91.9%
			2.2%				0.0%				22.7%				42.3%
			8.1%				0.0%				24.8%				37.0%
			3.3%				0.0%				0.0%				80.4%
			38.2%				10.7%				78.3%				7.7%
			9.0%				0.0%				15.3%				0.0%
			3.7%				0.0%				94.0%				0.0%
			84.7%				0.2%				47.7%				0.0%
			6.0%				0.0%				0.2%				29.3%
			52.1%				0.0%				81.9%				0.0%
			70.5%				14.8%				57.0%				39.9%
			32.7%				0.0%				29.2%				56.1%
			18.1%				0.0%				92.0%				46.4%
			3.1%				4.9%				21.6%				72.7%
			14.7%				0.0%				91.1%				86.7%
			3.1%				0.0%				26.0%				69.3%
			5.9%				58.2%				0.0%				29.2%
			5.7%				0.0%				94.1%				0.0%
			7.8%				0.0%				43.4%				52.8%
			4.7%				0.0%				89.4%				0.0%
			12.7%				0.0%				94.9%				0.0%
			5.2%				0.0%				0.0%				92.0%
			1.2%				12.2%				26.0%				26.2%
			5.9%				0.0%				0.0%				22.8%
			3.9%				13.0%				8.9%				71.1%
			38.9%				0.0%				0.0%				93.2%
			10.6%				0.0%				88.7%				67.3%
			5.1%				0.0%				44.7%				56.9%
			8.0%				32.8%				0.0%				15.8%
			16.5%				0.0%				83.9%				92.3%
			27.3%				7.3%				52.3%				41.7%
			34.2%				0.0%				0.0%				76.8%
			7.2%				17.3%				0.0%				32.5%
			6.8%				26.3%				0.0%				0.0%
			62.4%				64.2%				0.0%				19.6%
			5.1%				0.0%				0.0%				95.3%
			7.9%				18.7%				0.0%				81.2%
			9.0%				35.2%				0.0%				0.0%
			6.5%				0.0%				0.0%				0.0%
			91.2%				2.0%				44.7%				0.0%
			6.8%				32.8%				0.0%				0.0%
			9.0%				0.0%				83.9%				0.0%
			6.8%				0.0%				52.3%				0.0%
			7.7%				36.2%				0.0%				0.0%
			63.8%				7.3%				0.0%				0.0%
			8.8%				0.0%				0.0%				0.0%
			6.0%				17.3%				0.0%				0.0%
			5.9%				31.3%				0.0%				0.0%
			36.1%				26.3%				0.0%				0.0%
			73.7%				64.2%				0.0%				0.0%
			16.3%				0.0%				0.0%				0.0%
			4.7%				49.3%				0.0%				0.0%
			9.2%				59.1%				0.0%				0.0%
			40.9%				12.5%				0.0%				0.0%
			6.4%				84.5%				0.0%				0.0%
			15.5%				0.0%				0.0%				0.0%

图 4：最適平均投資比率

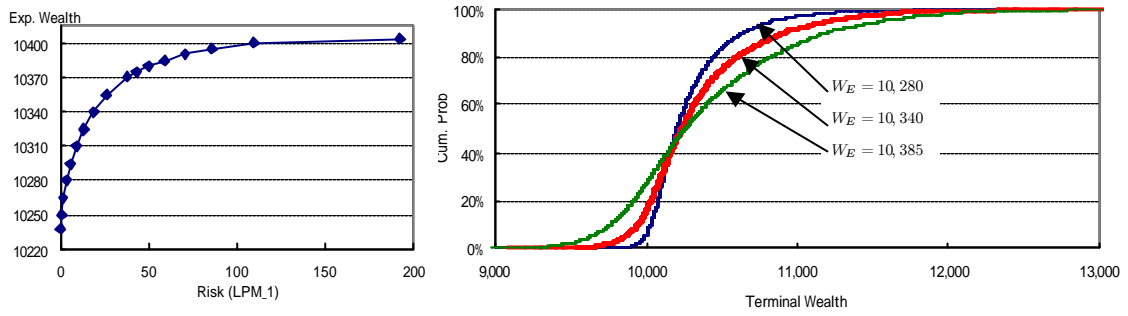


図 5：効率的フロンティアと最終富の累積分布関数

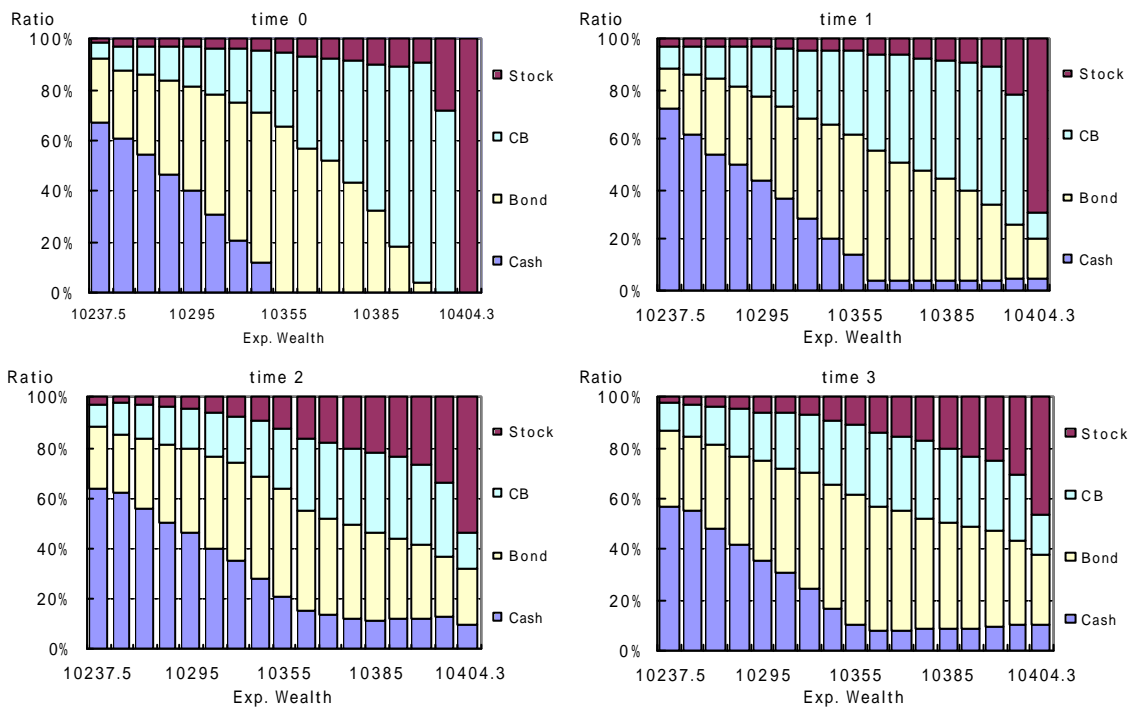


図 6：様々な  $W_E$  に対する各時点の平均投資比率

## 2.5 計算時間

15種類 (1,000~15,000 ; 1,000本刻み) の経路数に対する計算時間を図7に示す。EUモデルを用いて14種類の  $\gamma$  に対する問題を解く。15,000本までの範囲であれば、不確実性の記述の詳細さを表す経路数に対し、ほぼ線形に増加する。経路数が15,000本の場合の問題の規模は、制約式、決定変数ともに約75,000個である。問題のサイズは膨大になるが、問題の係数行列は疎大行列であるため、経路数が15,000本の場合でも約2分程度で問題を解くことができる。

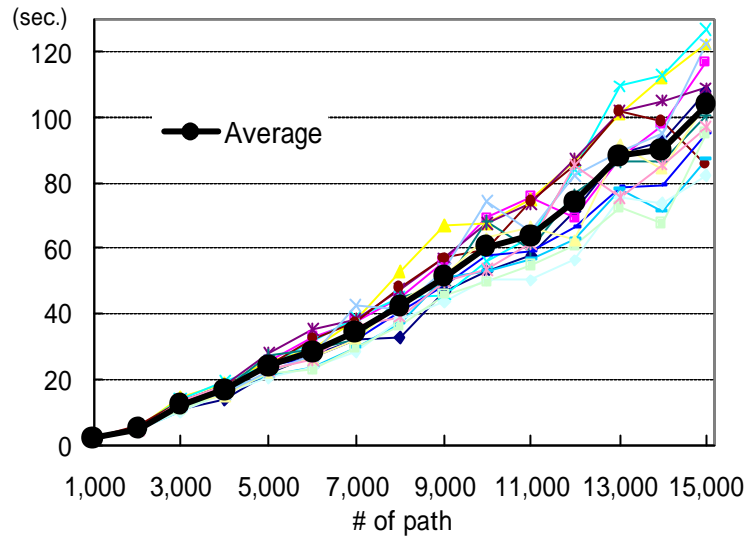


図 7： 計算時間

### 3 シナリオの生成方法

将来の資産価格(収益率)は一般に、確率微分方程式(確率差分方程式)や時系列モデル式などで記述され、それをもとにしてシナリオが生成される。Mulvey and Thorlacius[10]は年金基金に対する多期間確率計画問題に対し、タワーズペリン(Towers Perrin)のモデルを使い、分析を行っている<sup>16</sup>。このモデルでは、各国間の影響関係と滝構造を用いた経済構造を記述している。各経済変数(金利、インフレ率、実質利回り、為替レート、株式収益率)は、確率微分方程式で記述される。例えば、短期金利と長期金利は、2要因 Brennan-Schwartz モデルの変形によって計算される。損害保険会社に対する ALMの代表的な例であるラッセル・安田モデル(Russel-Yasuda Model)[4, 5, 6]では、金利、株式収益率、為替レートをもとにした時系列モデル(ファクターモデル)により資産リターンのシナリオを作成している。

このようなシナリオ生成モデルはそれぞれの論文によって独自のものが開発されており、モデルの詳細は完全には記述されていないが、複雑なモデルが多い。これらのモデルを用いて、不確実性の記述をシナリオ・ツリーによって詳細にしようとすると、問題の規模が指数的に増加する。問題を大規模にしないためには、数少ないシナリオでうまく不確実性を記述する必要があるが、これらの論文の中ではその具体的な生成方法は記述されていない。それに対し、混合型モデルでは、その入力データとしてモンテカルロ・シミュレーションによって生成された(ツリー構造ではない)サンプル・パスを用いる。確率微分方程式(確率差分方程式)や時系列モデル式が求めれば、モンテカルロ・シミュレーションの標準的な手続きによって、具体的にシナリオを生成することは容易である。したがって、上記に示したシナリオ生成モデルも含めて、様々なモデルから容易にシナリオ生成が可能である。

モデルが異なれば、求められる最適解も変わってくるので、どのようなモデルを用いるかは重要である。しかし、本論文の目的は、その入力データとしてモンテカルロ・シミュレーションにより生成されたデータを用いた最適化モデルの構築とその特徴を明らかにすることである。そのた

<sup>16</sup> タワーズペリンはグローバル CAP:Link と呼ばれる資本市場のグローバルなシナリオ生成システムを開発し、年金基金や保険会社のリスク分析等に使用している。



め、モデルの分析を行うために、① 簡単に結果を解釈しやすく、② 資産価格変動の時系列相関を明示的に表現できるモデル<sup>17</sup>を構築する。そこで、以下のような期待値、標準偏差、相関係数(時系列相関も含む)を用いた簡単なモデルによって、 $n$  個の危険資産の収益率とコールレートのシナリオを生成する。以下、資産0はコールレート、資産1～資産 $n$  は危険資産を表す。

① 資産  $j$  の  $t$  時点の収益率(コールレートの場合には変化率)は、期待値  $\bar{\mu}_{jt}$ 、標準偏差  $\sigma_{jt}$  の正規分布に従う。また、 $\varepsilon_{jt}$  を標準正規分布に従う確率変数とする。標準正規乱数  $\varepsilon_{jt}^{(i)}$  を用いて、シミュレーション経路  $i$  の資産  $j$  の  $t$  時点の収益率  $\mu_{jt}^{(i)}$  を以下のように生成する。

$$\mu_{jt}^{(i)} = \bar{\mu}_{jt} + \sigma_{jt}\varepsilon_{jt}^{(i)}, (j = 0, \dots, n; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I)$$

コールレートの場合には変化率を表すので、コールレート  $r_t^{(i)}$  は以下の式を用いて、生成する。

$$r_1^{(i)} = r_0 \times (1 + \mu_{01}^{(i)}), (i = 1, \dots, I)$$

$$r_t^{(i)} = r_{t-1}^{(i)} \times (1 + \mu_{0t}^{(i)}), (t = 2, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$$

② 確率変数  $\varepsilon_{jt}$  は資産間、時点間で相関を持つ。

$$\varepsilon_{jt} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$$

ここで、 $\Sigma$  は資産間、時点間の相関係数行列 ( $(n+1)T \times (n+1)T$  行列) である。

各資産のシミュレーション経路を生成する際に用いるデータの基本統計量(期待値、標準偏差、相関係数行列)として、次の2種類を用いる。

#### (A) 基本ケース

日興株式パフォーマンスインデックス(東証一部インデックス)、日興債券パフォーマンスインデックス(総合インデックス)、日興CBパフォーマンスインデックス(総合インデックス)、コールレートをもとに生成した基本統計量を用いる(表1)。

表1：基本ケースにおける基本統計量

	cash				stock				bond				CB			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Exp. Value	-0.087	-0.081	-0.089	-0.103	0.848	0.867	0.843	0.858	0.625	0.623	0.645	0.683	0.786	0.780	0.786	0.806
St. Dev.	0.780	0.784	0.778	0.759	5.571	5.582	5.595	5.591	1.372	1.372	1.353	1.233	3.543	3.541	3.538	3.525
Correlation	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
cash	1.000	-0.091	0.073	0.226	-0.101	0.000	-0.032	-0.042	-0.238	0.008	0.090	0.038	-0.146	-0.044	-0.052	-0.036
		1.000	-0.092	0.074	0.045	-0.094	-0.007	-0.032	-0.183	-0.237	0.011	0.093	-0.012	-0.144	-0.047	-0.053
			1.000	-0.123	0.016	0.042	-0.091	-0.002	-0.166	-0.188	-0.221	0.068	-0.062	-0.017	-0.138	-0.037
				1.000	-0.015	0.012	0.048	-0.085	-0.055	-0.176	-0.156	-0.145	-0.029	-0.072	-0.005	-0.122
stock					1.000	0.022	-0.031	0.030	0.145	-0.173	-0.096	-0.065	0.761	0.042	-0.045	-0.056
						1.000	0.018	-0.030	0.085	0.144	-0.170	-0.101	0.019	0.760	0.041	-0.045
							1.000	0.018	0.077	0.085	0.141	-0.189	0.011	0.760	0.041	
								1.000	0.130	0.078	0.080	0.137	-0.022	0.013	0.017	0.760
bond									1.000	0.130	-0.108	-0.118	0.327	0.202	0.065	0.136
										1.000	0.137	-0.106	-0.114	0.327	0.204	0.068
											1.000	0.072	-0.180	-0.109	0.321	0.192
												1.000	-0.117	-0.182	-0.142	0.315
CB													1.000	0.092	-0.068	-0.032
														1.000	0.093	-0.066
															1.000	0.090
																1.000

#### (B) 様々な自己相関を考慮するケース(以降、相関ケースと呼ぶ)

様々な時系列相関を持つ場合に対する最適解の違いを調べる。そのために、相関パラメータ  $c$  として、表2に示すように-0.5から0.5の間の0.1刻みの値を設定した11ケースを比較する。相関パラメータ  $c$  は表3に示すように、 $\pm 1$  期間の間(期間1と期間2の間、期間2と期間3の間、期

<sup>17</sup>時系列相関を考慮することは、多期間モデルにおける大きな関心事の一つである。

間3と期間4の間)の資産間の時系列相関を操作するパラメータで、同時点における資産間の相関係数に対する倍率および、±1期間の間の自己相関係数を表す。また、±2期間の間(期間1と期間3の間、期間2と期間4の間)の相関係数は±1期間の間の0.3倍、±3期間の間(期間1と期間4の間)の相関係数は±2期間の間の0.3倍と設定する。例えば、 $c = 0.2$ を表3に代入すると、表4のようになる。また、各資産の期待収益率と標準偏差は、それぞれ各期間一定とする(表5)。

表2：ケース分析番号と相関パラメータ

ケース	cm5	cm4	cm3	cm2	cm1	cp0	cp1	cp2	cp3	cp4	cp5
パラメータ(c)	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5

表3：相関係数行列の設定値

Correlation				
	cash( $t$ )	stock( $t$ )	bond( $t$ )	CB( $t$ )
cash( $t$ )	1	-0.10	-0.25	-0.15
stock( $t$ )	-0.10	1	0.15	0.75
bond( $t$ )	-0.25	0.15	1	0.30
CB( $t$ )	-0.15	0.75	0.30	1
S.C.(±1) : correlation × c				
	cash( $t+1$ )	stock( $t+1$ )	bond( $t+1$ )	CB( $t+1$ )
cash( $t$ )	$c$	$-0.10c$	$-0.25c$	$-0.15c$
stock( $t$ )	$-0.10c$	$c$	$0.15c$	$0.75c$
bond( $t$ )	$-0.25c$	$0.15c$	$c$	$0.30c$
CB( $t$ )	$-0.15c$	$0.75c$	$0.30c$	$c$
S.C.(±2) : S.C.(±1) × 0.3				
	cash( $t+2$ )	stock( $t+2$ )	bond( $t+2$ )	CB( $t+2$ )
cash( $t$ )	$0.300c$	$-0.030c$	$-0.075c$	$-0.045c$
stock( $t$ )	$-0.030c$	$0.300c$	$0.045c$	$0.225c$
bond( $t$ )	$-0.075c$	$0.045c$	$0.300c$	$0.090c$
CB( $t$ )	$-0.045c$	$0.225c$	$0.090c$	$0.300c$
S.C.(±3) : S.C.(±2) × 0.3				
	cash( $t+3$ )	stock( $t+3$ )	bond( $t+3$ )	CB( $t+3$ )
cash( $t$ )	$0.0900c$	$-0.0009c$	$-0.0225c$	$-0.0135c$
stock( $t$ )	$-0.0090c$	$0.0900c$	$0.0135c$	$0.0675c$
bond( $t$ )	$-0.0225c$	$0.0135c$	$0.0900c$	$0.0270c$
CB( $t$ )	$-0.0135c$	$0.0675c$	$0.0270c$	$0.0900c$

S.C. : serial correlation(autocorrelation, cross-autocorrelation)

表4：相関係数行列( $c = 0.2$ の場合)

	cash				stock				bond				CB			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
cash	1.0000	0.2000	0.0600	0.0180	-0.1000	-0.0200	-0.0600	-0.0018	-0.2500	-0.0500	-0.0150	-0.0045	-0.1500	-0.0300	-0.0090	-0.0027
2	0.2000	1.0000	0.2000	0.0600	-0.0200	-0.1000	-0.0200	-0.0060	-0.0500	-0.2500	-0.0500	-0.0150	-0.0300	-0.1500	-0.0300	-0.0090
3	0.0600	0.2000	1.0000	0.2000	-0.0060	-0.0200	-0.1000	-0.0200	-0.0150	-0.0500	-0.2500	-0.0500	-0.0090	-0.0300	-0.1500	-0.0300
4	0.0180	0.0600	0.2000	1.0000	-0.0018	-0.0060	-0.0200	-0.1000	-0.0045	-0.0150	-0.0500	-0.2500	-0.0027	-0.0090	-0.0300	-0.1500
stock	-0.1000	-0.0200	-0.0600	-0.0018	1.0000	0.2000	0.0600	0.0180	0.1500	0.0300	0.0090	0.0027	0.7500	0.1500	0.0450	0.0135
2	-0.0200	-0.1000	-0.0200	-0.0060	0.2000	1.0000	0.2000	0.0600	0.0300	0.1500	0.0300	0.0090	0.1500	0.7500	0.1500	0.0450
3	-0.0600	-0.0200	-0.1000	-0.0200	0.0600	0.2000	1.0000	0.2000	0.0090	0.0300	0.1500	0.0300	0.0450	0.1500	0.7500	0.1500
4	-0.0018	-0.0060	-0.0200	-0.1000	0.0180	0.0600	0.2000	1.0000	0.0027	0.0090	0.0300	0.1500	0.0135	0.0450	0.1500	0.7500
bond	-0.2500	-0.0500	-0.0150	-0.0045	0.1500	0.0300	0.0090	0.0027	1.0000	0.2000	0.0600	0.0180	0.3000	0.0600	0.0180	0.0054
2	-0.0500	-0.2500	-0.0500	-0.0150	0.0300	0.1500	0.0300	0.0090	0.2000	1.0000	0.2000	0.0600	0.0600	0.3000	0.0600	0.0180
3	-0.0150	-0.0500	-0.2500	-0.0500	0.0090	0.0300	0.1500	0.0300	0.0600	0.2000	1.0000	0.2000	0.0180	0.0600	0.3000	0.0600
4	-0.0045	-0.0150	-0.0500	-0.2500	0.0027	0.0090	0.0300	0.1500	0.0180	0.0600	0.2000	1.0000	0.0054	0.0180	0.0600	0.3000
CB	-0.1500	-0.0300	-0.0090	-0.0027	0.7500	0.1500	0.0450	0.0135	0.3000	0.0600	0.0180	0.0054	1.0000	0.2000	0.0600	0.0180
2	-0.0300	-0.1500	-0.0300	-0.0090	0.1500	0.7500	0.1500	0.0450	0.0600	0.3000	0.0600	0.0180	0.2000	1.0000	0.2000	0.0600
3	-0.0090	-0.0300	-0.1500	-0.0300	0.0450	0.1500	0.7500	0.1500	0.0180	0.0600	0.3000	0.0600	0.0600	0.2000	1.0000	0.2000
4	-0.0027	-0.0090	-0.0300	-0.1500	0.0135	0.0450	0.1500	0.7500	0.0054	0.0180	0.0600	0.3000	0.0180	0.0600	0.2000	1.0000

表5：期待収益率と標準偏差

収益率	cash	stock	bond	CB
期待値	0.0%	0.85%	0.6%	0.75%
分散	0.4%	5.5%	1.4%	3.5%

## 4 拡張決定ツリーの生成方法

拡張決定ツリーの生成手続きの概要を示すために、図2の拡張決定ツリーに対する例を以下に示す。図8の番号と対応して説明する。

- ① 3期間にわたる12個のシミュレーション経路を生成する。
- ② 期間1の収益率データを用いて、「ある方法」によって経路を3つのグループに分ける。この例では、それぞれ4個に分ける。それぞれのグループを1時点における意思決定ノードと考え、それぞれのノードでは同一の意思決定を行う。
- ③ 期間2の収益率データを用いて、「ある方法」によって1時点の各グループごとに経路を2つのグループに分ける。この例では、それぞれの意思決定ノードで、それぞれ2個に分ける。それぞれのグループを2時点における意思決定ノードと考え、それぞれのノードでは同一の意思決定を行う。

ここで、3時点においては意思決定を行わないので、グループ分けをする必要はない。

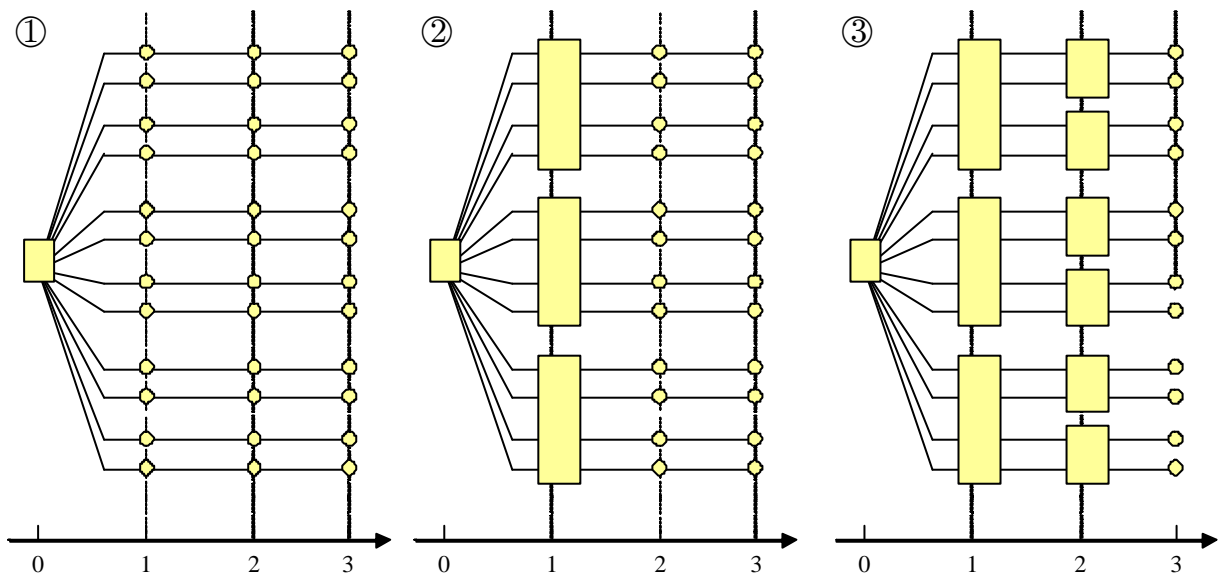


図8：拡張決定ツリーの図解

②, ③に含まれる「ある方法」、すなわちツリーの生成方法(グループ分けの方法)として、(A) 逐次的クラスタリング法と(B) ポートフォリオ・ベース・クラスタリング法を説明する。説明に用いる記号として、以下のパラメータを追加する。

$m_1$  : 1時点の決定ノードの分岐数(1時点の決定ノードの数)。図8では、 $m_1 = 3$ 。

$m_t^{s'}$  :  $t - 1$  時点の決定ノード  $s'$  につながっている  $t$  時点の決定ノードの分岐数。図8では、 $m_2^1 = m_2^2 = m_2^3 = 2$ 。

### 4.1 逐次的クラスタリング法

資産の収益率データを直接的に、逐次的にクラスター分析を行い、グループに分ける方法を逐次的クラスタリング法(Sequential Clustering Method: 以降、SQC法)と呼ぶ。具体的には、期間

1の収益率を用いてクラスター分析を行い、グループに分ける。さらに、期間2では各グループごとに再度クラスター分析を行い、グループに分ける。このような手続きを時間とともに逐次的に実行する。以下に詳細な計算手続きを示す。クラスタリングの類似度には、収益率のユークリッド距離を用いる<sup>18</sup>。

(1) 1時点の決定ノード  $s$  に含まれる経路の集合  $V_1^s$  を作成する。

$\mu_{j1}^{(i)}$  ( $j = 0, \dots, n; i = 1, \dots, I$ ) を  $m_1$  個のクラスターに分割する<sup>19</sup>。

(2) 1時点の決定ノード  $s'$  につながっている 2時点の決定ノード  $s$  に含まれる経路の集合  $V_2^s$  を作成する。

$V_1^{s'}$  に含まれる経路上の期間2の収益率  $\mu_{j2}^{(i)}$  ( $j = 0, \dots, n; i \in V_1^{s'}$ ) を  $m_2^{s'}$  個のクラスターに分割する。期間2においては、クラスタリングを1時点の決定ノードごとに行う。

(3) 同様に、 $T-1$  時点まで行う。

$t-1$  時点の決定ノード  $s'$  につながっている  $t$  時点の決定ノード  $s$  に含まれる経路の集合  $V_t^s$  を作成する。 $V_{t-1}^{s'}$  に含まれる経路上の期間  $t$  の収益率  $\mu_{jt}^{(i)}$  ( $j = 0, \dots, n; i \in V_{t-1}^{s'}$ ) を  $m_t^{s'}$  個のクラスターに分割する。 $t$  時点においては、クラスタリングを  $t-1$  時点の決定ノードごとに行う。

## 4.2 ポートフォリオ・ベース・クラスタリング法

多期間にわたって任意のポートフォリオを定め、そのポートフォリオを用いて計算される時点  $t$  の経路  $i$  の富  $W_t^{(i)*}$  を使って、拡張決定ツリーを作成する方法をポートフォリオ・ベース・クラスタリング法 (Portfolio Based Clustering Method: 以降、PBC法) と呼ぶ。用いるポートフォリオとして、① 等ウェイトポートフォリオ、② シミュレーション型モデルで問題を解いたときに得られる最適解<sup>20</sup> などを用いることができる。また、グループに分ける際のノードを通る経路の数を同数にするか否かによってもグループ分けの方法が異なる。

具体的には、1時点の富を小さい順番に並べてグループに分ける。さらに、2時点では各グループごとに2時点の富を小さい順番に並べてグループに分ける。このような手続きを時間とともに逐次的に実行する。以下に詳細な計算手続きを示す。

<sup>18</sup> マハラノビス距離を使う場合、標準正規乱数を使ってクラスタリングを行うのと同様結果が得られる。ここでは、資産ごとの期待収益率や標準偏差をクラスタリングに反映させるために、収益率によって求められるユークリッド距離を用いる。

<sup>19</sup> 4.3節の比較実験においては、階層的クラスター分析法の中で実用的に優れた方法としてよく利用されているウォード法を用いて、クラスタリングを行う。詳しくは田中ら [17] を参照のこと。ここでは、1つのサンプル・パスが複数資産の収益率によって特徴づけられると考え、複数のサンプル・パスをいくつかのクラスターに分ける。そのクラスターを意思決定ノードと考える。

<sup>20</sup> Bogentoft, Romeijn and Uryasev [2] は、オランダの年金基金に対し、混合型モデルの特殊形 (以降、BRU モデル) によって、CVaR (条件付きバリュー・アット・リスク) をリスク尺度に用いた ALM モデルを構築し、その有用性を示している。BRU モデルは決定ノードが時間とともに広がらない (増えない) 構造を持つ混合型モデルであるが、ノードの決定方法として、シミュレーション型モデルで問題を解いたときに得られる最適解から計算される資産負債比率を使っている。BRU モデルは枇々木 [20] を参考にして研究されたが、本論文ではそのアイデアを一般化し、ポートフォリオ・ベース・クラスタリング法と呼ぶ。

(1) 1時点の決定ノード  $s$  に含まれる経路の集合  $V_1^s$  を作成する。

$W_t^{(i)*}$  を小さい順番に並べ、 $m_1$  個に分ける。集合の分け方として、以下の2通りを考える。

① ノードを通る経路の数を同数にする方法

経路数を  $I$  とすると、各ノードの経路数は  $\frac{I}{m_1}$  本となる。整数にならない場合には、適当に調整する。

② ノードを通る経路の数を同数にしない方法

より中心に近づくほど、その区間の確率が高くなるように分布を区分する方法などが考えられる。ここでは、4.3節で用いる方法を以下に示す。

$W_1^{(i)*}$  の期待値を  $\overline{W}_1^*$ 、標準偏差を  $\sigma_1^*$  として、便宜的に正規分布を想定し、下記の区間に含まれる割合で経路数を分ける<sup>21</sup>。  $u(\geq 0)$  を整数とし、 $m_1$  の値によって区分の方法を変更する。 $10u + 1 \leq m_1 \leq 10(u + 1)$  の範囲では、以下のように分ける。

- $\overline{W}_1^* + \left(\frac{4+2u}{m_1} - (2+u)\right) \sigma_1^*$  未満
- $\overline{W}_1^* + \left\{\frac{4+2u}{m_1}(k-1) - (2+u)\right\} \sigma_1^*$  以上、 $\overline{W}_1^* + \left\{\left(\frac{4+2u}{m_1}\right)k - (2+u)\right\} \sigma_1^*$  未満  
( $k = 2, \dots, m_1 - 1$ )
- $\overline{W}_1^* + (2+u)\sigma_1^*$  以上

この方法で適用されるルール(集合の分け方)は、理論的にはではなく、いくつかの数値的な基準をもとにして求めたものである。

(2) 1時点の決定ノード  $s'$  につながっている2時点の決定ノード  $s$  に含まれる経路の集合  $V_2^s$  を作成する。

$V_1^{s'}$  に含まれる経路上の2時点の富  $W_2^{(i)*}$  を小さい順番に並べ、 $m_2^{s'}$  個に分ける。これを決定ノード  $s'$  ごとに行う。集合の分け方は、(1) と同じである。

(3) 同様に、 $T-1$  時点まで行う。

$t-1$  時点の決定ノード  $s'$  につながっている  $t$  時点の決定ノード  $s$  に含まれる経路の集合  $V_t^s$  を作成する。

### 4.3 生成方法の違いによる比較

拡張決定ツリーの生成方法によって決定ノードを通る経路が変わるので、最適解も異なる。ここでは数値実験を用いて、生成方法の異なる以下の5通りの方法を比較する。

<sup>21</sup>例えば、 $m_1 = 5$  の場合には、以下の5つの確率(範囲)に分けられる。

- 11.51% ( $\overline{W}_1^* - 1.2\sigma_1^*$  未満)
- 22.95% ( $\overline{W}_1^* - 1.2\sigma_1^*$  以上  $\overline{W}_1^* - 0.4\sigma_1^*$  未満)
- 31.08% ( $\overline{W}_1^* - 0.4\sigma_1^*$  以上  $\overline{W}_1^* + 0.4\sigma_1^*$  未満)
- 22.95% ( $\overline{W}_1^* + 0.4\sigma_1^*$  以上  $\overline{W}_1^* + 1.2\sigma_1^*$  未満)
- 11.51% ( $\overline{W}_1^* + 1.2\sigma_1^*$  以上)

正規分布を想定せずに、生成される  $W_t^{(i)*}$  に依存して、各区間に含まれる経路で分ける方法も考えられるが、決定ノードに含まれる個数が変わり、ツリーの生成が不安定になる場合もある。

- (1) SQC法
- (2) 等ウェイトポートフォリオを用いたPBC法 (W-PBC法)
  - ① ノードを通る経路の数を同数にする場合：WE-PBC
  - ② ノードを通る経路の数を同数にしない場合：WI-PBC
- (3) シミュレーション型モデルの最適解を用いたPBC法 (S-PBC法)
  - ① ノードを通る経路の数を同数にする場合：SE-PBC
  - ② ノードを通る経路の数を同数にしない場合：SI-PBC

数値実験の設定条件は以下の通りである。

- シミュレーション経路：3,000本 ( $I = 3,000$ )
- 乱数シード：100種類
- 基本ケース(表1)に対するシミュレーション経路を生成する。
- 投資量決定戦略によるERモデルを用いる。計画期末(4時点後)の期待富( $W_E$ )に対する制約値を5ケース設定する。以降、単位のない場合には、すべて万円単位とする。

ケース番号	ケース1	ケース2	ケース3	ケース4	ケース5
期待富( $W_E$ )	10,280	10,310	10,340	10,370	10,385

#### 4.3.1 結果と考察

各方法のリスク値の基本統計量を表6、表7に示す。シミュレーション型モデルの最適解を用いたPBC法(S-PBC法)が他の方法に比べて明らかに良い。ただし、S-PBC法(SE-PBC, SI-PBC)では $\gamma = 1.5$ のケースを示す<sup>22</sup>。乱数100種類の平均値だけでなく、標準偏差も小さい。分布全体を見ても、S-PBC法のリスクの最大値は他の方法のリスクの最小値を下回っており、100種類すべてのケースで有利である。この理由はシミュレーション型モデルと混合型モデルの構造はきわめて似ているため、シミュレーション型モデルで得られた富の値は、値そのものの水準は異なるものの、パスごとの大きさの順番は他の方法よりも似た結果が得られるからである。SE-PBC法とSI-PBC法の結果を比較するとほぼ同じ結果が得られている。詳細に見ると、平均値に関しては、 $W_E = 10,280, 10,310$ の2ケースではSI-PBC法が、 $W_E = 10,340, 10,370, 10,385$ の3ケースではSE-PBC法が良い結果を示している。標準偏差はあまり変わらない。SI-PBC法とSE-PBC法は結果がほとんど変わらないので、以降ではSE-PBC法を用いて分析を行う。

表6：各方法の比較 1: リスクの平均値

$W_E =$		10,280	10,310	10,340	10,370	10,385
(1)	SQC	6.10	16.40	33.62	69.33	110.10
(2)-①	WE-PBC	5.19	13.83	27.57	54.27	86.24
(2)-②	WI-PBC	5.21	13.95	28.42	58.06	96.45
(3)-①	SE-PBC( $\gamma = 1.5$ )	1.42	6.01	13.91	28.18	41.05
(3)-②	SI-PBC( $\gamma = 1.5$ )	1.23	5.74	14.16	28.98	42.92

<sup>22</sup>表8、表9の結果より、リスクの平均値が小さい $\gamma = 1.5$ のケースを用いる。

表 7：各方法の比較 2: その他の基本統計量

(1) SQC

$W_E =$	10,280	10,310	10,340	10,370	10,385
Average	6.10	16.40	33.62	69.33	110.10
St.Dev.	0.84	1.82	3.61	10.90	22.73
Maximum	8.02	20.39	42.99	108.36	191.48
75% pt.	6.75	17.68	36.28	75.96	120.12
Median	6.07	16.47	33.49	67.37	105.27
25% pt.	5.53	15.24	31.07	60.91	93.81
Minimum	3.84	10.98	23.40	50.25	75.09

(2)-① WE-PBC

$W_E =$	10,280	10,310	10,340	10,370	10,385
Average	5.19	13.83	27.57	54.27	86.24
St.Dev.	0.65	1.28	2.24	6.32	14.75
Maximum	7.41	18.30	35.99	81.87	136.64
75% pt.	5.66	14.54	28.95	57.93	93.44
Median	5.11	13.74	27.61	53.74	85.30
25% pt.	4.74	12.99	26.05	50.71	76.97
Minimum	3.51	10.67	21.52	39.93	54.77

(2)-② WI-PBC

$W_E =$	10,280	10,310	10,340	10,370	10,385
Average	5.21	13.95	28.42	58.06	96.45
St.Dev.	0.58	1.14	2.24	7.70	21.99
Maximum	7.23	17.70	34.02	78.82	190.46
75% pt.	5.57	14.67	29.81	63.76	107.29
Median	5.14	13.92	28.33	56.53	90.55
25% pt.	4.87	13.19	26.95	52.08	80.87
Minimum	3.83	11.30	23.44	45.36	64.14

(3)-① SE-PBC( $\gamma = 1.5$ )

$W_E =$	10,280	10,310	10,340	10,370	10,385
Average	1.42	6.01	13.91	28.18	41.05
St.Dev.	0.36	0.78	1.33	2.75	4.95
Maximum	2.27	7.60	16.95	35.73	54.21
75% pt.	1.66	6.55	15.03	29.94	44.61
Median	1.44	6.05	14.00	28.06	40.33
25% pt.	1.19	5.52	13.05	25.95	37.39
Minimum	0.61	4.02	10.91	22.25	31.63

(3)-② SI-PBC( $\gamma = 1.5$ )

$W_E =$	10,280	10,310	10,340	10,370	10,385
Average	1.23	5.74	14.16	28.98	42.92
St.Dev.	0.30	0.73	1.33	2.73	5.29
Maximum	2.28	7.87	17.52	37.20	57.33
75% pt.	1.42	6.21	14.93	30.89	46.24
Median	1.23	5.77	14.13	28.78	42.55
25% pt.	1.01	5.24	13.25	26.85	39.15
Minimum	0.63	4.07	11.56	23.71	32.54

#### 4.3.2 SE-PBC法におけるリスク回避係数( $\gamma$ )の選択

13種類の  $\gamma$  に対して、SE-PBC法を用いて問題を解いた場合のリスクの平均値を表 8 に示す。表 8 を見ると、 $W_E = 10,280, 10,310, 10,340$  の 3 ケースでは  $\gamma = 1.50$  が、 $W_E = 10,370, 10,385$  の 2 ケースでは  $\gamma = 1.25$  のときのリスク値が最も低い。しかし、 $\gamma$  の値が 1~10 の範囲ではそれ

ほど大きな変化がない。つまり、この範囲の中では  $\gamma$  に対する感度は高くない。ただし、 $\gamma$  の変化に対し、最適ポートフォリオは大きく変化している。様々な  $\gamma$  に対するシミュレーション型モデルの最適解に対するリスク値とPBC法のベースとなる最適ポートフォリオをそれぞれ、表8(最右列)、図9に示す。

表 8 : 様々なリスク回避係数 ( $\gamma$ ) に対するリスクの平均値

$\gamma$	Hybrid model ( $W_E$ )					Simulated path model
	10,280	10,310	10,340	10,370	10,385	
1000	1.941	7.141	16.007	32.080	47.550	0.000
100	1.917	7.061	15.861	31.708	46.801	0.006
10	1.547	6.287	14.455	29.045	42.426	0.577
5	1.530	6.208	14.259	28.718	41.806	2.030
3	1.540	6.253	14.346	28.935	42.116	5.963
2	1.475	6.139	14.161	28.669	41.645	12.137
1.75	1.443	6.073	14.040	28.416	41.334	15.511
1.50	1.416	6.012	13.907	28.183	41.052	18.810
1.25	1.431	6.048	13.982	28.163	40.924	21.988
1	1.556	6.325	14.448	28.945	42.104	23.579
0.75	1.826	6.894	15.396	30.274	43.763	27.206
0.50	2.646	8.631	18.354	35.098	51.671	40.344
0.25	5.787	15.237	30.629	61.691	99.829	179.438

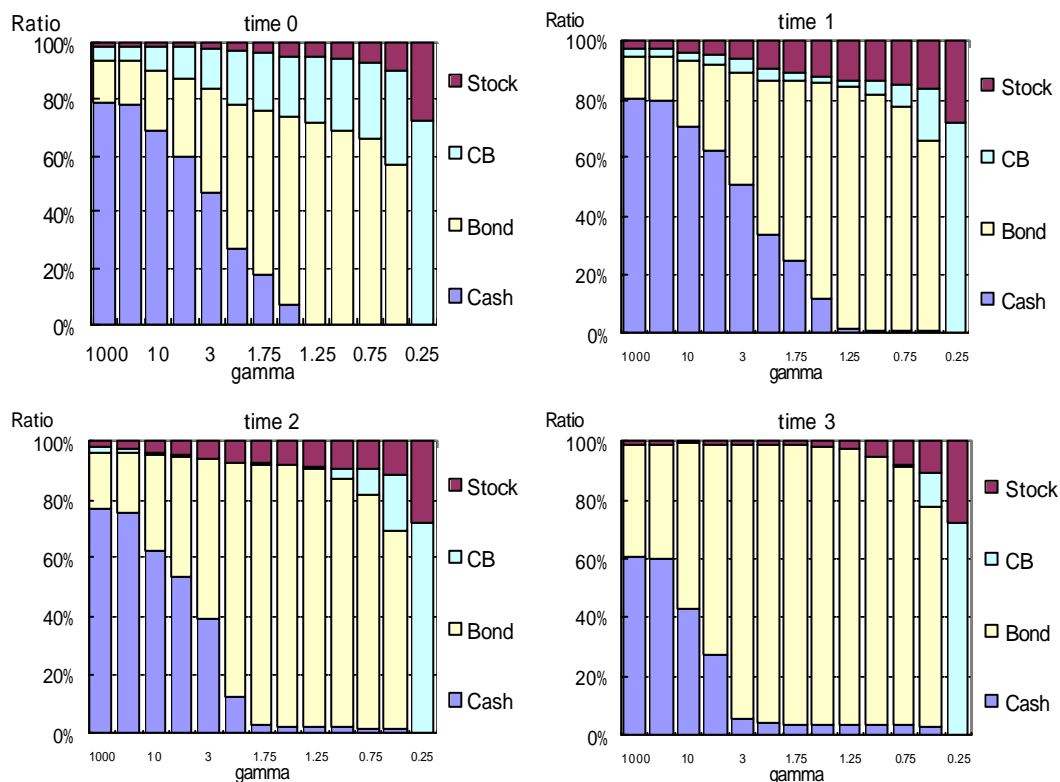


図 9 : 様々な  $\gamma$  に対するシミュレーション型モデルの最適ポートフォリオ



$\gamma$  が小さくなるにつれて、リスク許容度が大きくなり、より危険な資産へと移行する。その結果、表8(最右列)のリスク値も大きくなる。 $\gamma$  が小さくなるにつれて、現金への投資は減り、株式、債券、CBへの投資が徐々に増えていく。さらに $\gamma$  が小さくなると、現金への投資はなくなり、債券への投資も減り、株式とCBへ投資をすることになる。

PBC法では各経路ごとの富の順番が問題であるため、ある範囲の中では、ベースとなるポートフォリオにはそれほど感度は高くないことが予想される。表8において、 $\gamma = 0.50$  で急にリスク値が悪くなる。これは、 $\gamma = 0.75$  のときに比べて、債券への投資比率が10%程度落ちているが、この点で富の順番に影響を与えるようなポートフォリオの変化があったと推測できる。一方、 $\gamma = 100$  以上になると  $\gamma = 10$  のときに比べてリスク値が悪くなる。現金の投資比率が10%程度下がり、その分、債券への投資比率が増えているが、この点で富の順番に影響を与えるようなポートフォリオの変化があったと推測できる。いずれにしても、いくつかの  $\gamma$  に対して実際に問題を解いてから、 $\gamma$  を決め、混合型モデルを解くことが必要である。

この傾向が経路数に依存しないかどうかを確かめるために、シミュレーション経路を10,000本にした場合の結果を表9に示す。

表9：様々な  $\gamma$  に対する混合型モデルのリスクの平均値 ( $I = 10,000$  の場合)

$\gamma$	$W_E = 10,280$	$W_E = 10,310$	$W_E = 10,340$	$W_E = 10,370$	$W_E = 10,385$
3	3.313	9.262	19.019	38.062	60.554
2	3.237	9.127	18.844	37.785	59.955
1.75	3.217	9.084	18.776	37.680	59.729
1.50	3.135	8.941	18.531	37.319	59.021
1.25	3.158	9.002	18.610	37.410	59.124
1	3.352	9.377	19.235	38.388	61.223
0.75	3.785	10.178	20.475	40.344	65.564

表9は、 $\gamma = 0.75 \sim 3$  に対する結果であるが、 $\gamma = 0.75$  以外はほぼ同じ値になり、この範囲では感度があまり高くないことを示す。そして、 $\gamma = 1.50$  の場合のリスク値が最小であった。これらのことから、これ以降の数値実験においては、4.3.1項と同様に、 $\gamma = 1.50$  を用いる。

## 5 モデル分析

混合型モデルは、モンテカルロ・シミュレーションを用いることによって、シナリオ・ツリーよりも離散化の精度を上げる（不確実性の記述を詳細にする）ことができる。しかし、不確実性下での条件付き意思決定を行うために、似たような資産価格（収益率）の状態に対して同一の意思決定を行う必要がある。したがって、シミュレーション経路数と意思決定ノード数（分岐数）は結果に大きな影響を及ぼす。経路数が多くなればなるほど分布の近似精度は高まり、意思決定ノード数（分岐数）が多くなればなるほど、より適切に条件付き意思決定を記述することができる。経路数を一定にして、意思決定ノード数（分岐数）を増やすと効率的フロンティアは左上にシフトする。この理由は、経路数が少なくて意思決定ノード数が多いと、分布の近似精度が悪いもとで意思決定をすることになり、オーバーフィットさせることができるからである。一方、意思決定ノード数（分岐数）を一定にして、経路数を増やすと効率的フロンティアは右下にシフトする。この理由は、経路数が多くて意思決定ノード数が少ないと、条件付き意思決定の自由度が低くなるからである。また、モンテカルロ・シミュレーションでは乱数を用いるため、経路数が少ないとサンプリングエラーが生じる。経路数を増加させることによって、サンプリングエラーを減少させることができる。本節では以下の数値実験により、これらの関係を調べることにする。

**実験 1**： 経路数を一定にして、意思決定ノード数（分岐数）を様々に変更する。以下のような3通りの方法で比較する。シミュレーション経路数は 10,000 本とする。

- (A) 1-1-1 ツリー（シミュレーション型モデル）から 5-4-3 ツリーまで、1つの時点の分岐数のみを変えていった場合の以下の12種類の拡張決定ツリーに対する結果を比較する。  
1-1-1, 2-1-1, 2-2-1, 2-2-2, 3-2-2, 3-3-2, 3-3-3, 4-3-2, 4-3-3, 4-4-3, 4-4-4, 5-4-3
- (B) 各時点の分岐数を同一にする12種類の  $N-N-N$  ツリー ( $N = 2, \dots, 13$ ) に対する結果を比較する。
- (C) 3時点 ( $T-1$  時点) でのノード数を同一 ( $M$  個) である  $N_1-N_2-N_3$  ツリー ( $N_1 \times N_2 \times N_3 = M$ ) の結果を比較する。ツリー構造は以下の通りである。
- $M = 1,000$  個 : 10-10-10, 20-10-5, 40-5-5
  - $M = 1,500$  個 : 15-10-10, 20-15-5, 30-10-5, 60-5-5
  - $M = 2,000$  個 : 20-10-10, 20-20-5, 40-10-5, 80-5-5
  - $M = 2,500$  個 : 25-10-10, 25-20-5, 50-10-5, 100-5-5
  - $M = 3,000$  個 : 30-10-10, 30-20-5, 60-10-5, 120-5-5

**実験 2**： 意思決定ノード数（分岐数）が一定のツリー（5-4-3 ツリー）に対して、経路数を様々に変更する。異なる6種類のシミュレーション経路（1,000本, 3,000本, 5,000本, 7,000本, 10,000本, 15,000本）に対する結果を比較する。

**実験 3**： 異なる100種類の乱数シードおよび6種類の経路数の収益率データセットに対する結果を比較する。

その他の設定条件は以下の通りである。

- 基本ケース(表1)に対するシミュレーション経路を生成する。
- 投資量決定戦略を用いる。
- 実験1および実験2には EUモデルを用いる。リスク回避係数として、 $\gamma = \infty$ (リスク最小化問題),  $\gamma = 10, 5, 4, 3, 2, 1.5, 1, 0.8, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, \gamma = 0$ (期待富最大化問題) の16種類を計算する。実験3には ERモデルを用いる。計画期末(4時点後)の期待富( $W_E$ )に対する制約値として、4.3節と同じ5種類を用いる。

## 5.1 分岐数の違いによる比較

### 5.1.1 1つの時点の分岐数のみを変えていった場合

1-1-1 ツリー(シミュレーション型モデル)から 5-4-3 ツリーまで、1つの時点の分岐数のみを変えていった場合の12種類の拡張決定ツリーに対する効率的フロンティアを図10に示す。

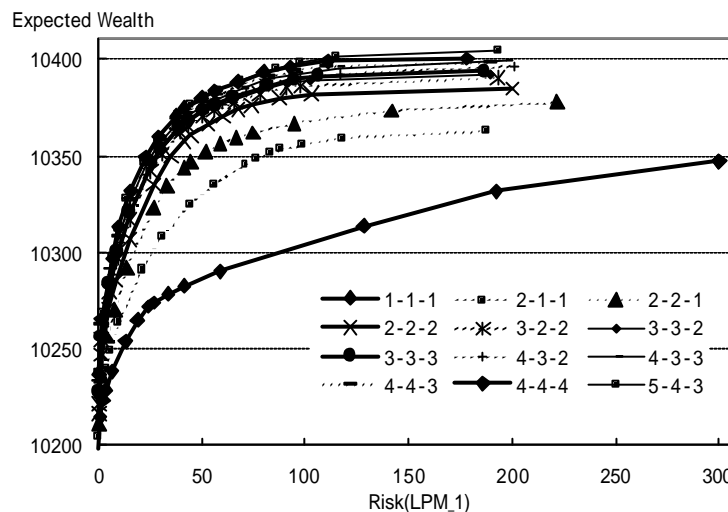


図 10 : 効率的フロンティア

シミュレーション型モデル(1-1-1 ツリー)に比べて、1時点目にも条件付き意思決定を入れた 2-1-1 ツリーの効率的フロンティアは急激に左上にシフトする。2時点目、3時点目にそれぞれ条件付き意思決定を加えた 2-2-1 ツリー、2-2-2 ツリーの場合も同様に大きく左上にシフトする。しかし、2-2-2 ツリーの場合より大きい分岐数にしてもそれほど大きくシフトせずに徐々に左上にシフトするのみである。このことから、条件付き意思決定の有無が大きく影響すること、ある程度分岐数を増やすと少しずつ分岐数を変えただけではあまり大きく変化しないことがわかる。

各分岐数ごとの0時点の最適投資比率を図11、各資産ごとの0時点の最適投資比率を図12に示す。分岐数が異なっても、 $\gamma$ の変化に伴う0時点の最適投資比率の違いはそれほど変わらない。図12を見ると 1-1-1 ツリー(シミュレーション型モデル)、2-1-1 ツリー、2-2-1 ツリーの結果が他の値と少し離れているが、それを除くとほぼ同じような値を示す。

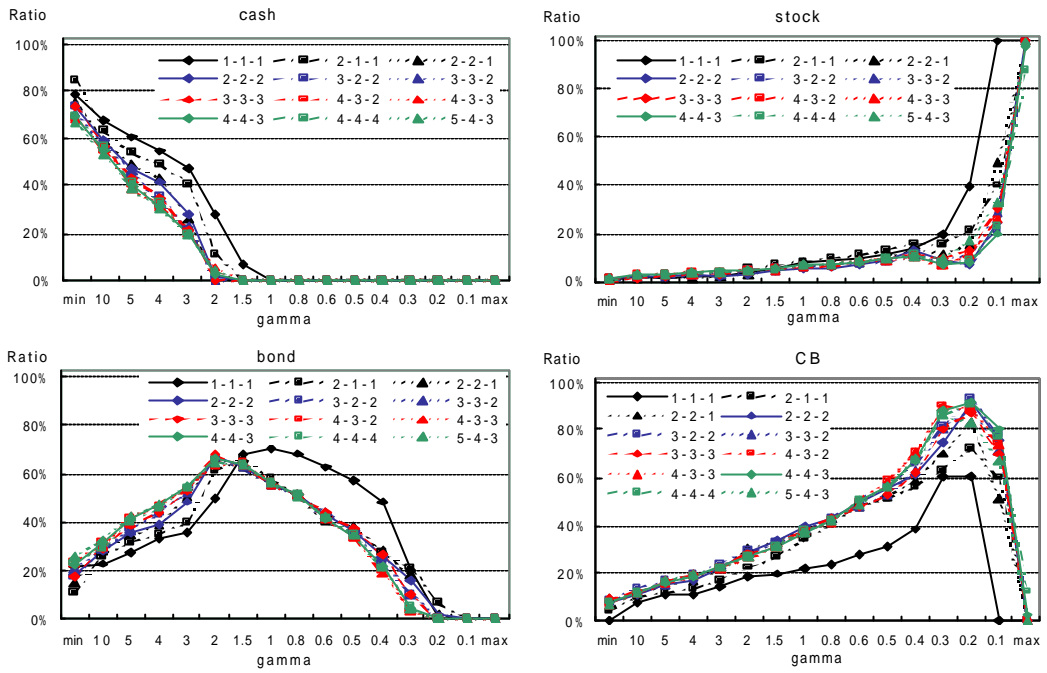


図 11：各分岐数ごとの最適投資比率(0時点)

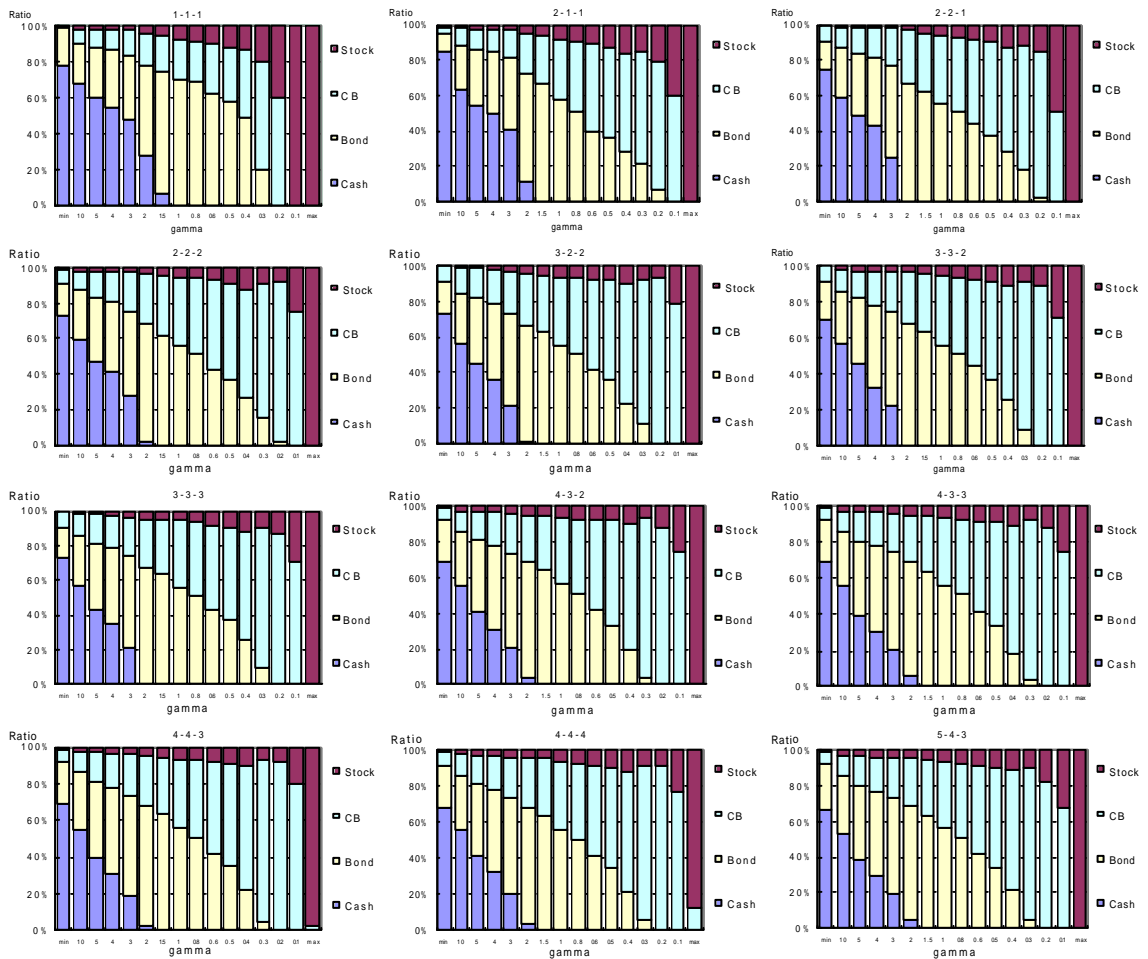


図 12：各資産ごとの最適投資比率(0時点)

### 5.1.2 各時点の分岐数を同一にする $N-N-N$ ツリーの場合

各時点の分岐数を同一にする12種類の  $N-N-N$  ツリーに対する効率的フロンティアを図13に示す。

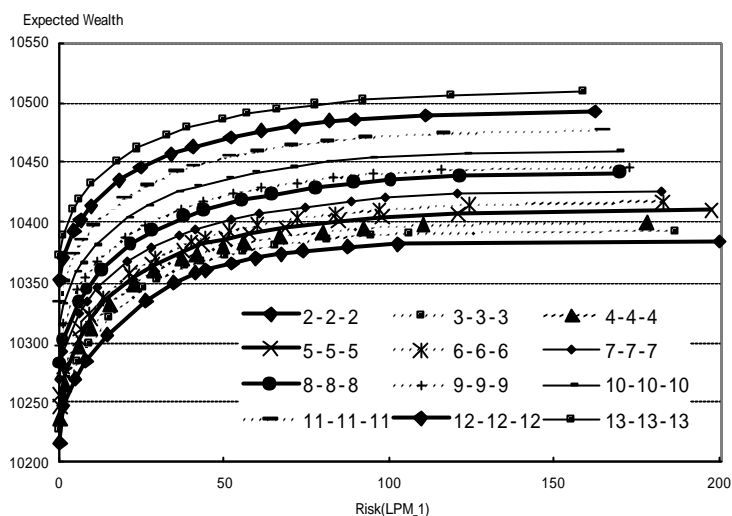


図 13 : 効率的フロンティア

分岐数を増加させると、図10と同様に、効率的フロンティアが左上にシフトする。しかし、分岐数の増加割合が大きいいため、図10よりも大きくシフトする。また、徐々に最大リスク値も低下する。各分岐数(ツリー)ごとの0時点の最適投資比率を図14、各資産ごとの0時点の最適投資比率を図15に示す。

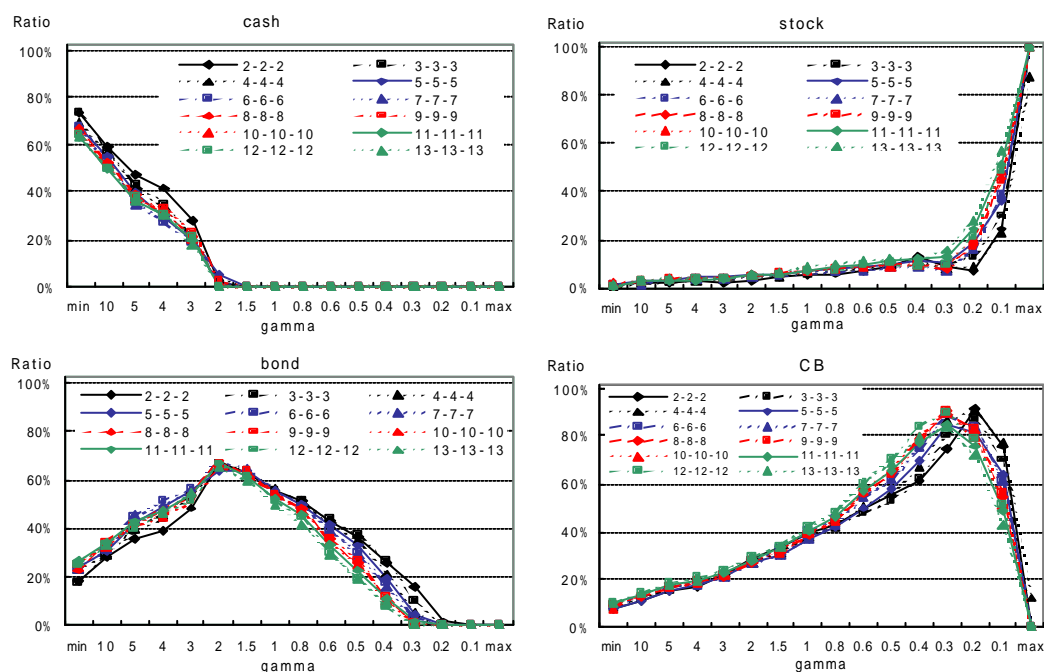


図 14 : 最適投資比率(0時点)

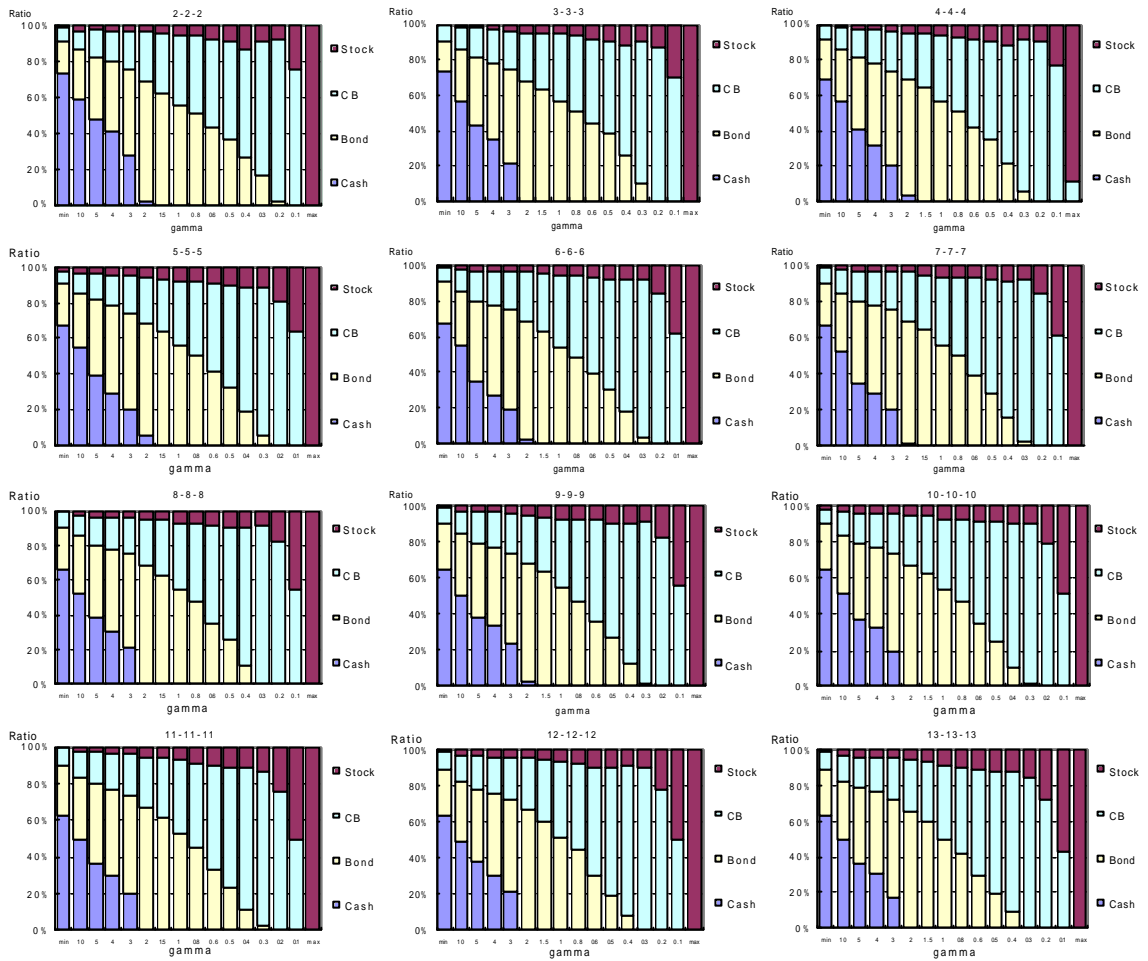


図 15：各資産ごとの最適投資比率(0時点)

分枝数を増加させると、より危険な資産であるCB や株式の投資比率が徐々に増加する。この理由は、分枝数が増加すると、期待富を増加させるために、0時点においてより危険な資産に投資したとしても1時点以降のノード数が増加し(意思決定の自由度が高まり)、リスクを十分にコントロールできるからである。

### 5.1.3 3時点 ( $T-1$ 時点) でのノード数が同一の場合

3時点 ( $T-1$  時点) でのノード数を同一にするという条件のもとで、分岐方法を変えていった場合の5種類のノード数に対する効率的フロンティアを図16に示す。

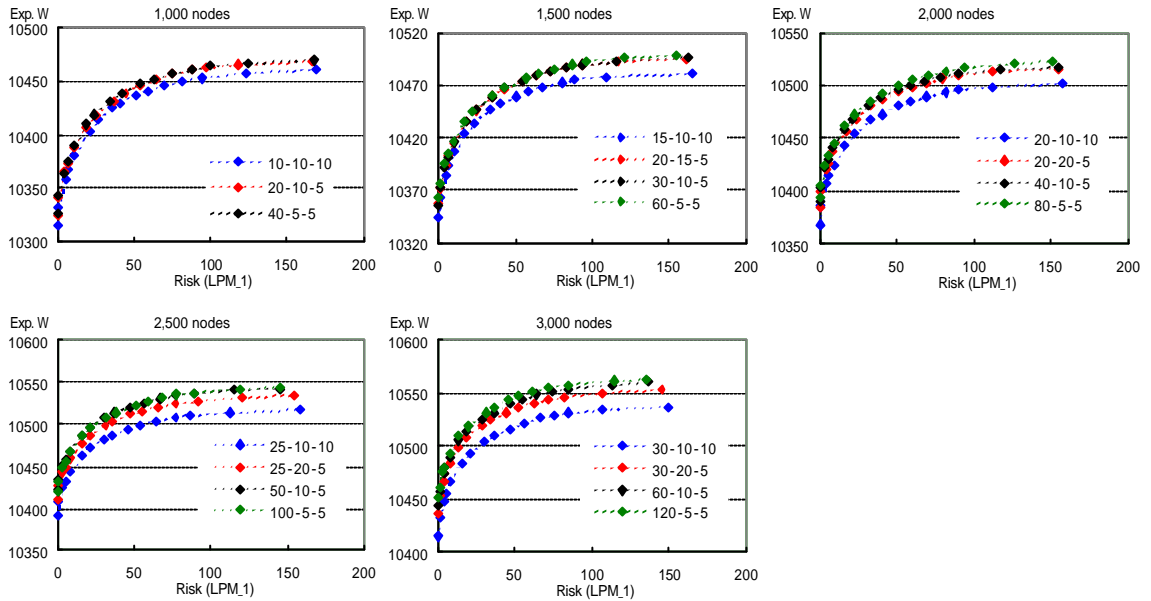


図 16 : ノード数が同一の場合の効率的フロンティア

図16から下記のように各ノード数ごとにいくつかのグループに分けることができる。

ノード数	ツリー構造 (2時点のノード数)		
1,000個	10-10-10(100)	20-10-5(200), 40-5-5(200)	
1,500個	15-10-10(150)	20-15-5(300), 30-10-5(300), 60-5-5(300)	
2,000個	20-10-10(200)	20-20-5(400), 40-10-5(400)	80-5-5(400)
2,500個	25-10-10(250)	25-20-5(500)	50-10-5(500), 100-5-5(500)
3,000個	30-10-10(300)	30-20-5(600)	60-10-5(600), 120-5-5(600)

設定したツリーの違いによって、以下の組み合わせで比較を行うことができる。

① 1時点と2時点のノード数がともに異なる場合

ノード数	比較するツリー	
1,000個	10-10-10(100) , 20-10-5(200)	10-10-10(100) , 40-5-5(200)
1,500個	15-10-10(150) , 20-15-5(300)	15-10-10(150) , 30-10-5(300)
	15-10-10(150) , 60-5-5(300)	
2,000個	20-10-10(200) , 40-10-5(400)	20-10-10(200) , 80-5-5(400)
2,500個	25-10-10(250) , 50-10-5(500)	25-10-10(250) , 100-5-5(500)
3,000個	30-10-10(300) , 60-10-5(600)	30-10-10(300) , 120-5-5(600)

② 1時点のノード数 (分岐数) は同じだが、2時点のノード数 (分岐数) が異なる場合

ノード数	比較するツリー
2,000個	20-10-10(200) , 20-20-5(400)
2,500個	25-10-10(250) , 25-20-5(500)
3,000個	30-10-10(300) , 30-20-5(600)

③ 1時点のノード数(分岐数)は異なるが、2時点のノード数は同じ場合

ノード数	比較するツリー
1,000個	20-10-5(200) , 40-5-5(200)
1,500個	20-15-5(300) , 30-10-5(300) , 60-5-5(300)
2,000個	20-20-5(400) , 40-10-5(400) , 80-5-5(400)
2,500個	25-20-5(500) , 50-10-5(500) , 100-5-5(500)
3,000個	30-20-5(600) , 60-10-5(600) , 120-5-5(600)

経路数が同じであるため、将来時点でのノード数が多いほど、ノードを通る経路数が減少し、効率的フロンティアは左上にシフトする。効率的フロンティアは①の場合に最も異なるが、②の場合も同様に異なる。一方、③の場合には似た効率的フロンティアが得られる場合が多い。③の場合、1時点のノードを通る経路数は異なるが、1時点ではノードを通る経路数が多いため、②の場合のように、2時点で異なるよりも影響は小さいと考えられる。

各資産ごとの0時点の最適投資比率を図17に示す。

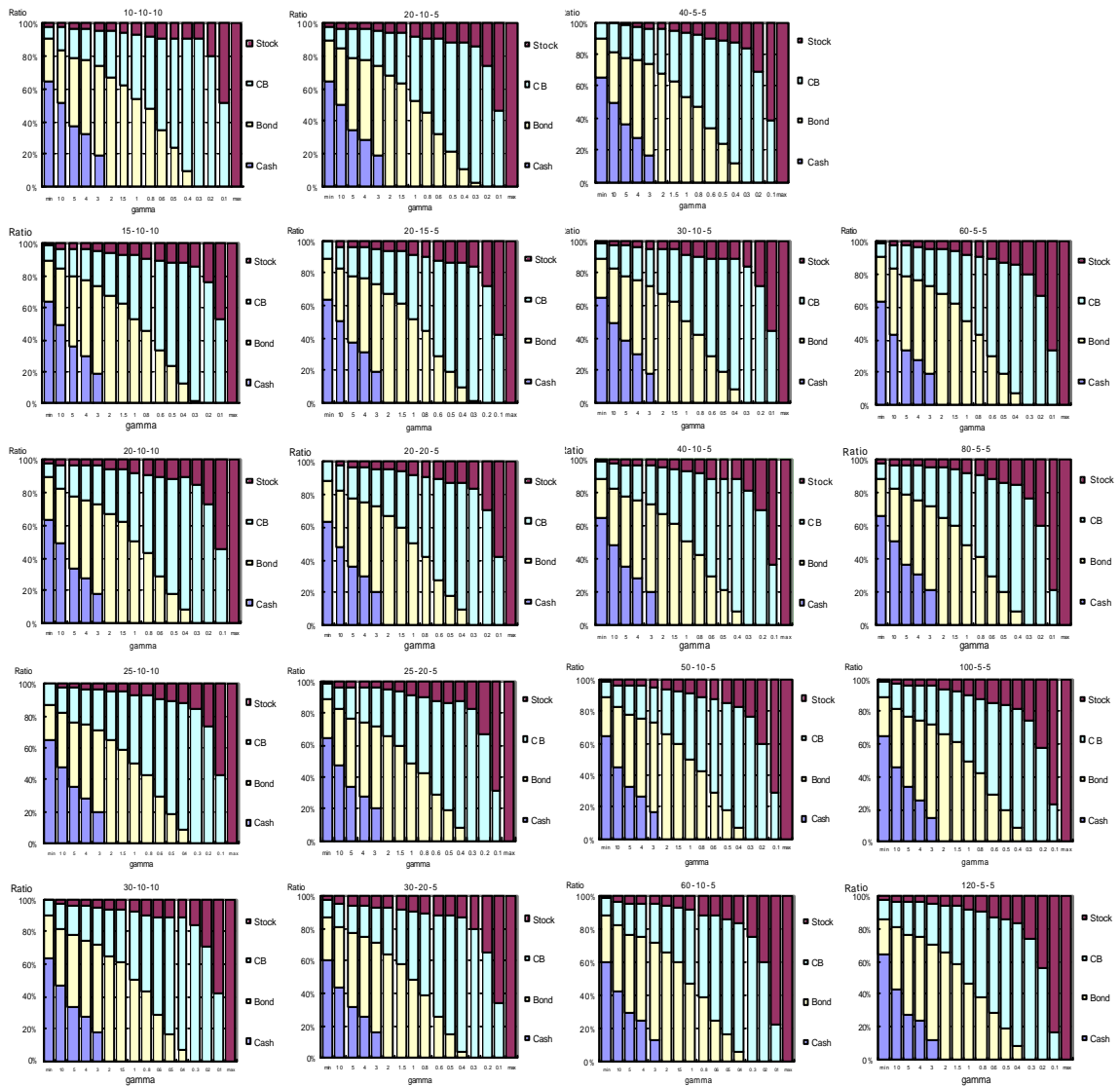


図 17 : 各資産ごとの最適投資比率(0時点)



## 5.2 経路数の違いによる比較

異なる6種類の経路数に対する効率的フロンティアを図18に示す<sup>23</sup>。

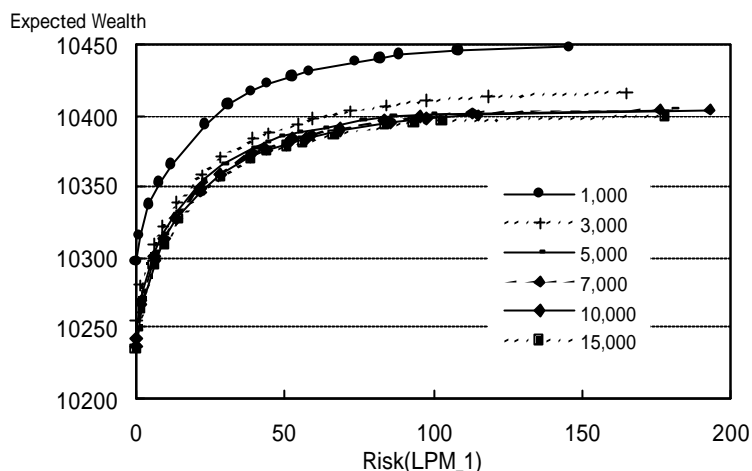


図 18：様々な経路数に対する効率的フロンティア

経路数 1,000本に比べて 3,000本の場合の効率的フロンティアは大きく右下にシフトする。5,000本、7,000本、10,000本、15,000本となるにつれて、右下にシフトするが、その幅は徐々に狭くなる。各経路ごとの0時点の最適投資比率を図19、各資産ごとの0時点の最適投資比率を図20に示す。

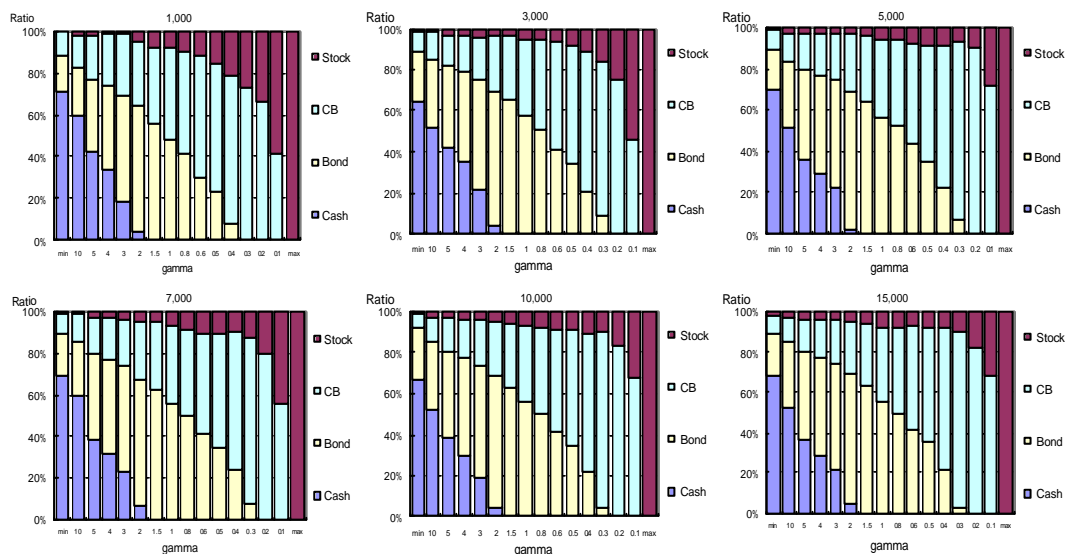


図 19：各経路数ごとの最適投資比率 (0時点)

<sup>23</sup> 経路数が異なると、乱数シードが同じでも全く異なる収益率データセットを生成するために、サンプリング・エラーの問題が生じ、直接比較することは難しい。そこで、乱数シードを同じにせず、経路ごとにそのリスク値が5.3節で計算した100種類のリスク値の平均値に最も近い値を持つ乱数シードを用いる。サンプリング・エラーの問題は5.3節で検討する。

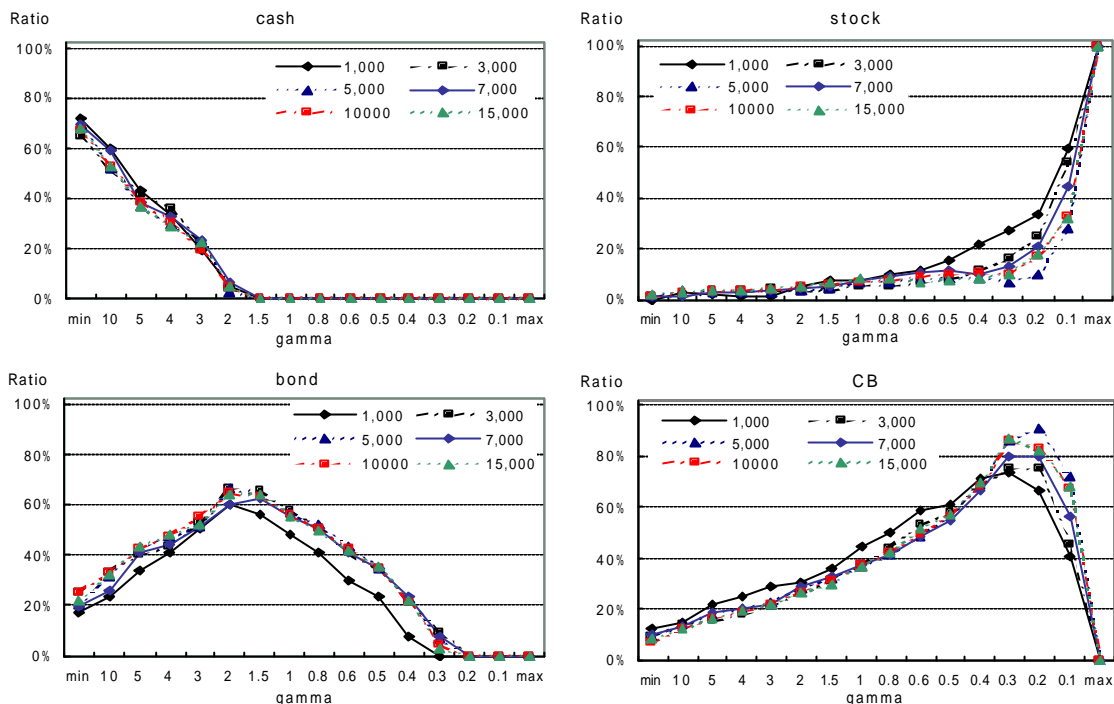


図 20：各資産ごとの最適投資比率(0時点)

経路数が異なっても、 $\gamma$ の変化に伴う0時点の最適投資比率の違いはそれほど変わらない。図20を見ると、1,000本の場合、他の値と少し離れているが、それを除くとほぼ同じような値を示す。

### 5.3 サンプルング・エラーの検討

乱数シードおよび経路数の異なる100種類の収益率データセットに対する最適解を求め、その最適解の分布を調べる。そして、経路数が増加することによって最適解の分布に関する統計量がどのように変化するかを調べる。

表 10：リスク値の基本統計量

$W_E = 10,280$							$W_E = 10,310$							$W_E = 10,340$						
	1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000		1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000		1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000
平均	0.00	1.42	2.24	2.73	3.14	3.42	平均	0.67	6.01	7.40	8.21	8.94	9.42	平均	4.89	13.91	16.07	17.40	18.53	19.34
標準偏差	0.00	0.36	0.29	0.27	0.24	0.24	標準偏差	0.55	0.78	0.59	0.55	0.47	0.43	標準偏差	1.42	1.33	1.06	0.93	0.86	0.71
最大値	0.00	2.27	3.00	3.47	3.72	4.03	最大値	2.71	7.60	9.14	9.43	10.22	10.49	最大値	8.73	16.95	18.93	19.44	21.20	20.96
75%点	0.00	1.66	2.42	2.92	3.30	3.59	75%点	0.95	6.55	7.72	8.61	9.22	9.71	75%点	5.83	15.03	16.80	18.10	19.11	19.85
50%点	0.00	1.44	2.24	2.75	3.14	3.41	50%点	0.60	6.05	7.36	8.24	8.97	9.39	50%点	4.87	14.00	15.94	17.47	18.52	19.35
25%点	0.00	1.19	2.04	2.53	2.98	3.29	25%点	0.25	5.52	6.98	7.91	8.62	9.17	25%点	3.86	13.05	15.39	16.90	17.92	18.84
最小値	0.00	0.61	1.67	2.13	2.43	2.69	最小値	0.00	4.02	5.91	7.05	7.66	7.98	最小値	2.25	10.91	13.55	14.93	16.32	16.97
$W_E = 10,370$							$W_E = 10,385$													
	1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000		1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000		1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000
平均	12.91	28.18	32.11	35.01	37.32	39.21	平均	19.05	41.05	47.71	53.82	59.02	63.79	平均	32.64	54.21	61.47	66.41	75.36	78.57
標準偏差	2.70	2.75	2.52	2.12	2.31	2.07	標準偏差	3.83	4.95	5.52	4.65	5.34	4.92	標準偏差	21.42	44.61	50.94	57.18	62.55	67.09
最大値	21.08	35.73	38.69	40.62	44.71	45.55	最大値	32.64	54.21	61.47	66.41	75.36	78.57	最大値	19.02	40.33	47.36	53.54	59.14	62.94
75%点	14.81	29.94	33.60	36.45	38.76	40.64	75%点	21.42	44.61	50.94	57.18	62.55	67.09	75%点	19.02	40.33	47.36	53.54	59.14	62.94
50%点	12.92	28.06	31.84	35.07	37.32	39.07	50%点	19.02	40.33	47.36	53.54	59.14	62.94	50%点	16.22	37.39	43.23	50.32	54.97	61.19
25%点	10.85	25.95	30.26	33.59	35.75	37.90	25%点	16.22	37.39	43.23	50.32	54.97	61.19	25%点	10.29	31.63	38.29	42.26	46.56	53.58
最小値	6.96	22.25	27.44	28.28	32.17	34.82	最小値	10.29	31.63	38.29	42.26	46.56	53.58	最小値						

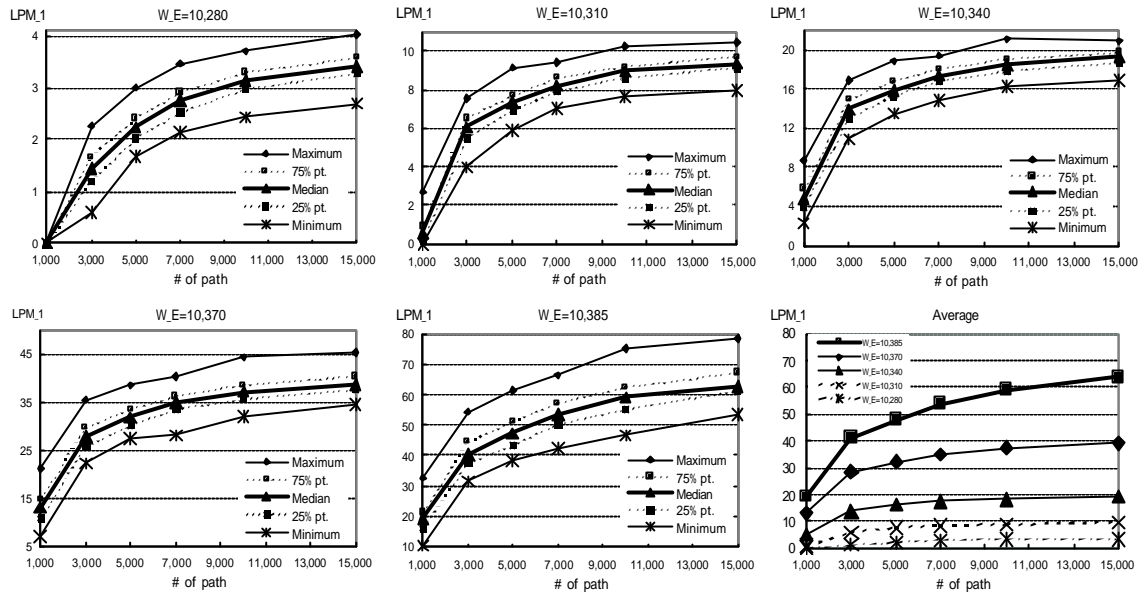


図 21：経路数とリスク値(LPM<sub>1</sub>)の関係

表10および図21に5種類の期待富の水準に対する6種類の経路数とリスク値の関係を示す。5本の線はそれぞれ上から100種類の最適解の最大値、75%点、50%点、25%点、最小値を表す。図21の右下図は、6種類の経路数と平均リスク値の関係を示す。また、表10の平均リスク値を用いて、期待富との関係を図22に示す<sup>24</sup>。

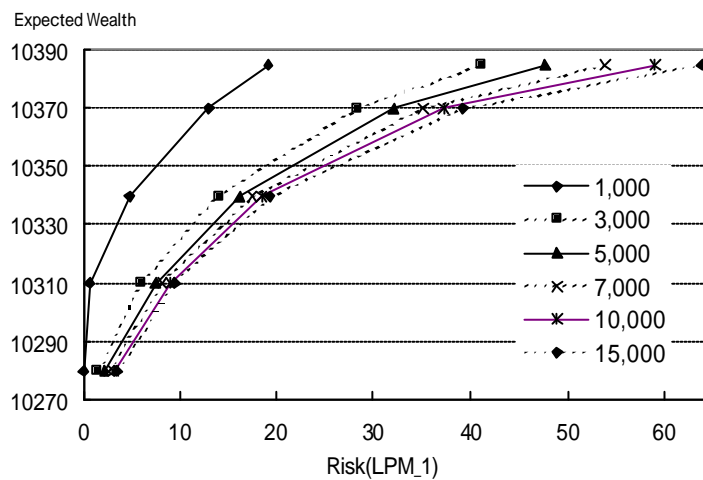


図 22：リスクの平均値と期待富との関係

5.2節でも示したように、経路数が増加すると効率的フロンティアは右下にシフトする。図21を見ると、経路数が15,000本までは経路数を増加させても、リスク値は収束するようには見えない。しかし、徐々にその傾きは小さくなっていくので、さらに経路数を増加させると、平均値はある一つの値に収束することが期待される。一方、標準偏差の値は平均値が収束しないため、経路数を増加させても小さくはならない。しかし、リスク値の水準が大きくなっているため、相対的に見ると(変動係数で見ると)ばらつきは徐々に小さくなる。枇々木[21]のシミュレーション型モデルに対するサンプリング・エラーの数値実験と比べてみよう。期間数は3期間であるが、シミュレー

<sup>24</sup>5種類の要求期待富の水準に対する効率的フロンティアの一部を表す。

シモン型モデルの場合、乱数シード 100 種類のリスクの平均値は、経路数が 500 本でも 10,000 本でも近い値である。また、経路数を増加させると、サンプリング・エラー（標準偏差）を減少させることができる。しかし、混合型モデルの場合は、経路数 15,000 本でも乱数シード 100 種類のリスクの平均値が収束せず、標準偏差もあまり改善しない。経路数が少ない場合、サンプリング・エラーの問題はシミュレーション型モデルよりも、十分に考慮して意思決定を行う必要がある。この数値実験に用いた 5-4-3 ツリーでは、各時点の意思決定ノードを通る経路数は以下ようになる。

経路数	1 時点	2 時点	3 時点
1,000	200	50	17
3,000	600	150	50
5,000	1,000	250	83
7,000	1,400	350	117
10,000	2,000	500	167
15,000	3,000	750	250

経路数が 15,000 本の場合、3 時点では各決定ノードに対し、250 本の経路によって不確実性を記述することになる。サンプリング・エラーを減少させるためには、より多くのシミュレーション経路が必要である。数値実験に用いた計算機では、経路数は 15,000 本が限界のため、経路数を固定するならば、分岐数を減らす（ツリーを小さくする）ことにより、サンプリング・エラーを減少させることができると考えられる。このことを確かめるためには、今後様々な分岐数（ツリー）に対して同様の実験を行う必要がある。

次に、0 時点における最適投資比率の平均値と標準偏差を表 11 に、すべての時点における平均最適投資比率を図 23 に示す。

表 11：最適投資比率の平均値と標準偏差（0 時点）

Average							Standard Deviation						
Cash	1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000	Cash	1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000
$W_E = 10,280$	58.5%	51.9%	48.0%	46.5%	45.2%	44.0%	$W_E = 10,280$	5.0%	3.6%	2.7%	2.6%	2.1%	1.8%
$W_E = 10,310$	53.7%	36.8%	33.6%	32.1%	30.9%	29.3%	$W_E = 10,310$	7.3%	4.2%	3.0%	2.8%	2.6%	2.4%
$W_E = 10,340$	38.0%	20.2%	15.5%	13.2%	11.1%	9.4%	$W_E = 10,340$	7.7%	4.8%	3.8%	3.1%	3.7%	2.9%
$W_E = 10,370$	19.5%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	$W_E = 10,370$	9.2%	0.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
$W_E = 10,385$	8.4%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	$W_E = 10,385$	8.3%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Stock	1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000	Stock	1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000
$W_E = 10,280$	2.0%	1.9%	2.1%	2.5%	2.5%	2.5%	$W_E = 10,280$	1.7%	1.1%	0.8%	0.8%	0.6%	0.6%
$W_E = 10,310$	2.1%	2.6%	2.9%	3.0%	3.1%	3.2%	$W_E = 10,310$	1.9%	1.3%	0.9%	0.9%	0.7%	0.5%
$W_E = 10,340$	2.8%	3.4%	3.8%	3.8%	4.1%	4.3%	$W_E = 10,340$	2.0%	1.5%	1.0%	1.0%	0.8%	0.7%
$W_E = 10,370$	3.8%	5.2%	5.8%	6.0%	6.3%	6.7%	$W_E = 10,370$	2.2%	1.7%	1.1%	1.1%	1.0%	1.0%
$W_E = 10,385$	4.8%	6.7%	7.5%	8.5%	8.5%	8.4%	$W_E = 10,385$	2.8%	1.8%	1.5%	1.3%	1.4%	1.3%
Bond	1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000	Bond	1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000
$W_E = 10,280$	28.8%	32.0%	34.9%	36.1%	37.0%	37.9%	$W_E = 10,280$	5.6%	3.7%	2.7%	2.4%	2.0%	1.7%
$W_E = 10,310$	30.2%	42.3%	44.5%	45.7%	46.6%	47.7%	$W_E = 10,310$	7.0%	4.1%	2.8%	2.8%	2.4%	2.2%
$W_E = 10,340$	40.5%	53.3%	56.7%	58.3%	59.7%	61.1%	$W_E = 10,340$	6.8%	4.7%	3.4%	3.0%	3.2%	2.6%
$W_E = 10,370$	53.3%	63.4%	61.0%	58.6%	56.6%	54.8%	$W_E = 10,370$	7.9%	2.6%	3.0%	2.5%	2.7%	2.6%
$W_E = 10,385$	60.5%	52.5%	45.7%	37.8%	30.7%	24.1%	$W_E = 10,385$	6.9%	5.6%	7.3%	6.1%	6.6%	5.8%
CB	1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000	CB	1,000	3,000	5,000	7,000	10,000	15,000
$W_E = 10,280$	10.7%	14.1%	15.0%	15.0%	15.4%	15.5%	$W_E = 10,280$	2.9%	2.2%	1.5%	1.4%	1.1%	0.9%
$W_E = 10,310$	14.1%	18.2%	19.0%	19.2%	19.5%	19.7%	$W_E = 10,310$	3.2%	2.3%	1.7%	1.5%	1.2%	1.0%
$W_E = 10,340$	18.8%	23.1%	24.0%	24.7%	25.1%	25.3%	$W_E = 10,340$	3.4%	2.7%	1.7%	1.6%	1.6%	1.1%
$W_E = 10,370$	23.5%	31.2%	33.3%	35.5%	37.2%	38.5%	$W_E = 10,370$	3.8%	3.2%	2.9%	2.5%	2.6%	2.5%
$W_E = 10,385$	26.4%	40.8%	46.8%	53.7%	60.8%	67.4%	$W_E = 10,385$	5.0%	5.5%	6.9%	6.0%	6.6%	5.9%

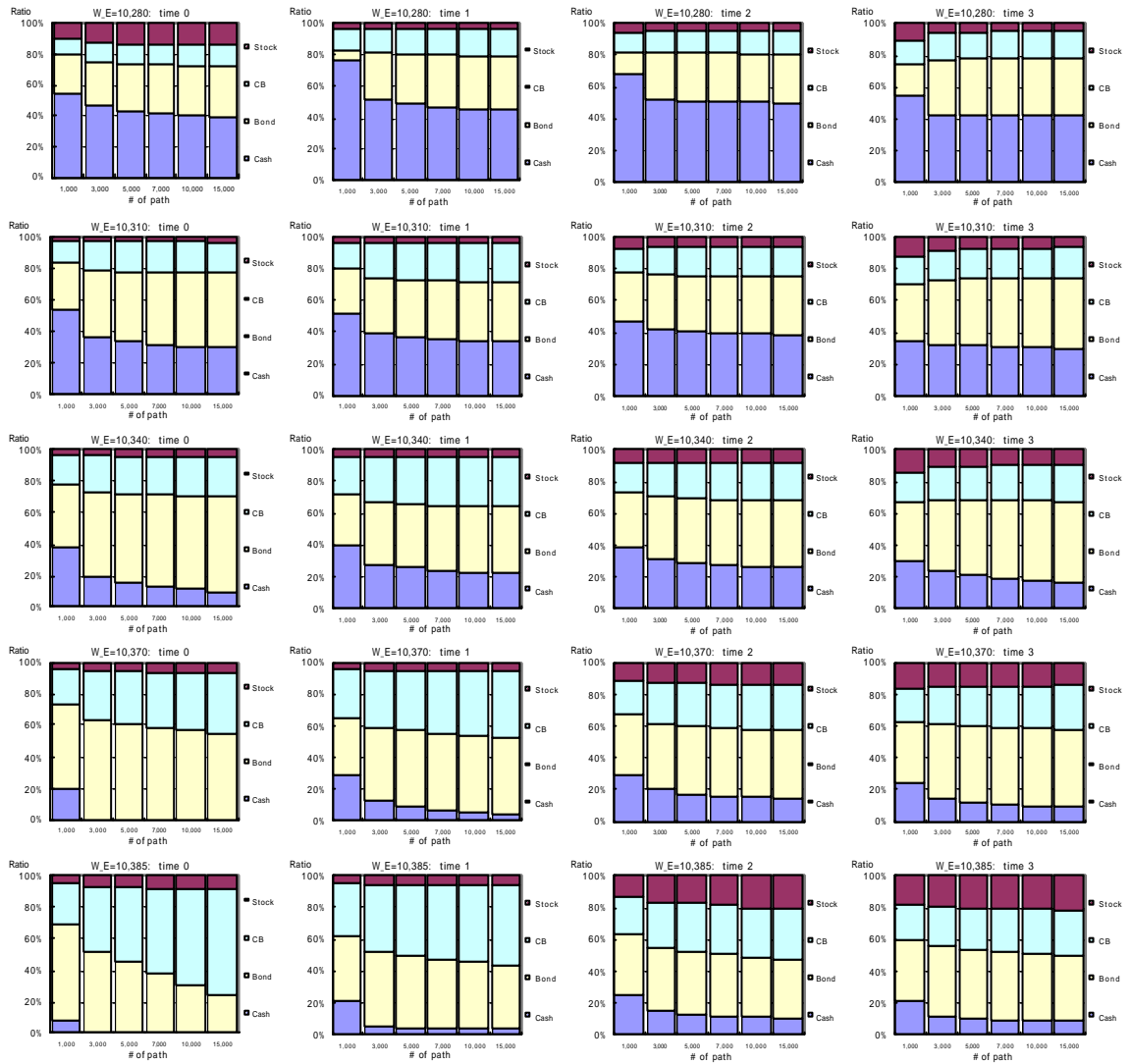


図 23：平均最適投資比率

この数値実験では、ある一定の要求期待富に対するリスク値の分布を調べるために、ERモデルを用いている。図22でも見たように、経路数が増加すると同一の期待富に対してリスクは大きくなるため、投資比率を単純に比較することはできないが、それを踏まえた上で特徴を考察する。

0時点においては、経路数が増加するにつれて、株式とCBの投資比率が増加し、現金と債券の投資比率は減少する。また、 $W_E = 10,385$  の場合の債券とCBを除いて、標準偏差は経路数が増加するにつれて減少する。経路数を増加させると、サンプリング・エラーを減少させることができる。債券とCBは収益率の似た資産であり、ちょうど  $W_E = 10,385$  のあたりで入れ替えが行われ、乱数シードの違いにより大きな差が出たと考えられる。線形計画問題の最適解は端点解であり、少しの入力パラメータの変動により、大きく最適解が変化するという特徴がある。したがって、この点に関してはサンプリング・エラーだけでなく、最適解が大きく変わりやすいという特徴も考慮して分析する必要がある。

図23を見ると、経路数による平均投資比率の違いは時間が経過するにつれて少なくなる。0時点での投資決定は他の時点よりも重要であり、経路数が少ないと適切な意思決定ができないことが分かる。

## 6 取引戦略の違いによる比較

2.2.2項において、投資量関数の違いによって、投資量決定戦略、投資額決定戦略、投資比率決定戦略を記述できることを示した。シナリオ・ツリー型モデルでは、どの戦略を用いても同一の最適解が得られるが、混合型モデルでは最適解は異なる。そこで、取引戦略の違いにより、どのように最適解が異なるかを数値実験により調べる。設定条件は以下の通りである。

- シミュレーション経路：10,000 本
- EU モデルを用いる。リスク回避係数には 5節と同じ16種類を用いる。

各図における 'Ratio' は投資比率決定戦略、'Unit' は投資量決定戦略、'Value' は投資額決定戦略を表す。

### 6.1 投資比率決定戦略モデルを解くための計算アルゴリズム

投資量決定戦略モデルと投資額決定戦略モデルは線形計画問題として記述できる。一方、投資比率決定戦略モデルは大規模な非凸非線形計画問題となるため、一般に大域的最適解を求めるのは難しい。そのままの定式化で実際に計算してみても、(数理計画ソフトウェアによる)計算が途中で終了し、最適解が得られない。そこで、投資比率決定戦略も含めて取引戦略を比較するために、投資比率決定戦略モデルの近似解を得るための計算アルゴリズムを考える。

投資比率決定戦略モデルの最適解が得られ、 $W_t^{(i)*}$  が計算できたとしよう。その値を用いて投資量関数を  $h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left( \frac{W_t^{(i)*}}{\rho_{jt}^{(i)}} \right) z_{jt}^s$  と設定し、問題を解くと同じ解が得られるであろう。ただし、これは大域的最適解が得られる場合にのみ成り立つ。そのことを保証することはできないが、ここでは、この性質を利用して、投資比率決定戦略モデルの近似解を得る方法として、以下の計算アルゴリズムを用いる。

手順 1 : 投資量決定戦略モデルに対する最適解を求める。最適解から  $t$  時点の経路  $i$  の富  $W_{t(0)}^{(i)*}$  を計算する。目的関数値を  $Obj_0$  とし、 $k = 1$  とする。

手順 2 : 投資量関数として、 $h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left( \frac{W_{t(k-1)}^{(i)*}}{\rho_{jt}^{(i)}} \right) z_{jt}^s$  を用いて、最適解を求める。最適解から  $t$  時点の経路  $i$  の富  $W_{t(k)}^{(i)*}$  を計算する。目的関数値を  $Obj_k$  とする。

手順 3 :  $Obj_k - Obj_{k-1}$  の値が許容値を下回っていれば、終了する<sup>25</sup>。さもなければ、 $k \leftarrow k + 1$  として、手順 2 へ戻る。

この計算アルゴリズムは、同一ノードを通る経路上の投資比率をなるべく同一にするための投資量関数を反復的に用いるヒューリスティックな方法の一つであり、投資比率決定戦略モデルの大域的最適解が求められることを保証しない。

反復することによって、どのように最適解が変化するかを数値実験により調べる。具体的には、手順 2 の手続きを  $k = 5$  まで繰り返し、目的関数値の改善率を調べ、意思決定ノード内の各経路の投資比率の平均と標準偏差を調べる。収益率は基本ケース(表 1)を用いて生成する。

目的関数値の改善率  $IR(k)$  を以下のように定義する。

$$IR(k) = \frac{Obj_k - Obj_{k-1}}{Obj_5 - Obj_0}, \quad (k = 1, \dots, 5)$$

<sup>25</sup> 理論的に収束する保証はないが、許容値としてある程度小さい値を設定し、反復する必要がある。

ここで、 $Obj_k$  は  $k$  回目の目的関数値、 $Obj_0$  は投資量決定戦略モデルの目的関数値を表す。改善率は、手順2の5回目 ( $k = 5$ ) の目的関数値 ( $Obj_5$ ) から最初の投資量決定戦略モデルの目的関数値 ( $Obj_0$ ) を引いた値を100%として、 $k$  回目の反復でどれだけ改善されたかを表す。 $Obj_5$  を用いる理由は経験的に5回目までに目的関数値がほぼ収束したからである。表12に15種類のリスク回避係数に対する改善率を示す<sup>26</sup>。例えば、 $\gamma = 0.6$  の場合、目的関数は第1回目 ( $k = 1$ ) の反復で  $Obj_5 - Obj_0$  の94.3%、第2回目 ( $k = 2$ ) の反復で5.5%増加することを表す。第1回目の反復で90%以上、第2回目の反復までに99%以上改善し、それ以降はほとんど改善効果がない。累積改善率  $CIR(k)$  を次のように定義しよう。

$$CIR(k) = \sum_{i=1}^k IR(i) = \frac{Obj_k - Obj_0}{Obj_5 - Obj_0}$$

表の最終行にある  $CIR(2)$  はすべて99.2%以上になる。目的関数はほとんど収束し、2回の反復で十分であると考えてよいだろう。

表 12 : 改善率

$\gamma$	10	5	4	3	2	1.5	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	max	Ave.
$k = 1$	99.2%	96.1%	95.1%	95.3%	95.1%	95.6%	95.1%	95.0%	94.3%	94.4%	94.4%	94.3%	100.0%	91.2%	85.9%	94.7%
$k = 2$	0.6%	3.8%	4.6%	4.6%	4.7%	4.2%	4.8%	4.9%	5.5%	5.4%	5.5%	5.6%	0.0%	8.3%	13.3%	5.1%
$k = 3$	0.2%	0.1%	0.2%	0.1%	0.2%	0.2%	0.1%	0.2%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.0%	0.4%	0.8%	0.2%
$k = 4$	0.1%	-0.1%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
$k = 5$	0.0%	0.0%	0.0%	-0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
$CIR(2)$	99.8%	100.0%	99.7%	99.9%	99.8%	99.8%	99.8%	99.8%	99.8%	99.9%	99.9%	99.9%	100.0%	99.5%	99.2%	99.8%

次に、 $k$  回目の反復における資産  $j$  の  $t$  時点の意思決定ノード内に含まれる各経路の投資比率の標準偏差の平均値  $\bar{\sigma}_{x,jt(k)}$  を表13に示す。 $\#k$  は  $k$  回目の反復を表す。この値は以下のように計算される。

$$\bar{\sigma}_{x,jt(k)} = \frac{1}{|S_t|} \sum_{s \in S_t} \sigma_{x,jt(k)}^s$$

$$\sigma_{x,jt(k)}^s = \frac{1}{|V_t^s|} \sum_{i \in V_t^s} \left( x_{jt(k)}^{(i)*} - \bar{x}_{jt(k)}^{s*} \right)^2, \quad \text{ただし、} \quad \bar{x}_{jt(k)}^{s*} = \frac{1}{|V_t^s|} \sum_{i \in V_t^s} x_{jt(k)}^{(i)*}$$

$$x_{jt(k)}^{(i)*} = \frac{\rho_{jt}^{(i)} \cdot h^{(i)}(z_{jt}^{s*})}{W_{t(k)}^{(i)*}} = \frac{\rho_{jt}^{(i)} \left( W_{t(k-1)}^{(i)*} / \rho_{jt}^{(i)} \right) z_{jt}^{s*}}{W_{t(k)}^{(i)*}} = \left( \frac{W_{t(k-1)}^{(i)*}}{W_{t(k)}^{(i)*}} \right) z_{jt}^{s*}$$

ここで、 $x_{jt(k)}^{(i)*}$  は  $k$  回目の反復における最適投資比率、 $\sigma_{x,jt(k)}^s$  は集合  $V_t^s$  に含まれる  $x_{jt(k)}^{(i)*}$  の標準偏差を表す。 $|S_t|$  は  $t$  時点のノード数、 $|V_t^s|$  はノード内の経路数を表す。

1時点は5個、2時点は20個、3時点は60個の決定ノードの標準偏差の平均値を表す。ただし、意思決定ノード内の各経路の投資比率がすべて0%の場合を除いて計算する<sup>27</sup>。全経路(10,000本)の投資比率がすべて0%の場合、'—'とする。

$\bar{\sigma}_{x,jt(k)}$  の値が0ならば、 $t$  時点のノード  $s$  の資産  $j$  の投資比率はすべて同一の値をもつ。この値が小さければ小さいほど、ノード内の各経路の投資比率の値は近い値を取ることを表す。投資量決定戦略 ( $k = 0$ ) における投資比率の標準偏差の平均値は3~5%であるが、第1回目 ( $k = 1$ ) で

<sup>26</sup> リスク最小化問題はリスク値がすべて0であるため、表から除く。

<sup>27</sup> 各経路の投資比率がすべて0%の場合(標準偏差も0%)を含めると、標準偏差の平均値は小さくなり、過小評価をする可能性があるからである。

1.3%以下に減少し、第2回目 ( $k = 2$ ) で0.1%以下になる。2回反復を繰り返すと、決定ノード内のばらつきはほとんどなくなる。すなわち、同一ノードにおける各経路ごとの投資比率はほとんど同じになる。大域的最適解の導出は保証できないが、線形計画問題を繰り返し解くので、解が得られないという問題はない。ノード内の投資比率はほぼ同一の値を持つことができるので、この計算アルゴリズムは局所的最適解を求めることができると考えてよいだろう。この結果に基づき、以降では3回線形計画問題を解く ( $k = 0, 1, 2$ ) ことによって投資比率決定戦略モデルに対する最適解を求めることにする。

表 13：各時点の意思決定ノード内の各経路の投資比率の標準偏差の平均値

$\gamma = 10$					$\gamma = 5$					$\gamma = 4$							
	# 0	# 1	# 2	# 3		# 0	# 1	# 2	# 3		# 0	# 1	# 2	# 3			
cash	$t = 1$	1.04%	0.04%	0.00%	0.00%	cash	$t = 1$	1.50%	0.07%	0.01%	0.01%	cash	$t = 1$	1.54%	0.09%	0.01%	0.01%
	$t = 2$	0.54%	0.04%	0.02%	0.01%		$t = 2$	0.74%	0.03%	0.01%	0.02%		$t = 2$	0.84%	0.04%	0.01%	0.01%
	$t = 3$	1.06%	0.04%	0.02%	0.01%		$t = 3$	1.41%	0.06%	0.01%	0.02%		$t = 3$	1.50%	0.07%	0.02%	0.01%
stock	$t = 1$	0.90%	0.00%	0.00%	—	stock	$t = 1$	2.07%	0.00%	0.00%	—	stock	$t = 1$	1.54%	0.00%	0.00%	—
	$t = 2$	0.28%	0.00%	0.00%	—		$t = 2$	0.49%	0.01%	0.01%	0.01%		$t = 2$	0.68%	0.01%	0.00%	0.02%
	$t = 3$	0.77%	0.01%	0.01%	0.00%		$t = 3$	1.11%	0.03%	0.01%	0.01%		$t = 3$	1.16%	0.03%	0.01%	0.02%
bond	$t = 1$	0.26%	0.02%	0.01%	0.00%	bond	$t = 1$	0.30%	0.01%	0.02%	0.01%	bond	$t = 1$	0.34%	0.02%	0.03%	0.03%
	$t = 2$	0.43%	0.01%	0.01%	0.02%		$t = 2$	0.54%	0.03%	0.02%	0.03%		$t = 2$	0.62%	0.03%	0.03%	0.01%
	$t = 3$	0.68%	0.03%	0.03%	0.01%		$t = 3$	0.87%	0.04%	0.02%	0.02%		$t = 3$	0.93%	0.04%	0.03%	0.02%
CB	$t = 1$	0.48%	0.01%	0.01%	0.00%	CB	$t = 1$	0.66%	0.00%	0.02%	—	CB	$t = 1$	0.77%	0.03%	0.03%	0.00%
	$t = 2$	0.73%	0.02%	0.02%	0.01%		$t = 2$	0.89%	0.02%	0.01%	0.00%		$t = 2$	0.89%	0.02%	0.01%	0.02%
	$t = 3$	1.37%	0.03%	0.02%	0.03%		$t = 3$	1.45%	0.05%	0.02%	0.01%		$t = 3$	1.46%	0.05%	0.03%	0.03%
$\gamma = 3$					$\gamma = 2$					$\gamma = 1.5$							
	# 0	# 1	# 2	# 3		# 0	# 1	# 2	# 3		# 0	# 1	# 2	# 3			
cash	$t = 1$	1.58%	0.09%	0.01%	0.00%	cash	$t = 1$	1.62%	0.14%	0.02%	0.00%	cash	$t = 1$	1.63%	0.12%	0.01%	0.02%
	$t = 2$	1.00%	0.04%	0.01%	0.01%		$t = 2$	1.27%	0.04%	0.01%	0.01%		$t = 2$	1.44%	0.04%	0.01%	0.00%
	$t = 3$	1.69%	0.09%	0.01%	0.00%		$t = 3$	1.99%	0.12%	0.01%	0.00%		$t = 3$	2.23%	0.14%	0.01%	0.00%
stock	$t = 1$	2.03%	0.00%	0.00%	—	stock	$t = 1$	2.04%	0.00%	0.01%	—	stock	$t = 1$	2.03%	0.01%	0.00%	0.00%
	$t = 2$	0.88%	0.02%	0.01%	0.00%		$t = 2$	1.33%	0.04%	0.02%	0.04%		$t = 2$	1.55%	0.04%	0.02%	0.00%
	$t = 3$	1.34%	0.05%	0.01%	0.01%		$t = 3$	1.78%	0.11%	0.01%	0.02%		$t = 3$	1.94%	0.12%	0.02%	0.02%
bond	$t = 1$	0.48%	0.05%	0.04%	0.03%	bond	$t = 1$	0.57%	0.04%	0.00%	0.00%	bond	$t = 1$	0.70%	0.04%	0.04%	0.02%
	$t = 2$	0.62%	0.03%	0.02%	0.02%		$t = 2$	0.75%	0.04%	0.02%	0.03%		$t = 2$	0.92%	0.04%	0.01%	0.03%
	$t = 3$	1.10%	0.05%	0.03%	0.02%		$t = 3$	1.30%	0.05%	0.03%	0.03%		$t = 3$	1.51%	0.08%	0.04%	0.03%
CB	$t = 1$	0.86%	0.01%	0.03%	0.03%	CB	$t = 1$	0.94%	0.00%	0.00%	—	CB	$t = 1$	0.97%	0.05%	0.00%	0.00%
	$t = 2$	1.07%	0.03%	0.01%	0.02%		$t = 2$	1.25%	0.03%	0.02%	0.01%		$t = 2$	1.30%	0.03%	0.03%	0.01%
	$t = 3$	1.59%	0.08%	0.02%	0.03%		$t = 3$	1.68%	0.08%	0.02%	0.03%		$t = 3$	1.79%	0.09%	0.03%	0.04%
$\gamma = 1$					$\gamma = 0.8$					$\gamma = 0.6$							
	# 0	# 1	# 2	# 3		# 0	# 1	# 2	# 3		# 0	# 1	# 2	# 3			
cash	$t = 1$	1.70%	0.13%	0.01%	0.00%	cash	$t = 1$	1.76%	0.12%	0.01%	0.00%	cash	$t = 1$	1.69%	0.15%	—	0.00%
	$t = 2$	1.81%	0.06%	0.01%	0.00%		$t = 2$	1.99%	0.06%	0.00%	0.00%		$t = 2$	2.12%	0.08%	0.00%	0.00%
	$t = 3$	2.55%	0.17%	0.01%	0.00%		$t = 3$	2.70%	0.19%	0.01%	0.00%		$t = 3$	2.83%	0.23%	0.01%	0.00%
stock	$t = 1$	0.57%	0.00%	0.02%	—	stock	$t = 1$	0.59%	0.01%	0.02%	0.02%	stock	$t = 1$	0.68%	0.00%	0.00%	—
	$t = 2$	1.95%	0.05%	0.02%	0.01%		$t = 2$	2.10%	0.05%	0.01%	0.03%		$t = 2$	2.02%	0.04%	0.00%	0.02%
	$t = 3$	2.40%	0.18%	0.02%	0.01%		$t = 3$	2.56%	0.20%	0.02%	0.03%		$t = 3$	2.65%	0.24%	0.03%	0.03%
bond	$t = 1$	0.88%	0.02%	0.05%	0.01%	bond	$t = 1$	1.19%	0.04%	0.03%	0.04%	bond	$t = 1$	1.32%	0.04%	0.04%	0.00%
	$t = 2$	1.08%	0.03%	0.02%	0.03%		$t = 2$	1.43%	0.03%	0.03%	0.04%		$t = 2$	1.59%	0.05%	0.02%	0.01%
	$t = 3$	1.84%	0.09%	0.03%	0.03%		$t = 3$	2.07%	0.10%	0.04%	0.02%		$t = 3$	2.29%	0.11%	0.03%	0.03%
CB	$t = 1$	0.98%	0.02%	0.00%	0.05%	CB	$t = 1$	0.99%	0.03%	0.03%	0.09%	CB	$t = 1$	0.86%	0.04%	0.03%	0.00%
	$t = 2$	1.41%	0.05%	0.02%	0.02%		$t = 2$	1.54%	0.02%	0.02%	0.02%		$t = 2$	1.65%	0.07%	0.05%	0.01%
	$t = 3$	1.83%	0.10%	0.02%	0.02%		$t = 3$	1.95%	0.13%	0.03%	0.03%		$t = 3$	2.04%	0.16%	0.02%	0.04%
$\gamma = 0.5$					$\gamma = 0.4$					$\gamma = 0.3$							
	# 0	# 1	# 2	# 3		# 0	# 1	# 2	# 3		# 0	# 1	# 2	# 3			
cash	$t = 1$	1.64%	0.14%	—	0.00%	cash	$t = 1$	1.53%	0.14%	—	0.00%	cash	$t = 1$	1.44%	0.14%	0.01%	0.00%
	$t = 2$	2.21%	0.07%	0.00%	0.00%		$t = 2$	2.28%	0.06%	0.00%	0.00%		$t = 2$	2.47%	0.06%	0.00%	0.00%
	$t = 3$	2.93%	0.23%	0.01%	0.00%		$t = 3$	3.11%	0.22%	0.01%	0.00%		$t = 3$	3.37%	0.23%	0.00%	0.00%
stock	$t = 1$	0.73%	0.01%	0.02%	0.00%	stock	$t = 1$	0.80%	0.00%	0.00%	—	stock	$t = 1$	0.90%	0.01%	0.01%	0.00%
	$t = 2$	2.16%	0.04%	0.01%	0.02%		$t = 2$	2.05%	0.03%	0.02%	0.04%		$t = 2$	2.27%	0.02%	0.01%	0.04%
	$t = 3$	2.71%	0.24%	0.02%	0.03%		$t = 3$	2.53%	0.20%	0.02%	0.03%		$t = 3$	2.89%	0.21%	0.02%	0.04%
bond	$t = 1$	1.42%	0.02%	0.04%	0.07%	bond	$t = 1$	1.52%	0.04%	0.03%	0.01%	bond	$t = 1$	1.50%	0.03%	0.04%	0.01%
	$t = 2$	1.64%	0.04%	0.03%	0.03%		$t = 2$	2.17%	0.06%	0.03%	0.04%		$t = 2$	2.29%	0.06%	0.04%	0.02%
	$t = 3$	2.59%	0.13%	0.03%	0.03%		$t = 3$	2.94%	0.13%	0.04%	0.03%		$t = 3$	3.35%	0.14%	0.03%	0.03%
CB	$t = 1$	0.72%	0.02%	0.04%	0.10%	CB	$t = 1$	0.53%	0.07%	0.03%	0.01%	CB	$t = 1$	0.31%	0.04%	0.03%	0.00%
	$t = 2$	1.56%	0.03%	0.01%	0.04%		$t = 2$	1.34%	0.06%	0.02%	0.05%		$t = 2$	1.10%	0.06%	0.05%	0.02%
	$t = 3$	1.86%	0.14%	0.04%	0.03%		$t = 3$	1.76%	0.14%	0.02%	0.02%		$t = 3$	1.70%	0.14%	0.03%	0.03%
$\gamma = 0.2$					$\gamma = 0.1$					max							
	# 0	# 1	# 2	# 3		# 0	# 1	# 2	# 3		# 0	# 1	# 2	# 3			
cash	$t = 1$	1.45%	0.16%	—	0.00%	cash	$t = 1$	1.45%	0.16%	—	0.00%	cash	$t = 1$	1.84%	0.81%	—	0.00%
	$t = 2$	2.80%	0.07%	0.00%	0.00%		$t = 2$	2.80%	0.07%	0.00%	0.00%		$t = 2$	3.94%	0.46%	0.00%	0.00%
	$t = 3$	3.54%	0.28%	0.01%	0.00%		$t = 3$	3.54%	0.28%	0.01%	0.00%		$t = 3$	4.51%	0.63%	0.05%	0.00%
stock	$t = 1$	1.05%	0.00%	0.04%	—	stock	$t = 1$	1.05%	0.00%	0.04%	—	stock	$t = 1$	0.00%	0.00%	0.00%	—
	$t = 2$	2.70%	0.04%	0.03%	0.02%		$t = 2$	2.70%	0.04%	0.03%	0.02%		$t = 2$	0.61%	1.32%	0.00%	0.00%
	$t = 3$	2.95%	0.20%	0.04%	0.04%		$t = 3$	2.95%	0.20%	0.04%	0.04%		$t = 3$	1.17%	1.08%	0.07%	0.00%
bond	$t = 1$	2.06%	0.02%	0.01%	0.00%	bond	$t = 1$	2.06%	0.02%	0.01%	0.00%	bond	$t = 1$	4.46%	0.00%	0.00%	—
	$t = 2$	2.95%	0.09%	0.03%	0.05%		$t = 2$	2.95%	0.09%	0.03%	0.05%		$t = 2$	5.08%	0.09%	0.00%	0.00%
	$t = 3$	3.58%	0.21%	0.03%	0.03%		$t = 3$	3.58%	0.21%	0.03%	0.03%		$t = 3$	5.64%	0.34%	0.00%	0.00%
CB	$t = 1$	0.55%	0.04%	0.04%	0.05%	CB	$t = 1$	0.55%	0.04%	0.04%	0.05%	CB	$t = 1$	1.74%	0.00%	0.00%	—
	$t = 2$	1.22%	0.06%	0.04%	0.04%		$t = 2$	1.22%	0.06%	0.04%	0.04%		$t = 2$	3.57%	0.05%	0.00%	0.00%
	$t = 3$	1.91%	0.21%	0.03%	0.02%		$t = 3$	1.91%	0.21%	0.03%	0.02%		$t = 3$	3.34%	0.33%	0.04%	0.00%



## 6.2 基本ケースの場合

図24に3種類の戦略に対する効率的フロンティア、図25に各時点の平均投資比率を示す。

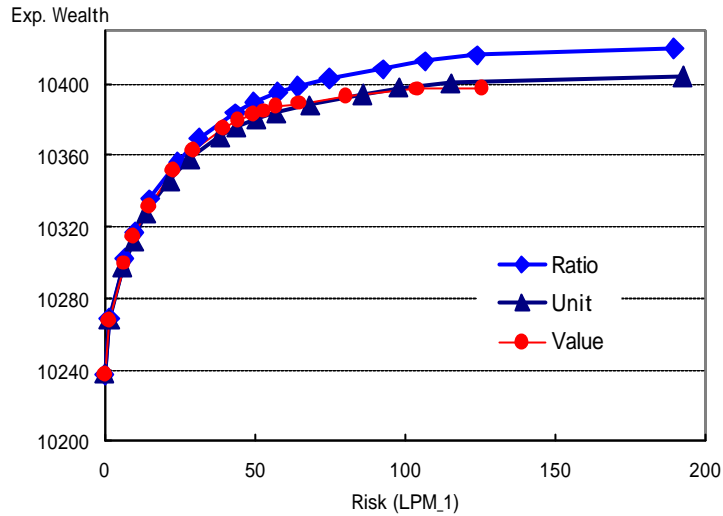


図 24 : 効率的フロンティア

すでに表 12でも確認されているように、投資比率決定戦略は投資量決定戦略よりも良い解を得ることができる。効率的フロンティアの左下( $\gamma$ の値が大きく、期待富とリスクが小さい組み合わせ)ではほぼ同じであるが、効率的フロンティアの右上( $\gamma$ の値が小さく、期待富とリスクが大きい組み合わせ)にいくにつれて、投資比率決定戦略の方が投資量決定戦略に比べて、より左上に効率的フロンティアはシフトする。投資額決定戦略も同様に、投資比率決定戦略よりも良い解を得ることはできない。投資比率決定戦略が投資量決定戦略や投資額決定戦略よりも有利な理由は、現金の保有に関する制約がないからである<sup>28</sup>。説明のため、危険資産が一つの場合を考え、できるだけ危険資産を多く買う戦略が有利だとしよう。投資量決定戦略に関しては、最も高い価格を持つ経路において、すべての富を危険資産に投資できるが、その他の経路では現金を持たざるを得ない(価格の低い経路で全額投資すると、より高い経路での投資額が富を上回ってしまう)。一方、投資額決定戦略では最も富の小さい経路においては全額を危険資産に投資できるが、その他の経路では現金を持たざるを得ない。それに対し、投資比率決定戦略ではすべての経路で富の100%を危険資産に投資することができる。投資量決定戦略および投資額決定戦略では、明示的には現金の制約を入れていないが、結果的に制約されることになる。特に、 $\gamma$ が小さい場合、危険資産は現金に比べて期待収益率が高いので、危険資産へ多く投資するポートフォリオが望ましい。しかし、このようなポートフォリオを構成できないため、結果的に投資比率決定戦略が有利になる。

<sup>28</sup> 投資量決定戦略は、危険資産への投資量を決定ノード内で同一にする必要がある。同じ決定ノードには似たような資産価格(収益率)を持つ経路が入るが、投資額は同一にならない。各経路ごとの富も同一ではないが、富と危険資産の投資額の差も経路ごとに異なり、その差は現金で持たなければならない。投資額決定戦略も同様の理由で富と危険資産の投資額の差を現金で持つ必要がある。

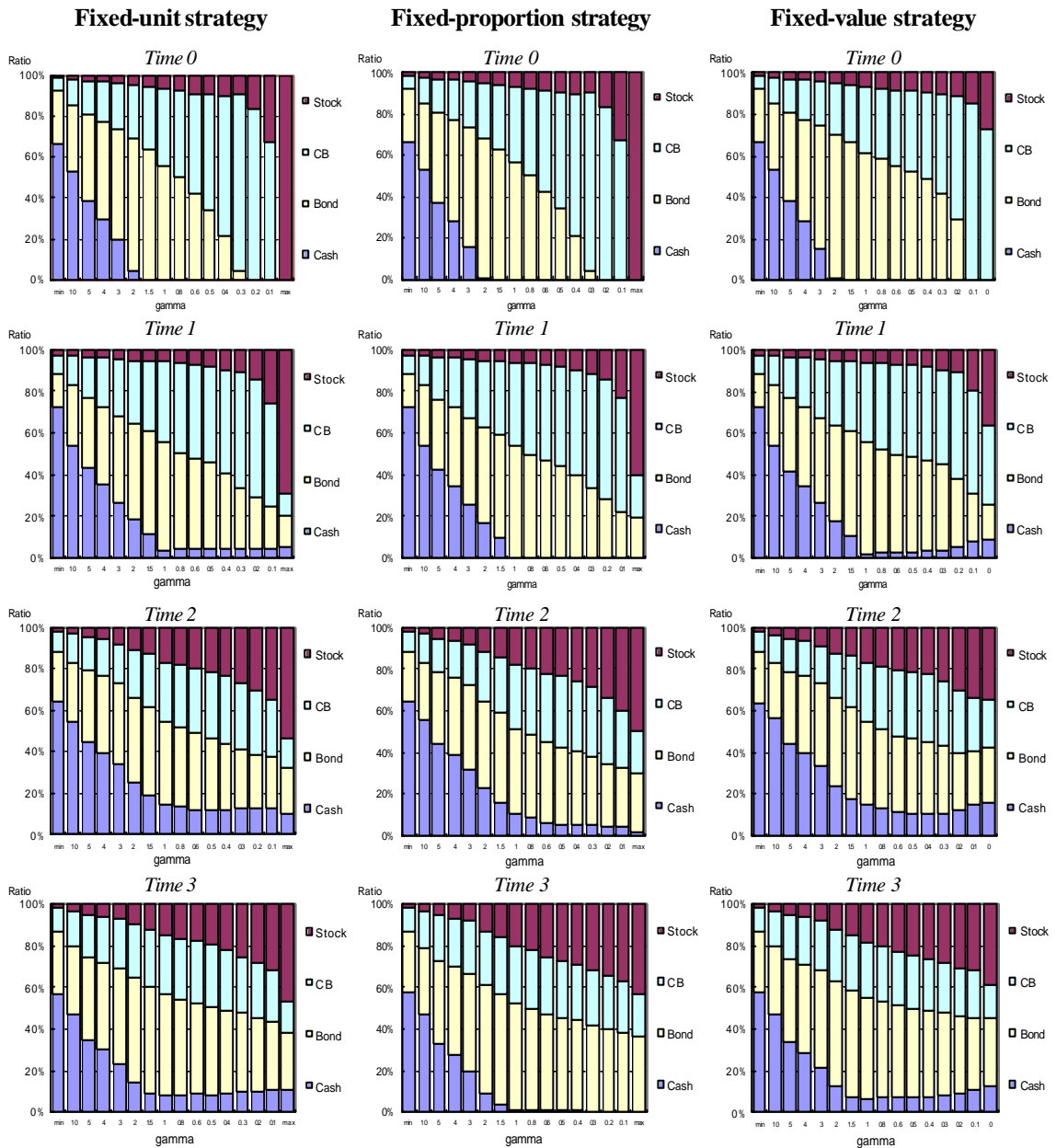


図 25：各取引戦略における平均投資比率

図 25 の  $\gamma$  が 1 以下の場合を見てみよう。1 時点と 3 時点では投資比率決定戦略が現金へほとんど投資をしていないのに対し、投資量決定戦略と投資額決定戦略では現金への投資を行っている。2 時点においては投資比率決定戦略でも 5% ~ 10% 投資を行っているが、投資量決定戦略と投資額決定戦略は約 15% 以上投資を行っている。しかも、投資比率決定戦略では  $\gamma$  が小さくなるにつれて現金の比率を下げているが、投資量決定戦略と投資額決定戦略ではほとんど変わらない。これらのことを確認するために、現金に下限制約を付けて問題を解いた結果を図 26 に示す。下限制約として、5%、10%、15%、20% の 4 種類を設定する。

下限制約 5% では投資比率決定戦略が有利であるが、10% 以上の下限制約を加えると、リスク回避度によって最適解は変わるが、効率的フロンティアはどの戦略もほぼ同じになる。

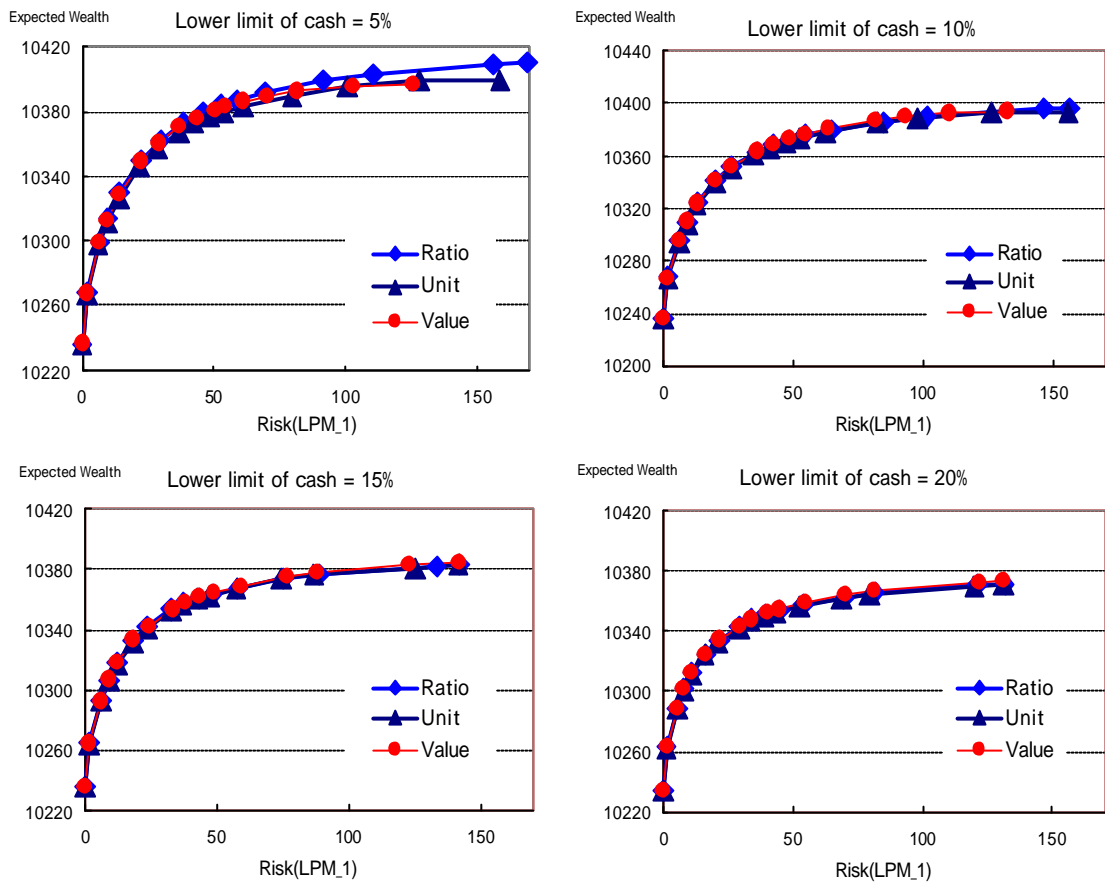


図 26：現金の下限制約を含む場合の効率的フロンティア

投資額決定戦略と投資量決定戦略を比べてみよう。投資額決定戦略は投資量決定戦略よりも効率的フロンティアの右上 ( $\gamma$  の値が小さく、期待富とリスクが大きい組み合わせ) では不利であるが、真ん中では有利である。効率的フロンティアの左下 ( $\gamma$  の値が大きく、期待富とリスクが小さい組み合わせ) ではほぼ同じである。効率的フロンティアの右上で投資量決定戦略が有利な理由も現金の保有に関する制約で説明できる。投資額決定戦略は最も富の小さい経路が影響を与えるのに対し、投資量決定戦略は最も高い資産価格を持つ経路が影響を与える。危険資産を複数組み合わせることによって、現金の保有に関する制約は投資額決定戦略よりも緩和できると考えられる。図 25 を見てみると、小さい  $\gamma$  に対する現金の比率は投資額決定戦略の方が高い。また、現金の保有に関する制約がきついため、実行可能領域も狭くなり、投資額決定戦略の効率的フロンティアは短い。このことは図 26 の 5%、10% 制約がある場合にも現れている。投資額決定戦略が効率的フロンティアの真ん中で有利な理由は基本ケースの設定条件のためと考えられる。投資額決定戦略は逆バリ戦略であり、負の相関が高いときに有利な戦略である。相関係数行列を見てもはっきりとは分からないので、この点については 6.3 節の関連ケースで議論する。

ところで、基本ケースにおいて、投資比率決定戦略は投資量決定戦略や投資額決定戦略よりも有利であることは分かったが、反復を 2 回繰り返すので計算量は 3 倍である<sup>29</sup>。そこで、反復計算をする前に (手順 1 のみで) 最適解を改善する方法を考える。拡張決定ツリーを生成する際に S-PBC 法を用いる場合、シミュレーション型モデルをすでに一度、解いている。投資比率決定戦略モデ

<sup>29</sup> 表 12 より 1 回の反復でも平均すると、改善率は 95% なので、計算量を考えるならば、1 回の反復でも十分である。

ルの計算アルゴリズムの手順1において投資量決定戦略モデルを解かずに、シミュレーション型モデルによって得られる富の値を用いた投資量関数を用いる計算方法を試してみよう。すなわち、手順1を以下のように変更する。

手順1:シミュレーション型モデルによって得られる富の値  $W_{t(0)}^{(i)*}$  を投資量関数に代入し、 $h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left( \frac{W_{t(0)}^{(i)*}}{\rho_{jt}^{(i)}} \right) z_{jt}^s$  を用いて、最適解を求める。最適解から  $t$  時点の経路  $i$  の富  $W_{t(1)}^{(i)*}$  を計算する。目的関数値を  $Obj'_k$  とし、 $k = 1$  とする。

手順2以降の  $k$  回目の反復で得られる目的関数値を  $Obj'_k$  とし、目的関数値の到達率  $AR(k)$  を以下のように定義する。

$$AR(k) = \frac{Obj'_k - Obj_0}{Obj_5 - Obj_0}, (k = 0, 1, 2)$$

ここで、 $Obj_5$  は前述の計算アルゴリズムの5回目の反復で得られた目的関数値、 $Obj_0$  は投資量決定戦略モデルの目的関数値を表す。到達率は、 $Obj_0$  を0%、 $Obj_5$  を100%とした場合、目的関数値が  $k$  回目の反復までにどれだけ到達したかを表す。表14に目的関数値の到達率を示す。

表 14 : 到達率

$\gamma$	10	5	4	3	2	1.5	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	max	Ave.
$k = 0$	77.4%	84.9%	91.2%	91.4%	91.7%	92.8%	87.0%	93.8%	91.7%	93.3%	87.7%	75.2%	99.9%	46.0%	35.0%	82.6%
$k = 1$	99.5%	99.7%	98.8%	99.9%	99.9%	98.4%	98.5%	97.5%	97.1%	94.8%	89.9%	78.8%	100.0%	63.6%	74.5%	92.7%
$k = 2$	99.8%	100.5%	99.5%	100.3%	100.3%	98.7%	99.0%	97.9%	97.5%	95.0%	90.3%	79.4%	100.0%	66.0%	78.2%	93.5%

変更後の手順1を用いると、平均的に  $Obj_5 - Obj_0$  の80%以上、目的関数を改善できる。しかし、さらに反復を繰り返した場合の(2回目の反復による)目的関数値は、 $\gamma$  の値が大きい場合にはほぼ同じだが、 $\gamma$  の値が小さい場合に、最初に投資量決定戦略モデルを解いたとき(前述の計算アルゴリズム)に比べて悪くなる。1回目の反復でも多少不利な結果になる。このことは、シミュレーション型モデルの富の値は投資量決定戦略モデルの目的関数を改善するためにはよいが、投資比率決定戦略モデルの近似解を求める初期解としては投資量決定戦略モデルの最適解よりもあまりよくないことを表す。

各方法に対する効率的フロンティアを図27に示す。投資比率決定戦略モデルの計算アルゴリズム(2回反復)はRatio(U)に、投資量決定戦略モデルはUnitに、シミュレーション型モデルの富の値を初期値として使ってその後2回反復を行うアルゴリズムはRatio(S)に、反復しない(一度だけ問題を解く)場合にはApprox.Ratio(S)にそれぞれの効率的フロンティアを表す。

Approx.Ratio(S)はUnitよりも左上にシフトし、1回のみ計算に限定すると改善の効果が見られる。しかし、シミュレーション型モデルの富の値を初期値として使うRatio(S)、Approx.Ratio(S)は、他に比べて効率的フロンティアが短い。混合型モデルに比べて意思決定の自由度の小さいシミュレーション型モデルの結果を使ったことが、実行可能領域が狭くなるように影響を与えていると考えられる。このケースでは、Approx.Ratio(S)の最大期待富は、Unitの最大期待富を上回っているため、完全に優位であるが、他のケースでは実行可能領域が狭くなることの影響が出る可能性がある。この点については関連ケースにおいてさらに議論をする。Ratio(U)とRatio(S)を比べるとRatio(U)の効率的フロンティアはRatio(S)に比べて広く、反復を繰り返すのであれば、

Ratio(U)の方が良い結果が得られる。

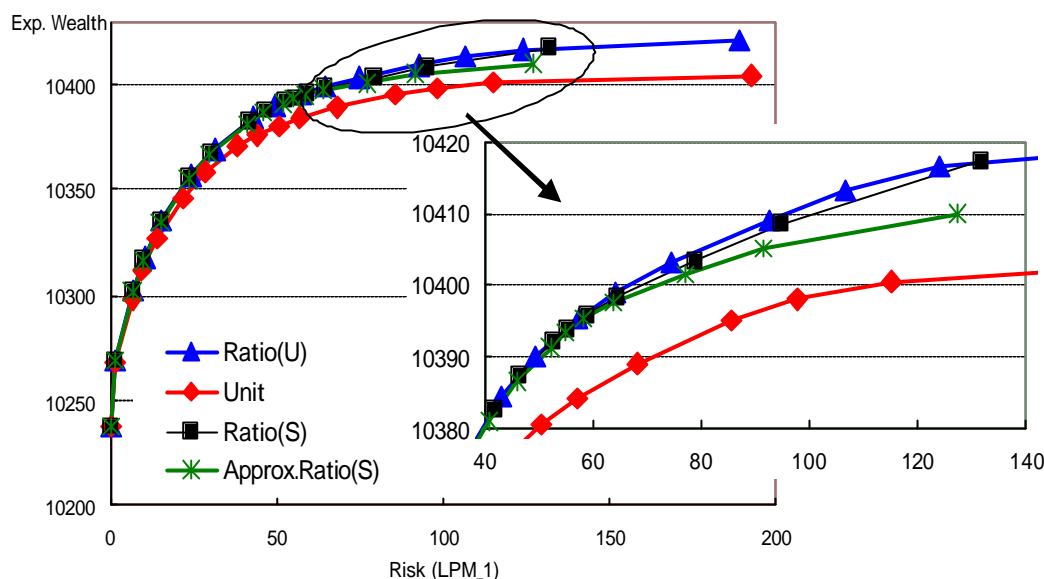


図 27：効率的フロンティア

### 6.3 相関ケースの場合

各取引戦略と時系列相関の関係について調べるために、基本ケースと同じ分析を行う。図28に3種類の取引戦略に対する効率的フロンティア、図29に0時点の最適投資比率を示す。ただし、図29は紙面の都合上、cm5, cm2, cp0, cp2, cp5の5ケースのみを示す。

図28を見ると、すべての相関パラメータ  $c$  において投資比率決定戦略の効率的フロンティアは投資量決定戦略と投資額決定戦略を上回っている。この関係は基本ケースにおいても成り立っており、取引戦略としての優位性を表している。しかし、相関パラメータ  $c$  の値によって、その関係は異なる。まずはじめに、投資比率決定戦略と投資量決定戦略を比べてみよう。相関パラメータ  $c$  の絶対値が小さい(無相関に近い)場合、投資比率決定戦略と投資量決定戦略の効率的フロンティアは近く、 $c$  の絶対値が大きくなるにつれて、その差は大きくなる。

相関パラメータ  $c$  の絶対値が大きければ、将来の収益率を予想できる度合いが大きくなる。たとえば、 $c$  が大きな正の値であるならば、小さい正の値の場合に比べて、価格が上昇(下降)すれば、次期も価格は上昇(下降)しやすいことを表すからである。 $c$  の値が負の場合も同様のことが言える。したがって、より危険な資産に投資しても無相関の場合に比べて、リスク値を小さくすることができる。そのため、現金で保有するよりも株式などのより危険な資産に投資することが有利になり、現金を必ずしも保有する必要のない投資比率決定戦略が投資量決定戦略より有利になる。

図29の最適投資比率を見ると、相関パラメータ  $c$  の絶対値が大きい場合の株式への投資比率は、絶対値が小さい場合に比べて大きくなっており、このことを裏付けている。 $c = -0.5$  の場合が  $c = 0.5$  の場合に比べてその差が大きいのは、時間分散効果でより多く株式に投資しやすいためである。

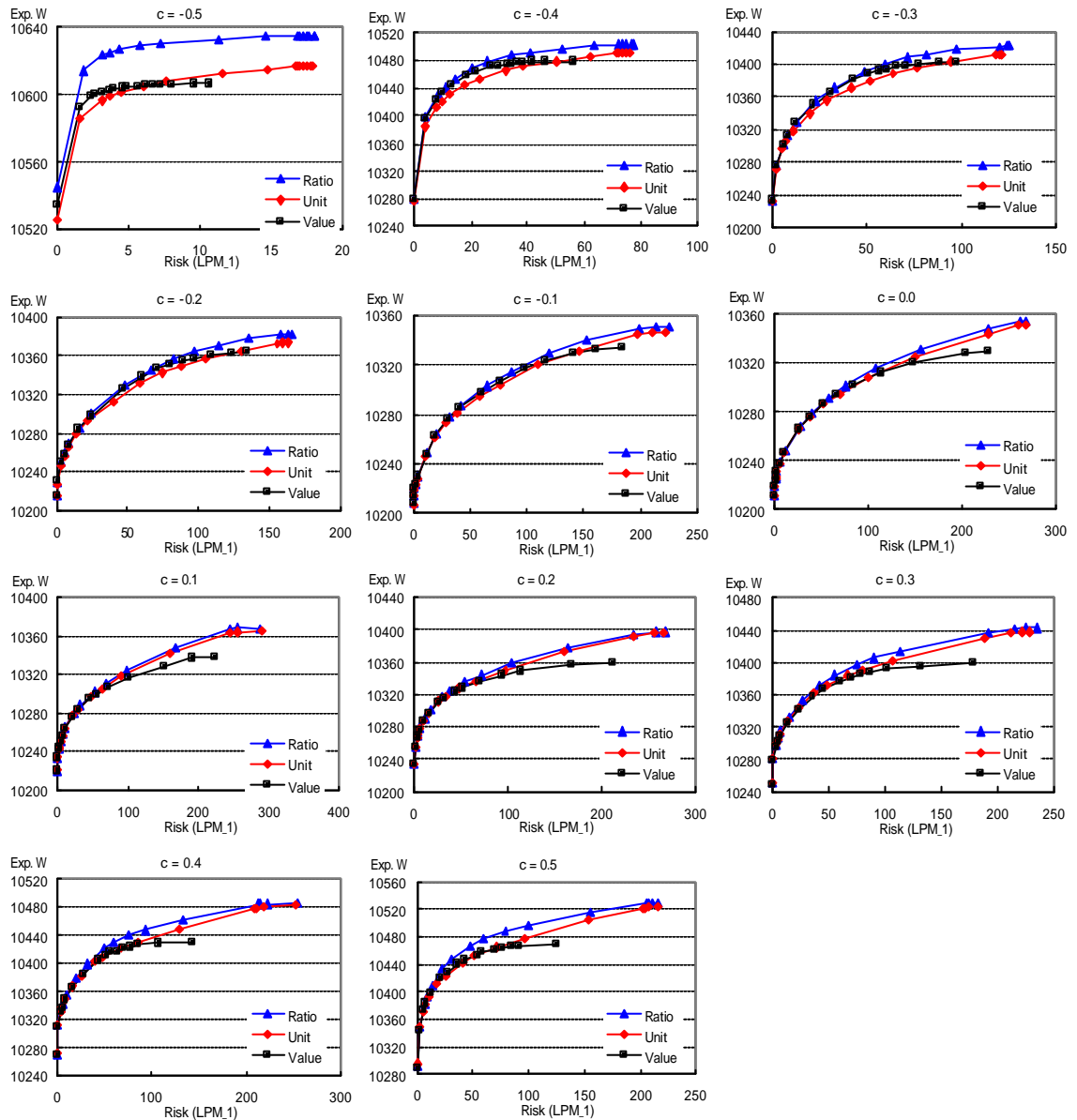


図 28：各取引戦略における効率的フロンティア

図 30 に各取引戦略の目的関数値  $EU$  を示す。相関パラメータ  $c$  の絶対値が大きいほど、目的関数値は大きくなる。この理由は先述したように、 $c$  の絶対値が大きければ、将来の収益率を予想できる度合いが大きくなるからである。特に  $c$  の値が大きな負値の（負相関を表す）場合、期待富の値が大きくなり、リスク値が小さくなることが図 28 にも現れている。

図 28 に戻って、投資量決定戦略と投資額決定戦略を比べてみよう。投資量決定戦略は順バリ戦略、投資額決定戦略は逆バリ戦略であるため、相関パラメータ  $c$  が 0 以上の場合（正相関の場合）、投資量決定戦略の効率的フロンティアは投資額決定戦略を上回る。一方、 $c$  が負の場合、逆バリ戦略が順バリ戦略よりも有利であるため、投資額決定戦略が投資量決定戦略を上回る。ただし、 $\gamma$  の値が小さい場合、より危険な資産を増やし、現金を減らした方が有利なので、図 24 と同様に、 $c$  の値に関わらず、投資量決定戦略が投資額決定戦略を上回る。 $c = -0.5$  の場合、その他の値に比べて、 $\gamma$  の小さいところで投資量決定戦略が投資額決定戦略を上回りやすくなる。この理由は、 $c = -0.5$  では他に比べて株式への投資比率が高いため、逆バリ戦略のメリットよりも現金保有の

デメリットが大きくなるためである。

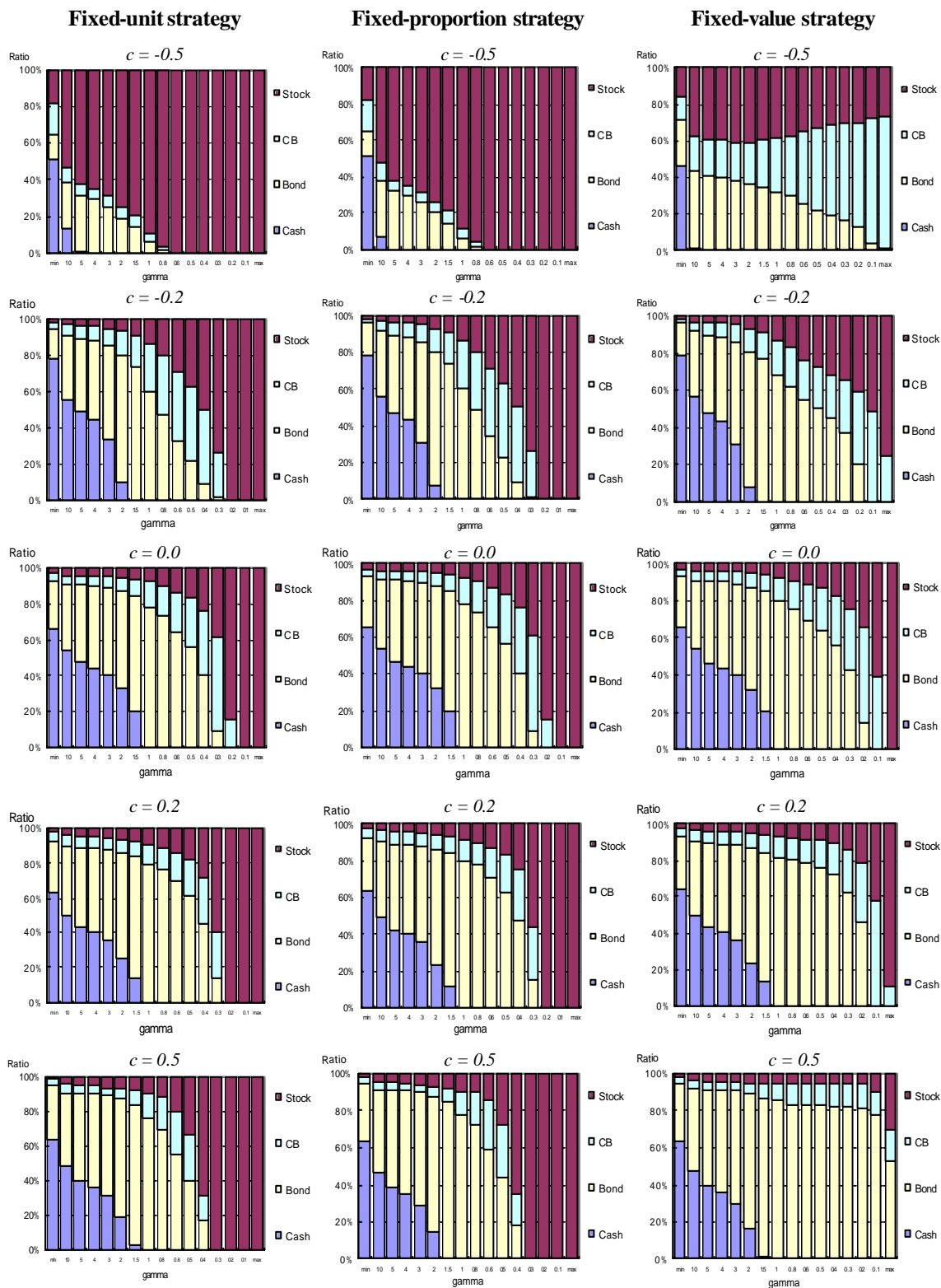


図 29：各取引戦略における平均投資比率(0時点)

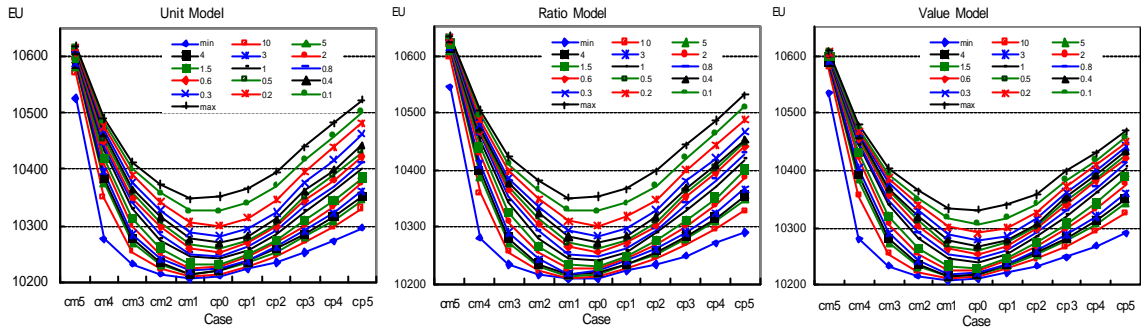


図 30 : 各取引戦略の目的関数値

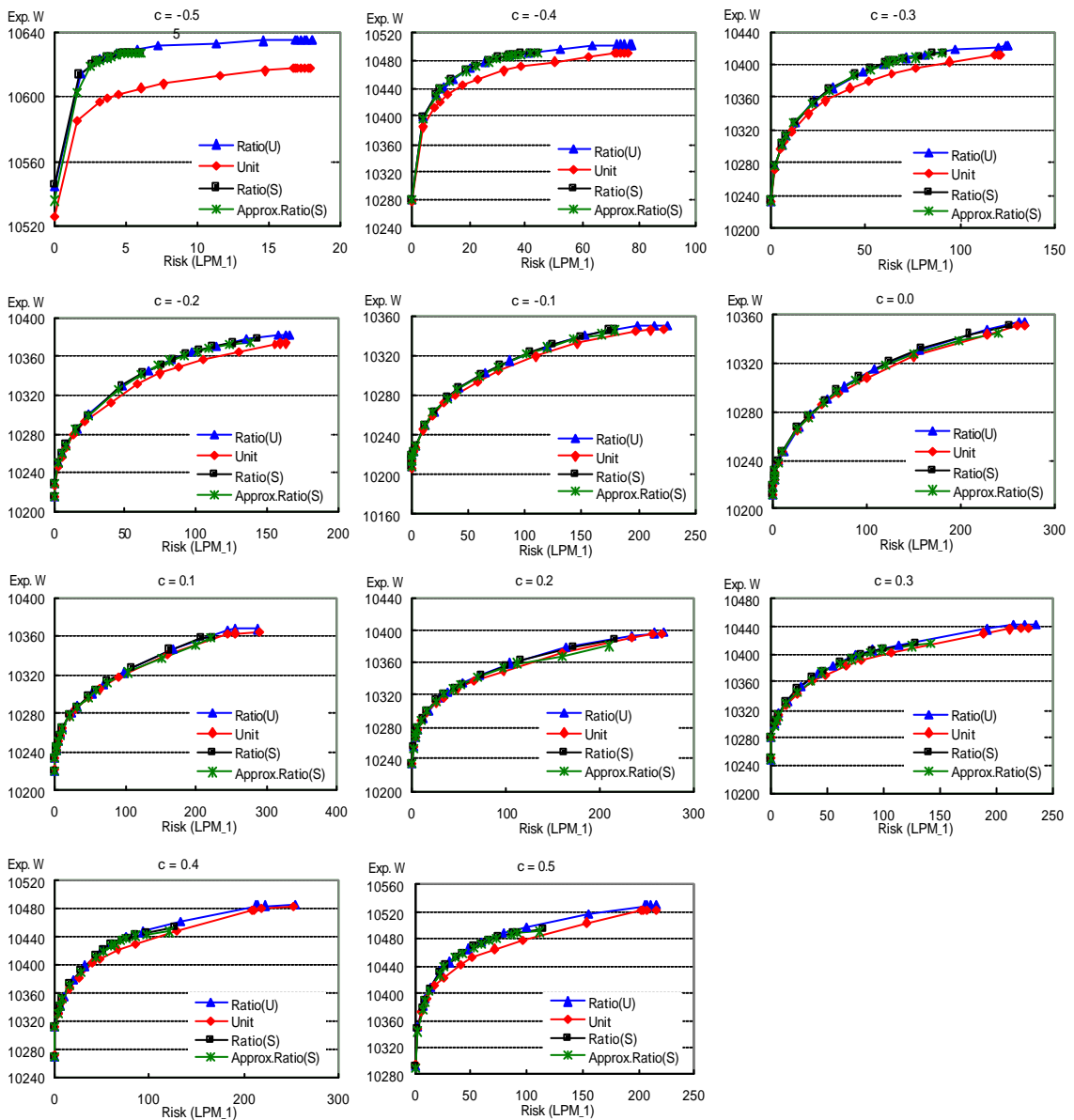


図 31 : 各取引戦略における効率的フロンティア (2)



次に、シミュレーション型モデルの富を初期値として利用した場合との比較結果を図 31 を示す。各方法の関係は以下に示すように、図 27 と同じである。

- ①  $c = 0.2$  で  $\gamma$  の小さい場合を除き、Approx.Ratio(S) は Unit を上回る。
- ② Ratio(S), Approx.Ratio(S) の効率的フロンティアは、Ratio(U), Unit に比べて短い。
- ③ Ratio(S) は Ratio(U) とほぼ重なっているが、効率的フロンティアは短いため、期待富とリスクの大きいポートフォリオを構築できない。

## 7 コンパクト表現による定式化

枇々木 [22] にも述べられているが、シミュレーション型モデルに対するコンパクト表現は混合型モデルに対しても適用できる。コンパクト表現とは「危険資産に対する決定変数は意思決定ノードのみに依存し、シミュレーション経路に依存しない」という取引戦略の特徴をうまく反映させた定式化を行うことにより、問題の規模を縮小し、計算時間の向上を目指す定式化の方法である。

混合型モデルでは、危険資産の決定変数を状態にではなく、意思決定ノードごとに設定することによって非予想条件を満足させる一方で、現金の決定変数を状態ごとに設定するため、決定変数の数は膨大になる。しかし、現金は全資産への投資額の合計(富の大きさ)から危険資産への投資額の合計を引いたものと取り扱うことによって、特に決定変数として明示的に取り扱わなくても問題を定式化できる。

コンパクト表現には、

- 主コンパクト表現: 主問題形式による記述
- 双対コンパクト表現: 双対問題形式による記述

の2種類がある。主コンパクト表現は、シミュレーション経路数に依存する現金を表す決定変数を除去して、決定変数の数を削減した記述方法である。すなわち、コンパクト表現は現金を投資対象に含むが、危険資産のみで定式化を記述する方法(現金を定式化の中で明示的に取り扱わないで記述する方法)である。具体的には、(17) ~ (19) 式の等式を現金を表す決定変数について解き、その非負条件((25), (26)式)に代入することによって現金を表す決定変数を除外する。制約式の本数はほとんど変化しないが、決定変数の数は減少する。また、目的関数が線形関数(線形計画問題)の場合に双対問題に書き直した記述方法を双対コンパクト表現と呼ぶ。双対コンパクト表現は主コンパクト表現で減少した決定変数の数が制約式の本数になるため、決定変数の数はシミュレーション経路数に依存して多くなるが、制約式の本数は少なくなる。線形計画法の解法アルゴリズムである単体法で解く場合、その計算時間は決定変数の数よりも制約式の本数に大きく依存するため、双対問題に書き直すメリットは十分にある。また、1次の下方部分積率や条件付バリュー・アット・リスクなどの2本の区分直線を組み合わせた区分線形リスク尺度の場合には、それを記述するために必要な部分が決定変数の有界制約式になる。したがって、実質的に計算時間に影響を与える制約式は「危険資産 × 決定ノード数」となり、問題を双対問題に書き換えることによって、実質的な制約式の本数を激減させることができる。

以降、書き換えの方法を順次説明する。

## 7.1 主コンパクト表現への書き換え

(1) 0 時点の現金  $v_0$  の除去

(17) 式を  $v_0$  について解くと、(39) 式を得る。

$$v_0 = W_0 - \sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} \quad (39)$$

(25) 式より、(40) 式を得る。

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} \leq W_0 \quad (40)$$

(2)  $t$  時点の現金  $v_t^{(i)}$  の除去

(18) 式に (39) 式を代入し、 $v_1^{(i)}$  について解くと、(41) 式を得る。

$$v_1^{(i)} = - \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} h^{(i)}(z_{j1}^{s_1}) - \sum_{j=1}^n \left\{ (1+r_0) \rho_{j0} - \rho_{j1}^{(i)} \right\} z_{j0} + (1+r_0) W_0, \quad (s_1 \in S_1; i \in V_1^{s_1}) \quad (41)$$

$v_2^{(i)}$  についても同様の計算を行うと、(42) 式を得る。ここで、 $s_1$  は  $s_2$  につながっている決定ノードを表す。

$$v_2^{(i)} = - \sum_{j=1}^n \rho_{j2}^{(i)} h^{(i)}(z_{j2}^{s_2}) - \sum_{j=1}^n \left\{ (1+r_1^{(i)}) \rho_{j1}^{(i)} - \rho_{j2}^{(i)} \right\} h^{(i)}(z_{j1}^{s_1}) - \sum_{j=1}^n (1+r_1^{(i)}) \left\{ (1+r_0) \rho_{j0} - \rho_{j1}^{(i)} \right\} z_{j0} + (1+r_1^{(i)}) (1+r_0) W_0, \quad (s_2 \in S_2; i \in V_2^{s_2}) \quad (42)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \eta_{j,k,k+1}^{(i)} &= \rho_{j,k+1}^{(i)} - (1+r_k^{(i)}) \rho_{jk}^{(i)}, \quad (k=0, \dots, T-1) \\ \eta_{jkt}^{(i)} &= (1+r_{t-1}^{(i)}) \eta_{j,k,t-1}^{(i)}, \quad (t=k+2, \dots, T) \\ F_1^{(i)} &= (1+r_0) W_0 \\ F_t^{(i)} &= (1+r_{t-1}^{(i)}) F_{t-1}^{(i)}, \quad (t=2, \dots, T) \end{aligned}$$

とし、一般的に  $v_t^{(i)}$  を記述すると、(43) 式で表すことができる。以降、(43) ~ (46) 式の  $s_k (k=0, \dots, t-1)$  は  $s_t$  につながっている決定ノードを表す。ただし、 $s_0$  とは現時点を表すノードとする。したがって、 $V_t^{s_t}$  に含まれるパス  $i$  は  $s_0, s_1, \dots, s_t$  の決定ノードを通るパスを表すことになる。

$$v_t^{(i)} = - \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jt}^{s_t}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{t-1} \eta_{jkt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jk}^{s_k}) + \sum_{j=1}^n \eta_{j0t}^{(i)} z_{j0} + F_t^{(i)}, \quad (t=1, \dots, T-1; i \in V_t^{s_t}) \quad (43)$$

したがって、(26) 式は (44) 式に書き直すことができる。

$$\sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jt}^{s_t}) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{t-1} \eta_{jkt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jk}^{s_k}) - \sum_{j=1}^n \eta_{j0t}^{(i)} z_{j0} \leq F_t^{(i)},$$

$$(t = 1, \dots, T-1; i \in V_t^{s_t}) \quad (44)$$

(3)  $t$  時点の富  $W_t^{(i)}$  の計算

(19)式の値は  $t$  時点の富  $W_t^{(i)}$  を表す。(19)式の右辺を用いて、 $t$  時点の富  $W_t^{(i)}$  を計算する。

$$W_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \eta_{j0t}^{(i)} z_{j0} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{t-1} \eta_{jkt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jk}^{s_k}) + F_t^{(i)}, \quad (t = 1, \dots, T-1; i \in V_t^{s_t}) \quad (45)$$

特に、 $t = T$  のときは (46) 式になる。

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^n \eta_{j0T}^{(i)} z_{j0} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{T-1} \eta_{jkT}^{(i)} h^{(i)}(z_{jk}^{s_k}) + F_T^{(i)}, \quad (i \in V_T^{s_T}) \quad (46)$$

(4) 定式化のまとめ (ER モデル)

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (47)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} \leq W_0 \quad (48)$$

$$-\sum_{j=1}^n \eta_{j0t}^{(i)} z_{j0} - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{t-1} \eta_{jkt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jk}^{s_k}) + \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jt}^{s_t}) \leq F_t^{(i)},$$

$$(t = 1, \dots, T-1; s_t \in S_t; i \in V_t^{s_t}) \quad (49)$$

$$\sum_{j=1}^n \eta_{j0T}^{(i)} z_{j0} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{T-1} \eta_{jkT}^{(i)} h^{(i)}(z_{jk}^{s_k}) + q^{(i)} \geq W_G - F_T^{(i)}, \quad (s_{T-1} \in S_{T-1}; i \in V_{T-1}^{s_{T-1}})$$

$$(50)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{\eta}_{j0T} z_{j0} + \frac{1}{I} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{s_k \in S_k} \sum_{i \in V_k^{s_k}} \eta_{jkT}^{(i)} h^{(i)}(z_{jk}^{s_k}) \geq W_E - \bar{F}_T \quad (51)$$

$$z_{jt}^{s_t} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1; s_t \in S_t) \quad (52)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (53)$$

ここで、 $\bar{\eta}_{j0T} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \eta_{jkT}^{(i)}$ ,  $\bar{F}_T = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I F_T^{(i)}$  である。

## 7.2 双対コンパクト表現への書き換え

双対問題に書き換えるために、前節 (4) の定式化の行列形式を表 15 に示す。ただし、投資量関数  $h^{(i)}(z_{jt}^{s_t}) = a_{jt}^{(i)} z_{jt}^{s_t}$  を代入し、 $\theta_{jkt}^{(i)} = \eta_{jkt}^{(i)} a_{jt}^{(i)}$ ,  $\theta_{jkT}^{s_k} = \frac{1}{I} \sum_{i \in V_k^{s_k}} \theta_{jkT}^{(i)}$  とする。ここで、 $i_k (k = 1, \dots, T-1)$  は、 $k$  時点の決定ノード  $s_k$  を通るパスを表す。

表 15 : 行列形式による記述 ( $T = 4$ の場合)

式番号	$z_{j0}$	$z_{j1}^{s_1}$	$z_{j2}^{s_2}$	$z_{j3}^{s_3}$	$q^{(i)}$	符号	RHS	双対変数	本数
(47)[Min]	0	0	0	0	$\frac{1}{T}$				
(48)	$-\rho_{j0}$	0	0	0	0	$\geq$	$-W_0$	$\lambda_0$	1
(49), $t = 1$	$\eta_{j01}^{(i)}$	$-\rho_{j1}^{(i_1)}$	$\mathbf{o}$	$\mathbf{o}$	$\mathbf{o}$	$\geq$	$-F_1^{(i)}$	$\lambda_1^{(i)}$	$I$
(49), $t = 2$	$\eta_{j02}^{(i)}$	$\theta_{j12}^{(i_1)}$	$-\rho_{j2}^{(i_2)}$	$\mathbf{o}$	$\mathbf{o}$	$\geq$	$-F_2^{(i)}$	$\lambda_2^{(i)}$	$I$
(49), $t = 3$	$\eta_{j03}^{(i)}$	$\theta_{j13}^{(i_1)}$	$\theta_{j23}^{(i_2)}$	$-\rho_{j3}^{(i_3)}$	$\mathbf{o}$	$\geq$	$-F_3^{(i)}$	$\lambda_3^{(i)}$	$I$
(50)	$\eta_{j0T}^{(i)}$	$\theta_{j1T}^{(i_1)}$	$\theta_{j2T}^{(i_2)}$	$\theta_{j3T}^{(i_3)}$	$\mathbf{E}$	$\geq$	$W_G - F_T^{(i)}$	$\lambda_T^{(i)}$	$I$
(51)	$\bar{\eta}_{j0T}$	$\theta_{j1T}^{s_1}$	$\theta_{j2T}^{s_2}$	$\theta_{j3T}^{s_3}$	0	$\geq$	$W_E - \bar{F}_T$	$\omega$	1

$\mathbf{E}$  は単位行列を表す。

双対コンパクト表現は以下のように記述できる<sup>30</sup>。

$$\text{Maximize} \quad -W_0\lambda_0 - \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^{T-1} F_t^{(i)}\lambda_t^{(i)} + \sum_{i=1}^I (W_G - F_T^{(i)})\lambda_T^{(i)} + (W_E - \bar{F}_T)\omega \quad (54)$$

subject to

$$-\rho_{j0}\lambda_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T \eta_{j0t}^{(i)}\lambda_t^{(i)} + \bar{\eta}_{j0T}\omega \leq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (55)$$

$$-\sum_{i_k \in V_k^{s_k}} \rho_{jk}^{(i_k)}\lambda_k^{(i_k)} + \sum_{i_k \in V_k^{s_k}} \sum_{t=k+1}^T \theta_{jkt}^{(i_k)}\lambda_t^{(i_k)} + \theta_{jkT}^{s_k}\omega \leq 0, \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, T-1; s_k \in S_k) \quad (56)$$

$$\lambda_T^{(i)} \leq \frac{1}{T}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (57)$$

$$\lambda_0 \geq 0 \quad (58)$$

$$\lambda_t^{(i)} \geq 0, \quad (t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I) \quad (59)$$

$$\omega \geq 0 \quad (60)$$

(55) ~ (57) 式 of 双対変数は以下のようになる。

$$(55) \text{ 式} : z_{j0}, \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$(56) \text{ 式} : z_{jk}^{s_k}, \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, T-1; s_k \in S_k)$$

$$(57) \text{ 式} : q^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I)$$

<sup>30</sup>(56) 式は、 $\theta_{jkk}^{(i_k)} = -\rho_{jk}^{(i_k)}$  とすることによって、以下のように書き直すことができる。

$$\sum_{i_k \in V_k^{s_k}} \sum_{t=k}^T \theta_{jkt}^{(i_k)}\lambda_t^{(i_k)} + \theta_{jkT}^{s_k}\omega \leq 0, \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, T-1; s_k \in S_k)$$

### 7.3 数値実験

3期間、4資産問題の投資量決定戦略モデルを用いて数値実験を行った結果を示す<sup>31</sup>。拡張決定ツリーの分岐数が異なる4種類(2-2, 3-3, 4-4, 5-5 ツリー)のケースについて、双対コンパクト表現を用いて比較した結果を図32に示す。左図は内点法、右図は単体法に対する結果を表す。計算倍率は従来表現の計算時間を双対表現の計算時間で割った値を表す。

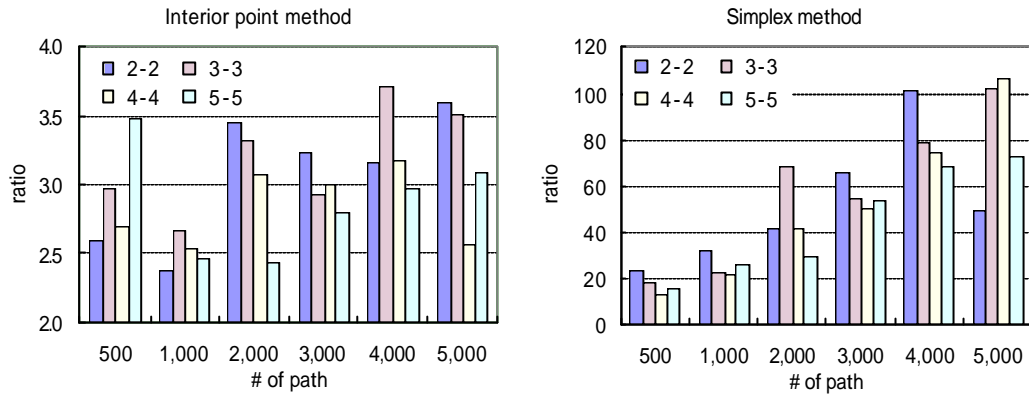


図 32：混合型モデルにおける双対コンパクト表現の効果

シミュレーション型モデルと同様に高速化され、内点法では最大約3.7倍、単体法では最大約100倍速く問題を解くことができる。その他の分岐数(ツリー)に対しても同様の結果が期待できるが、それらについては今後確かめる必要がある。

## 8 結論と今後の課題

本研究では、投資量関数を用いて、混合型モデルのより一般的な定式化の方法を示した。様々な投資量パラメータを用いて様々な投資戦略を記述できることを示すことができた。さらに、拡張決定ツリーの生成方法として、逐次のクラスタリング法、ポートフォリオ・ベース・クラスタリング法の2つの方法を示し、それらを数値実験によって比較した。その結果、シミュレーション型モデルで問題を解いたときに得られる最適解を用いたポートフォリオ・ベース・クラスタリング法(S-PBC法)が最も良い結果が得られた。ただし、シミュレーション型モデルで問題を解くときのリスク回避パラメータの値は問題に依存するので、適用する問題に応じて、パラメータを設定しなければならない。

混合型モデルの特徴を調べるために、数値実験によって、分岐数や経路数の違いによる影響やサンプリング・エラーについて調べた。分岐数が多くなればなるほど、効率的フロンティアは左上にシフトする。一方、経路数が多くなればなるほど、効率的フロンティアは右下にシフトする。分岐数と経路数はできる限り大きい方が望ましいが、問題の規模が大きくなるために、コンピュータのリソースが制約となる。分岐数と経路数の関係はまだ未解決の問題である。混合型モデルのサンプリング・エラーの問題は、収束の精度がシミュレーション型モデルよりも悪く、注意が必要である。最適な分岐数と経路数の組み合わせとサンプリング・エラーの問題は、コンピュータ・リソースの大きい環境で数値実験を行い、特徴を見いだす必要がある。

<sup>31</sup> この数値実験結果は、枇々木[22]の図10から引用している。

取引戦略の比較実験においては、投資比率決定戦略が他の2つの取引戦略(投資量決定戦略、投資額決定戦略)よりも優位であることが分かった。この原因は主に現金保有に関する問題であり、ある程度現金保有を許すパラメータの設定では、あまり差がないことも分かった。

今後の課題は、上記の問題についてさらに検討することや、様々なシナリオ生成モデルに対する数値実験を行い、混合型モデルの特徴を考察することである。

## 参考文献

- [1] V.S. Bawa and E.B. Lindenberg, Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework, *Journal of Financial Economics*, **5** (1977), pp.189–200.
- [2] E. Bogentoft, H. Romeijn, and S. Uryasev, Asset/Liability Management for Pension Funds Using CVaR Constraints, *The Journal of Risk Finance*, Fall 2001, pp.57–71.
- [3] M.J. Brennan, E.S. Schwartz and R. Lagnado, Strategic Asset Allocation, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **21** (1997), pp.1377–1403.
- [4] D.R. Cariño, T. Kent, D.H. Myers, C. Stacy, M. Sylvanus, A.L. Turner, K. Watanabe and W.T. Ziemba(1998), The Russel–Yasuda Kasai Model: An Asset/Liability Model for a Japanese Insurance Company Using Multistage Stochastic Programming, *Chapter 24 in* Ziemba and Mulvey[14], 609–633.
- [5] D.R. Cariño and W.T. Ziemba(1998), Formulation of the Russell-Yasuda Kasai Financial Planning Model, *Operations Research*, **46**, 4, 433–449.
- [6] D.R. Cariño, D.H. Myers and W.T. Ziemba(1998), Concepts, Technical Issues, and Uses of the Russell-Yasuda Kasai Financial Planning Model, *Operations Research*, **46**, 4, 450–462.
- [7] W.V. Harlow, Asset Allocation in a Downside-Risk Framework, *Financial Analysis Journal*, (September-October 1991), pp.28–40.
- [8] I. Maros and C. Mészáros, The Role of the Augmented System in Interior Point Methods, *European Journal of Operational Reserach*, **107**(1998), pp.720–736.
- [9] R.C. Merton, Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, *The Review of Econmics and Statistics*, **51** (1969), pp.247–257.
- [10] J.M. Mulvey and A.E. Thorlacius(1998), The Towers Perrin global capital market scenario generation system, *Chapter 13 in* Ziemba and Mulvey[14], 286–312.
- [11] J.M. Mulvey and W.T. Ziemba, Asset and Liability Allocation in a Global Environment, Chapter 15 in “*Handbooks in OR & MS, Vol.9*”, edited by R.Jarrow et al., 1995.  
(邦訳： 枇々木規雄： グローバル環境における資産負債配分，第15章，今野浩，古川浩一編著，ファイナンスハンドブック，1997.)

- [12] J.M. Mulvey and W.T. Ziemba, Asset and Liability Management Systems for Long-Term Investors: Discussion of the Issues, Chapter 1 in “*Worldwide Asset and Liability Modeling*”, edited by W.T. Ziemba and J.M. Mulvey, 1998.
- [13] P.A. Samuelson, Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, *The Review of Economics and Statistics*, **51** (1969), pp.239–246.
- [14] W.T. Ziemba and J.M. Mulvey (eds.)(1998), *Worldwide Asset and Liability Modeling*, Cambridge University Press.
- [15] 齋藤直紀, 枇々木規雄, 市場リスクと信用リスクを考慮した銀行の資産負債管理に対する確率的最適化モデル, 日本金融・証券計量・工学学会 2001年夏季大会予稿集, pp. 330–349.
- [16] 多田羅智之, 枇々木規雄, 多期間確率計画モデルの年金 ALM への適用, 日本金融・証券計量・工学学会 2001年夏季大会予稿集, pp. 350–366.
- [17] 田中豊, 脇本和昌, 多変量統計解析法, 現代数学社, 1983.
- [18] 枇々木規雄, 金融工学と最適化, 朝倉書店, 2001.
- [19] 枇々木規雄, 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル, *Journal of Operations Research Society of Japan*, **44**, No.2(2001), pp.169–193.
- [20] 枇々木規雄, 最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル, 高橋一編, ジャフィー・ジャーナル[2001] 金融工学の新展開, 2001年6月, pp.89–119.
- [21] 枇々木規雄: シミュレーション型多期間確率計画モデルに対する数値実験による考察. 日本金融・証券計量・工学学会 2002年夏季大会予稿集, 81–100.
- [22] 枇々木規雄, コンパクト表現によるシミュレーション型多期間確率計画モデルの定式化, *Journal of Operations Research Society of Japan*, **45**, No.4(2002), pp.529–549.
- [23] 枇々木規雄, 田辺 隆人, 多期間ポートフォリオ最適化問題におけるモデリング技術と実装(計算)技術の重要性, ジャフィー・ジャーナル, 掲載予定. (慶應義塾大学理工学部管理工学科テクニカルレポート, No.01-002(2001).)
- [24] 本多俊毅, 投資機会が変動する場合の最適ポートフォリオについて, *現代ファイナンス*, **6** (1999), pp.19–45.