年金 ALM のための
多期間ポートフォリオ最適化モデル

枇々木　規雄

Technical Report　No.2004-001

27 , VII , 2004

〒 223-8522 **横浜市港北区日吉** 3-14-1

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

TEL 045-566-1635

FAX 045-566-1617

E-mail hibiki@ae.keio.ac.jp

1　はじめに

複数の投資対象の中から投資家にとって最も好ましいように、どの投資対象にどれだけ投資をしたらよいかという問題をポートフォリオ最適化問題という。ポートフォリオ最適化問題を解くためのモデルとしては、モデル構築や解法上の容易さから、運用期間にかかわらず、平均・分散モデルを代表とする1期間モデルが中心的に用いられている。しかし、年金基金などの長期的な資金運用を行う投資家は、実際には時間の経過とともに長期的な観点からリバランスを行う必要がある。このような場合、1期間モデルよりも多期間モデルの方が多期間にわたる不確実性を考慮した動的投資政策の決定を「明示的に」モデル化することができる。

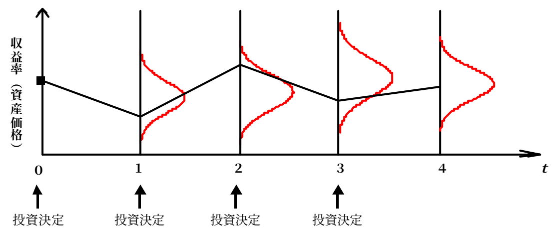

図 1: 多期間モデル

多期間モデルは、図1に示すように、将来の収益率分布に対する予測に基づき、将来発生するキャッシュ・フローも明示的に取り扱って、現時点(初期時点)も含めた将来の投資決定を初期時点で行うモデルである。

このように長期的な計画モデルを必要とする年金ALMにとって多期間モデルはよい特徴を持っていて使うのに適しているものの、実際には理解されにくいのが現状である。『多期間モデルは1期間モデルを繰り返せば、同じではないか?』という質問を受ける場合が多い。多期間は1期間を繰り返す構造になっているので、構造的にはその通りである。しかし、最適化を行う場合、多期間最適化モデルと1期間最適化モデルでは、求められる最適解が一般的に異なる。これが多期間最適化モデルを使った方がよい理由である[1]が、期間が1期間から拡張されたモデルという概念だけでは、その違いはわかりにくい。。そこで、本論文では、① 投資戦略(投資決定ルール)、② 資産配分決定の際の負債の考慮、③ キャッシュ・フローの考慮、という3つの要素を組み合わせることによって政策アセットミックスを決定する様々なモデルを説明できることを示し、年金ALMにおける多期間最適化モデルの理解を助けることにする。

これら3つの要素は長期的な政策アセットミックスを決定するのに重要な要素と考えてよいだろう。3.1項でも示すが、キャッシュ・フローを明示的にモデル化し、リバランス戦略で負債を考慮して資産配分を決定するには多期間最適化モデルで政策アセットミックス決定プロセスをモデル化する必要がある。また、代表的なモデル化の方法も含めて、3つの要素の組み合わせの違いによって、モデル化できる。

これらの議論も含めて、本論文では政策アセットミックスの決定プロセスで用いる数理モデルの構築方法について議論することを目的とする。本論文の構成に合わせて、それらを以下に示す。

① 2節において、代表的な年金ALMの政策アセットミックスの決定プロセスとそれらに用いられる方法論の特徴をまとめる。

② 3節において、決定プロセスで用いることができる様々な数理モデルの組み合わせを検討し、それぞれの特徴を述べる。

③ 4節において、長期間の年金ALMを行うための多期間モデルの特徴と実務への適用について議論する。

[1]多期間最適化モデルの方が、多期間計画の意味でより良い解を導いてくれる。

2　政策アセットミックス

2.1　決定プロセス

年金ALMとは、資産運用と負債のリスクを長期的に管理(評価と制御)するための経営手法である。その中心である政策アセット・ミックス(資産配分)決定プロセスは、年金ALMを適切に実施するために十分に検討されるべきである。代表的な決定方法として、(1) シミュレーション型年金ALM、(2) バランスシート型年金ALM、(3) 多期間確率計画モデルによる年金ALM、の3つを簡単に説明する。

(1) シミュレーション型年金ALM

平均・分散モデルなどの最適化手法で得られたいくつかの効率的フロンティア上の資産配分政策に対し、多期間にわたりモンテカルロ法などでシミュレーションを行い、継続基準における年金債務と対比することによって、リスクを評価する方法である。具体的には、負債側の基礎率は一定とし、図2に示すように将来の資産側の収益変動を責任準備金(数理債務)と比較する。複数の投資配分に対してモンテカルロ・シミュレーションによって生成されたポートフォリオ収益の確率分布を評価し、その中で最も適切な投資配分を決定する。

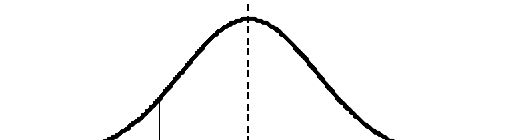

図2: シミュレーション型年金ALM

(2) バランスシート型年金ALM

資産時価から負債時価を引いたサープラス(剰余金)とそのリスクを管理する方法で、負債の時価構造を明示的に考慮して資産配分を決定する。サープラスフレームワークに基づく年金ALMとも呼ばれている。

バランスシート型の基本形は1期間(短期)であり、非継続基準における年金債務を用いたサープラスリスクを管理する方法である。しかし、以降では多期間化およびシミュレーション化を行うとともに、サープラス計算に必要なキャッシュ・フローを考慮したものをバランスシート型ALMと考えることにする。したがって、資産に負債も加えて、平均・分散モデルを解き、モンテカルロ・シミュレーションによって多期間にわたるサープラスの将来分布を推計する方法を表す。

(3) 多期間確率計画モデルによる年金ALM

年金基金に対する多期間確率計画モデルを用いた一つの例であるタワーズペリン(Towers Perrin)のモデル[8]を用いて説明する。タワーズペリンはグローバル CAP:Link と呼ばれる資本市場のグローバルなシナリオ生成システムを開発し、年金基金や保険会社のリスク分析等に使っている。年金基金へ適用する際のプロセス(段階)として、① 年金基金の目的と仮定の設定、②様々な投資戦略に対するリスクとリターン(報酬)の分析、③ 意思決定および資産負債配分戦略の実行、を挙げているが、注意事項として、標準的なプロセスに従ってデータを動かし、一つの答えを出すことが目標ではなく、金融ダイナミクスを理解することが目標であると述べている。主な計算手続きは、① 資産クラスや経済変数に対する期待リターンの設定、② 確率微分方程式のパラメータのキャリブレーション(推定)、③ 分散削減法によるサンプリング、④ 非線形確率計画モデルによる求解、である。また、CAP:Link(シナリオ生成プログラム)、VALCAST(負債キャッシュフローの計算パッケージ)、OPT:Link(多期間投資と拠出金の管理システム)、FIN:Link(財務・会計に関する統計値の計算システム)という4つの構成要素によって実装されている。

大場ら[13]には、図3のようにシミュレーション型ALMとバランスシート型ALMを用いた政策アセットミックス決定プロセスが示されている。長期的な経済環境を予測し、年金

債務や資産特性を推定する。平均・分散モデルでいくつかの効率的ポートフォリオを算出するとともに3種類の年金債務の推定方法を考慮し、シミュレーションによって政策アセットミックスの候補を選定する。何回かフィードバックを繰り返しながら、最終的に政策アセットミックスを決定する。

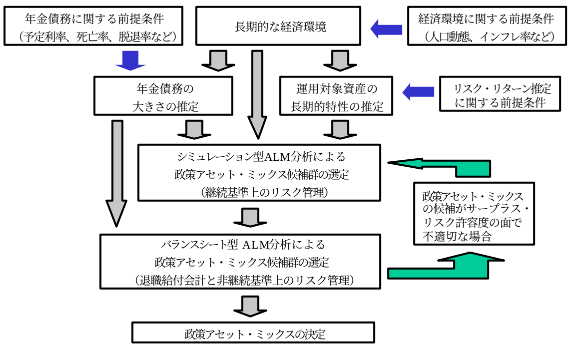

図 3: 年金ALMにおける政策アセットミックス決定プロセス(1)([13] p.119をもとに作成)

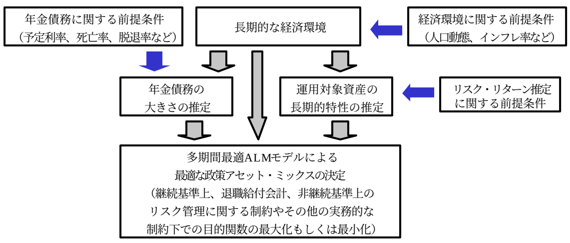

図 4: 年金ALMにおける政策アセットミックス決定プロセス(2)

シミュレーション型ALMやバランスシート型ALMでは、候補となる効率的ポートフォリオは年金債務のキャッシュ・フローに関係なく算出される。年金債務を考慮して求められる最適ポートフォリオが候補群の中に含まれているかどうかという問題に加え、たとえ存在したとしても様々な組み合わせを考慮して政策アセットミックスを決定しなくてはならない。これを回避するには、最初から年金債務を考慮して効率的ポートフォリオを求める必要がある。これは図4のプロセスによって実現できる。タワーズペリンモデルや後述する多期間最適化モデルは図4に示すプロセスに基づいて、政策的アセットミックスを計算する。

2.2 方法論

現在よく用いられている政策アセットミックス決定プロセスでは、シミュレーション手法と数理計画法(一般には最適化手法)の2つの方法論が用いられる。図3に示した決定プロセスでは、数理計画モデルの一つである二次計画モデルで定式化が可能な平均・分散モデルで最適解を求め、資産と負債に関してシミュレーションを行い、年金のリスクを評価する。ここではその2種類の手法を簡単に説明する。

数理計画法は数理計画モデルで定式化された問題、すなわち制約条件式(等式、不等式)を満たすように目的関数を最大化もしくは最小化する問題を解いて、決定変数の値を求める方法である。数理計画モデルの構成要素は、決定変数(未知変数)とパラメータ(既知の入力変数)であり、目的関数と制約式(等式、不等式)を決定変数とパラメータを用いて記述する。平均・分散モデルの場合、決定変数は投資比率、パラメータは期待収益率、分散、相関係数である。

平均・分散モデル(MVモデル)は、リスク(分散)とリターン(期待収益率)によって定義された関数を用いて、最適ポートフォリオを導出するモデルで、以下のように定式化される。

$$
\begin{aligned}
\text{最大化} \quad & \bar{r}_p - \gamma \cdot \sigma_p^2 \\
\text{制約条件} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, \ (j = 1, \ldots, n) \\
& \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

ここで用いられる記号を以下に示す。

n : 資産(証券)数

σ_{jk} : 資産(証券) j と資産(証券) k の共分散

x_j : 資産(証券) j の投資比率

$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$

γ : リスク回避係数

$\overline{r}_j$: 資産 (証券) j の期待収益率

$\overline{r}_p$: ポートフォリオの期待収益率

$$\overline{r}_p = \sum_{j=1}^{n} \overline{r}_j x_j$$

σ_p^2: ポートフォリオの分散

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk} x_j x_k$$

様々な実務制約や目標を考慮する場合、一般に解析解を求めることができるケースは少なく、数理計画法によって数値解を求めることになる[2] 。

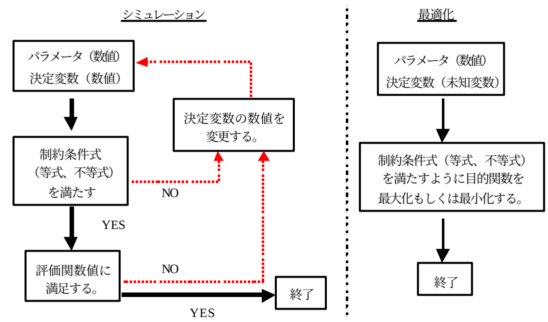

図 5: シミュレーションと最適化

効率的な方法ではないが、シミュレーションモデルによってもポートフォリオを決定することができる。数理計画モデルで決定変数 (未知変数) として設定される投資比率も、シミュレーションモデルではパラメータ (数値) として与えられる。制約条件式を満たすかどうかを調べたのち、評価関数 (数理計画モデルにおける目的関数) の値を計算する。いくつかの投資比率の値に対してこのことを繰り返し、評価関数の最も良い解 (投資比率) を求める[3]。シミュレーションと最適化の違いを図 5に示す。

非常に複雑なモデルの場合には簡単に数理計画モデルで最適解を求めることができない場合が多い。制約式および目的 (評価) 関数に用いることができる関数として、シミュレーションモデルはどのような複雑な関数形でもよいのに対し、数理計画モデルでは一般に大域的最適解の導出を保証するには目的関数を凸関数、制約式を線形関数とする必要がある。(詳しくは枇々木 [14] 1.2節を参照のこと。) モデルが複雑であっても、制約式が線形関数で目的関数が凸関数ならば、複雑なシミュレーションモデルを組み込んだ最適化モデルを構築可能である。

シミュレーションと最適化は相反するものではなく、シミュレーションモデルと最適化モデルをうまく組み合わせることによって、問題を解くことができる。図 3に示す政策アセットミックス決定プロセスはまさにこの方法で、解くのが簡単な平均・分散モデルで最適化を実行後、複雑なモデルでシミュレーションを行い、年金基金の評価を行う。「シミュレーション結果から最適化のための目標の修正」、「最適化した結果を使ってシミュレーション」というフィードバックを繰り返しながら、政策決定をする方法も考えられる。このように構築したモデルを利用する上で、数理計画モデル、シミュレーション型モデルともに共通して行うべきことは感度分析で、様々なパラメータに対して実行し、評価することは重要である。なぜならば、実際にはほとんど (多く) のケースで正しい (と思われる) パラメータを推定すること自体が難しいからである。どのパラメータが評価関数や最適解に影響を与えやすいかなどを調べることによって、意思決定を助けることができる。

ところで、取り扱うことができる資産は両モデルともに、過去のトラッキングレコードが得られるか、もしくは収益率分布を記述できるならば、いかなる資産も同等に取り扱う

[2] 平均・分散モデルは非負制約式などの不等号制約式を含まない (線形の等号制約式のみを含む) 場合、解析解を求めることができる (枇々木 [20] p.67 参照)。しかし、実務上は非負制約式をはじめ、様々な不等号制約式を含めて問題を解くことがほとんどであるため、二次計画法を用いて最適化問題を解くことになる。

[3] 平均・分散モデルの場合には、二次計画法を用いて簡単に最適解が求められる。シミュレーションモデルによる方法は最適解の導出も保証されないので、ここでの説明は意味がないように見えるかもしれない。ここではわかりやすい例を示すために、平均・分散モデルで説明した。

ことができる[4]。最適化モデルでは、確率分布を確率密度関数(累積分布関数)の形で陽に表現できなくても、モンテカルロ・シミュレーションによって離散的に収益率分布を記述できれば、1期間、多期間にかかわらず、最適化問題を解くことができる。

3　政策アセットミックス決定モデル

3.1　モデル構築

政策アセットミックスを決定する手法はさまざま考えられる。多期間にわたり年金ALMを行う際には、以下に示す3つの要素がプロセスを決める重要な要素と考え、その組み合わせで政策アセットミックス決定プロセスの違いを記述する[5]。

(a) 投資戦略

(a1) コンスタント・リバランス戦略 (C.R.) : 各時点である一定の投資比率にリバランスする。

(a2) 買い持ち(バイ・アンド・ホールド)戦略 (B&H) : 初期時点での投資比率を決定したら、以降は何もしない。

(a3) 一般リバランス戦略 (G.R.) : 各時点で最適な投資比率にリバランスする。

(b) 資産配分決定の際に負債を考慮する (AL) か否か (AA) : 資産収益率のみで資産配分を決定する場合を AA、負債の情報を何らかの形で考慮して資産配分決定を行う場合を AL とする。必要な負債の情報はモデルによって異なる。

(c) キャッシュ・フローを明示的に考慮する (YCF) か否か (NCF) : 多期間にわたり管理を行う場合、資産運用や掛金収入、年金支払い等によりキャッシュ・フローが発生する。ここでは、資産と負債それぞれでキャッシュ・フローの増減を取り扱う場合には明示的に考慮していないと考えることにする。したがって、厳密な意味でキャッシュ・フローを無視していないが、それぞれで計算された資産収益と責任準備金を比較するような場合には NCF、資産と負債の差である剰余(サープラス)を評価する場合には資産と負債のキャッシュ・フローをまとめて考えることができると考え、YCF とする[6] 。

組み合わせが異なれば、利用されるモデルも異なる。すべての組み合わせを考えると、表1に示すような11種類のモデル化の方法が考えられる[7] 。バリエーションによって異なるが、モデル1とモデル3がシミュレーション型ALM、モデル8とモデル10がバランスシート型ALM、モデル11が多期間モデルによるALMと考えることができる。

表1の番号の順に、各モデルを図とともに説明する。図7～図17に用いられる図の意味は図6を参照のこと。

表 1: 決定プロセスのモデル化

モデル番号	投資戦略	配分決定	C.F. 考慮	2.1項で説明したモデル
(1)	C.R.	AA	NCF	シミュレーション型
(2)	C.R.	AA	YCF	
(3)	B&H	AA	NCF	シミュレーション型
(4)	B&H	AA	YCF	
(5)	G.R.	AA	NCF	
(6)	G.R.	AA	YCF	
(7)	C.R.	AL	NCF	
(8)	C.R.	AL	YCF	バランスシート型
(9)	B&H	AL	NCF	
(10)	B&H	AL	YCF	バランスシート型
—	G.R.	AL	NCF	モデル化できない
(11)	G.R.	AL	YCF	多期間モデル

[4]年金基金運用で用いられる資産運用対象は多様化している。代表的な資産クラスである国内株式、国内債券、外国株式、外国債券などに加えて、不動産ファンド、ヘッジファンドもその対象となり得る。あるファンドマネージャーの運用ファンドでもよい。

[5]かっこ内の記号は組み合わせを記述するときに用いる。

[6]基本的なバランスシート型ALMの剰余(サープラス)管理ではキャッシュ・フローまでは含めない。定義が異なっている点に注意されたい。

[7]12種類考えられるが、「G.R. − AL − NCF」の組み合わせはモデル化することができない。

① 資産収益率		MV モデルおよび
② 負債収益率		責任準備金評価に用いる。
③ 資産 C.F.		剰余 (サープラス) 評価に
④ 負債 C.F.		用いる。
⑤ MV 効用関数評価		MV モデルの目的関数
⑥ 責任準備金評価		C.F. を考慮しない場合 (NCF)
⑦ 剰余 (サープラス) 評価		C.F. を考慮する場合 (YCF)

図 6: 図の意味

(モデル 1) **C.R. – AA – NCF** (図 7)

- 資産収益率の期待値、分散、相関係数を用いて、以下の 1 期間モデル (MV モデル) の目的関数のもとで、最適ポートフォリオ x_0^* を求める。

目的関数 = 期待収益率 − リスク回避係数 × 分散

⇒ x_0^* で各期リバランスを行い、各時点までに得られる累積収益 (分布) と責任準備金を比較し評価する。1 期間モデルをロールオーバーしているが、モデルの構造上、実質的には 1 期間のみで比較していることになる。

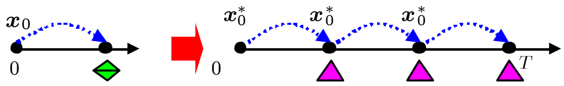

図 7: C.R. – AA – NCF

(モデル 2) **C.R. – AA – YCF** (図 8)

- 最適ポートフォリオ x_0^* は、モデル 1 と同じ。

⇒ x_0^* で各期リバランスし、資産と負債のキャッシュフローを考慮したシミュレーションを行い、剰余 (サープラス) 評価する。

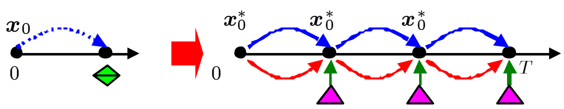

図 8: C.R. – AA – YCF

(モデル 3) **B&H – AA – NCF** (図 9)

- 最適ポートフォリオ x_0^* はモデル 1 と同じ。

⇒ x_0^* で運用の結果得られる収益 (分布) を各時点で必要とされる責任準備金と比較し評価する。

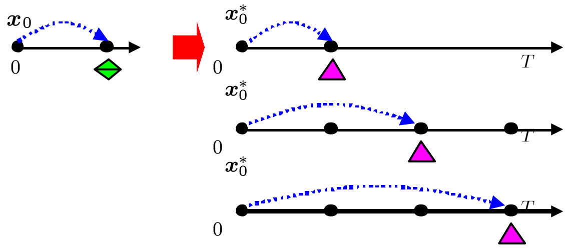

図 9: B&H – AA – NCF

(モデル 4) **B&H – AA – YCF** (図 10)

- 最適ポートフォリオ x_0^* はモデル 1 と同じ。

⇒ x_0^* で運用の結果得られる資産と負債のキャッシュフローを考慮したシミュレーションを行い、剰余 (サープラス) 評価する。

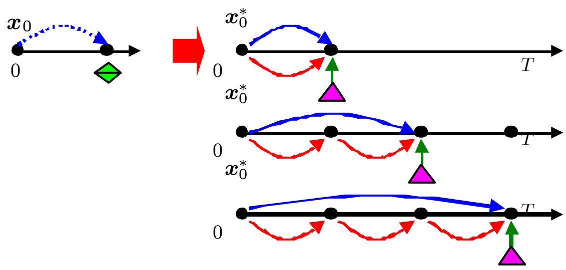

図 10: B&H – AA – YCF

(モデル 5) **G.R. – AA – NCF** (図 11)

- 1 期間モデルで最適ポートフォリオ x_0, x_1, x_2 を各期ごとに求める。

⇒ 各時点までに得られる累積収益 (分布) と責任準備金を比較し評価する。

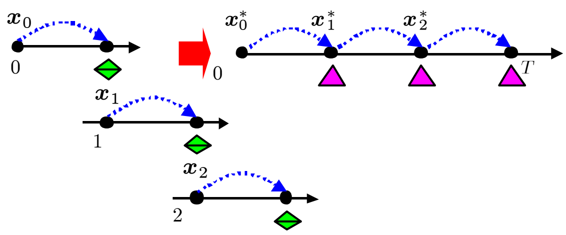

図 11: G.R. – AA – NCF

(モデル 6) **G.R. – AA – YCF** (図 12)

- 最適ポートフォリオ x_0, x_1, x_2 はモデル 5 と同じ。

⇒ 各期リバランスし、資産と負債のキャッシュフローを考慮したシミュレーションを行い、剰余 (サープラス) 評価する。

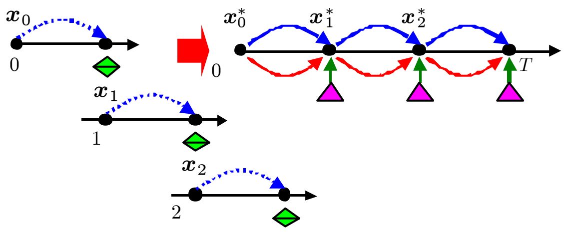

図 12: G.R. – AA – YCF

(モデル 7) C.R. – AL – NCF (図 13)

- **資産収益率と負債収益率を用いて、1 期間モデル (MV モデル) の期待効用関数で評価し、最適ポートフォリオ x_0^* を求める。**

⇒ x_0^* で各期リバランスを行い、各時点までに得られる累積収益 (分布) と責任準備金を比較し評価する。

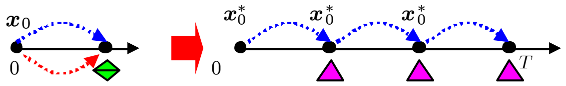

図 13: C.R. – AL – NCF

(モデル 8) C.R. – AL – YCF (図 14)

- **最適ポートフォリオ x_0^* はモデル 7 と同じ。**

⇒ x_0^* で各期リバランスし、資産と負債のキャッシュフローを考慮したシミュレーションを行い、剰余 (サープラス) 評価する。

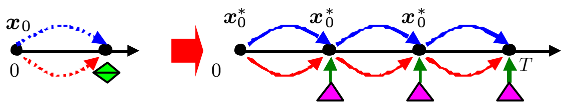

図 14: C.R. – AL – YCF

(モデル 9) B&H – AL – NCF (図 15)

- **最適ポートフォリオ x_0^* はモデル 7 と同じ。**

⇒ x_0^* で運用の結果得られる収益 (分布) を各時点で必要とされる責任準備金と比較し評価する。

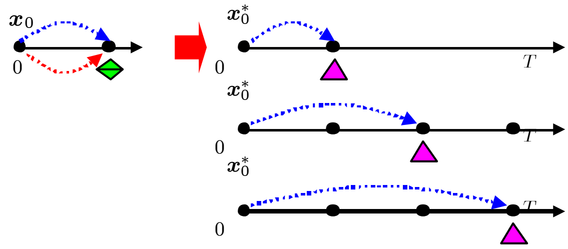

図 15: B&H – AL – NCF

(モデル 10) B&H – AL – YCF (図 16)

- **最適ポートフォリオ x_0^* はモデル 7 と同じ。**

⇒ x_0^* で運用の結果得られる資産と負債のキャッシュフローを考慮したシミュレーションを行い、剰余 (サープラス) 評価する。

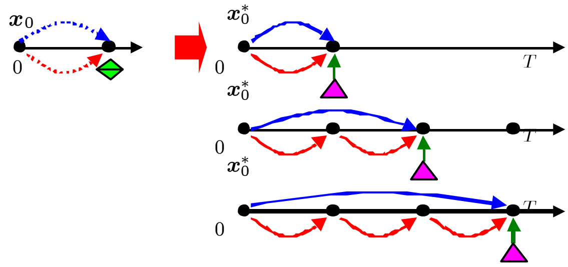

図 16: B&H – AL – YCF

(モデル 11) G.R. – AL – YCF (図 17)

資産と負債のキャッシュフローを同時に考慮し、剰余 (サープラス) 評価を目的関数に組み込んだ多期間モデルで、x_0, x_1, x_2 を同時に決定する[8]。この組み合わせを実現するためには、多期間モデルとしてモデル化をせざるを得ない。

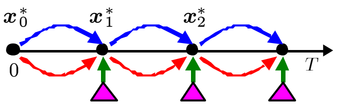

図 17: G.R. – AL – YCF

3.2 モデル選択

3.1項で示したモデルの中からどれを選択すればよいか? 残念ながら、ある一つのモデル

[8] **4.1項で説明するシナリオ・ツリー型モデルやシミュレーション型モデル、シミュレーション/ツリー混合型モデルでは、決定変数を投資量 (単位数) とすることで、凸計画問題として記述することができる。また、特殊なケースとして、$x_0 = x_1 = x_2$ の制約を入れると、コンスタント・リバランス戦略、初期時点以外リバランスをしないという制約を入れると、買い持ち戦略になる。**

化の方法が絶対的に優位であるとは言えない。なぜならば、

- プロセスとしての優位性を何で評価するか、
- 年金リスク管理者が意思決定プロセスをどのように考えるか、
- それを実行できる能力があるか、

によって選択するモデルが異なるからである。いくら一般によいと言われていたとしても、たとえば、入力パラメータを推定する能力がほとんどなかったり、管理者の意図することを反映できないとすれば、モデルをうまく利用することはできないだろう。

11 個のモデルを手法で分けるならば、モデル 1 〜 モデル 10 が「1期間モデルによる最適解の導出」+「多期間にわたるシミュレーションによるリスク評価」、モデル 11 が「多期間モデルによる最適解の導出およびリスク評価」を行うモデルである[9]。

モデル 1 〜モデル 10 のようなシミュレーションを用いた評価モデルでは、2.2項で議論したように複雑な関数でも記述可能である。しかし、計画期間が多期間であるにもかかわらず、1期間モデルで求めたいくつかの候補の中からシミュレーション結果をもとに政策アセットミックスを選択するため、設定した条件をすべて含めた形で最適化問題を解くことはできない。一般に目的関数や制約式が凸関数でないと大域的な最適解を求めることができないものの、モデル 11 は設定した条件をすべて含めた形で最適化問題を解き、政策アセットミックスを求めることができる。モデル記述の複雑さと最適解の計算可能性の間にあるトレードオフ関係を考慮してどのモデルを選択するか決める必要がある。モデル 11 で最適解を求めてから、より精緻なシミュレーションモデルを用いてリスク評価する方法も考えられるが、ここでは省略する。

[9] ここで取り扱うすべてのモデルは、計画期間をいくつかに分けて問題を考えているので、すべて多期間モデルと考えることができる。しかし、一般に「1期間モデル」か「多期間モデル」かは最適ポートフォリオを計算するモデルとしてどちらを採用するかで分けられることが多い。そのため、ここでもモデル 1〜モデル 10 を 1 期間モデル、モデル 11 を多期間モデルと呼ぶ。

年金基金は長期的な資金運用を必要としており、負債の情報やキャッシュ・フローを考慮して各時点で最適な政策アセットミックスのリバランスを「明示的に」記述したモデル 11(「G.R. – AL – YCF」モデル、多期間最適化モデル) は有力な選択肢の一つである。年金リスク管理者が資産と負債に関する条件を適切に設定できるならば、多期間最適化モデルによって、「事前の意味」で最善の政策アセットミックスを求めることができる[10]。数学モデルとして多期間モデルを構築し、うまく利用するには、資産と負債に関する条件を適切に設定することが重要である。

多期間モデルの場合、各期間の収益率分布を予測することが求められるので、現在広く用いられている 1 期間モデルに比べて多くの入力パラメータを推定する必要がある。数学モデルとは入力パラメータを出力 (ここでは政策アセットミックス) に変換する関数のようなものと考えてよいが、入力パラメータがおかしければ、いくら数学モデルが正しくても出力は正しく出てこない。一方、入力パラメータが正しくても数学モデルがおかしければ正しい出力を得ることはできない。一般に、現実をより精緻に記述するために数学モデルを複雑にすればするほど、入力パラメータの推定の難しさは高まっていく。多期間モデルは 1 期間モデルに比べて概念上は優位であり、年金基金にとって利用するに値するモデルである。しかし実際には、感度分析を行うことを前提にしつつ、入力パラメータの推定の難しさと数学モデルとしての精緻さのトレードオフを考慮して利用するかどうかを決める必要がある。

3.3 収益率分布と投資戦略

各期間ごとに想定する (予想される) 収益率分布と選択する投資戦略は関連する。最適ポートフォリオは各期間の負債のキャッシュ・フロー

[10] 政策アセットミックス決定は計画のプロセスであるため、行うべきことは事前の意味で最善の方策を見つけることである。もちろん、これは結果を無視してよいと言っているのではな。重要なのは結果を評価し、それを次の計画へフィードバックすることである。

にも影響を受けるが、ここでは簡単のため、負債を無視してアセットミックスを決める場合について議論しよう。また、わかりやすく説明するために、収益率分布は正規分布に従うと仮定し、期待収益率と共分散行列(分散と相関係数)によって記述可能であるとしよう。投資機会が一定である(期待収益率、共分散行列は各期同じ)と考える場合(リスク許容度も一定とすると)、基本ポートフォリオも各期一定となるので、コンスタント・リバランス戦略によって最適投資比率を求めることになる[11]。一方、投資機会が一定でない(期待収益率、共分散行列は各期動的に変化する)と考えると、たとえ、リスク許容度が一定であったとしても、基本ポートフォリオは動的に変化する(各期で異なる)。したがって、一般リバランス戦略を記述できるモデルで問題を解くことが適切である。すなわち、もしも収益率分布に対して各期同じであると予想するならば、コンスタント・リバランス戦略、そうでないと予想するならば一般リバランス戦略を利用することになる。計画期間全体で収益率分布(期待収益率、共分散行列)を設定するならば、買い持ち戦略で最適投資比率を求める。

多期間モデルにおいては、各時点の投資比率に対する制約条件の設定方法の違いによって投資戦略の違いを記述することができる。制約を置かなければ一般リバランス戦略、各時点の投資比率を同じにするという制約を置くとコンスタント・リバランス戦略、初期時点以外はリバランスをしないという制約を置くと買い持ち戦略になる。ただし、実際には一般リバランス戦略を採る場合には多期間モデルでは、コンスタント・リバランス戦略か買い持ち戦略を採ることができる場合には1期間モデルとしてモデル化されることが多い[12]。

[11]コンスタント・リバランス戦略は収益率に負の系列相関があるときに有利な戦略で、逆バリ戦略的なリバランス方法である。1期間モデルを使うときの前提として、(暗黙のうちに)各期の投資機会が一定で収益率には時系列相関はないという仮定があり、リスク許容度も一定であれば基本ポートフォリオも一定になることから、結果として、コンスタント・リバランス戦略を採用することになる。

[12]モデル5とモデル6は一般リバランス戦略に対して、1期間モデルを利用するが、実際にはこのタイプのモデルは考えなくてよいだろう。

4 多期間ポートフォリオ最適化モデル

4.1 多期間最適化モデルの概要

多期間モデルによるポートフォリオ最適化問題は、Merton[7] と Samuelson[11] によって基本的枠組みが提示されて以来、金融経済学の側面から様々な研究がされている[13]。しかし、実務的な様々な制約や目標を考慮するため、数理計画モデルとして構築される多期間最適ポートフォリオモデルについて議論する。

一般的に多期間最適化問題を解くことは難しい。そのため、近似モデルとして定式化する必要があるが、(1) 決定変数をどのように取り扱うか(投資決定の方法)、(2) 確率変数(収益率)をどのように取り扱うか(離散化の方法)、によってモデル化の方法が異なる。

数理計画モデルとして構築される多期間最適ポートフォリオモデルは、1990年代になって本格的に研究が進み、中心となって(定番として)発展したのは図18(左)のようなシナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルである。シナリオ・ツリー型多期間確率計画モデルは、シナリオ・ツリーによって不確実性を離散的に記述し、各ノード(ツリーの中の枝をつなぐ節で、状態を表す)において条件付き意思決定を行うモデルである。離散的な確率変数を用いることによって、定式化上では確定的なパラメータによる数理計画モデルとして記述でき、様々な実務的制約を入れて問題を解くことができる。シナリオ・ツリー型モデルは近年、コンピュータの高速化と解法アルゴリズムの発展に伴い、大規模な問題を解くことが可能になり、様々な研究が行われている。シナリオ・ツリー型モデルを中心に資産配分問題やALMに関する最近の研究成果を集めた論文集として Ziemba and Mulvey[12] がある。特に、第1章は研究分野全体のサーベイがあり、参考になるだろう。また、Mulvey and Ziemba[9] も同様にサーベイを行っている。

シナリオを生成するためによく用いられるのは、将来の資産価格(収益率)を確率微分方程式や時系列モデル式などで記述し、モンテカルロ・シミュレーションを行う方法である。例

[13]詳しくは本多[24] を参照されたい。

えば、Mulvey and Thorlacius [8] は各国間の影響関係と滝構造 (変数の関係がある一方向へ影響される構造) による経済構造を用いたシナリオ生成システム Global CAP:Link を構築している。各経済変数 (金利、インフレ率、実質利回り、為替レート、株式収益率) を確率微分方程式で記述している。また、ラッセル・安田モデル [2, 3, 4] は、時系列モデル (ファクターモデル) によって資産リターンのシナリオを生成している。しかし、シナリオ・ツリーの生成手続きは記述されていないため、具体的にどのようにシナリオを生成すればよいか不明である。シナリオ・ツリー型モデルは不確実性の記述を詳細にしようとすると、問題の規模が指数的に増加するという欠点があるため、問題を大規模にしないためには数少ないシナリオでうまく不確実性を記述しなければいけない難しさもある[14] 。

一方、枇々木は、離散時間で離散分布に従う確率変数を図 18(右) のように、モンテカルロ・シミュレーションにより発生させたパスを利用して不確実性を記述するが、数理計画問題として定式化が可能なシミュレーション型モデル [18]、シミュレーション／ツリー混合型モデル [19] を提案している。従来、多期間にわたるシミュレーション・パスのもとで最適化問題を解くモデル化の方法は研究されていなかったが、これらのモデルによって (しかも、標準的な数理計画ソフトウェアを用いて) 問題を解くことができるようになった。将来の資産価格 (収益率) を確率微分方程式や時系列モデル式などで記述できれば、モンテカルロ・シミュレーションの標準的な手続きでシナリオを容易に生成できる。シミュレーション・パスは 0 時点では 1時点で生じる状態を特定することはできないが、1時点では 2時点以降の生じる状態がモデルでは特定される。そのため、混合型モデルでは図 19に示すように似たパスをバンドリングして同一ノード内のパスに対する意思決定を共通にすることによって、非予想条件[15] を満たしつつ、条件付き意思決定を行えるようにモデル化している。このモデルを混合型モデルと呼ぶ。シミュレーション型モデルはすべてのパスをバンドリングした混合型モデルの特殊形である。これらのモデルに関する具体的な研究は、枇々木 [5, 6, 21, 22], 齋藤, 枇々木 [15], 多田羅, 枇々木 [16], 枇々木, 田辺 [20], Bogentoft, Romeijn, and Uryasev[1] を参照されたい。

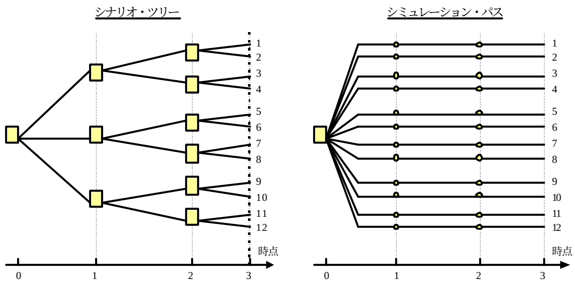

図 18: シナリオ・ツリーとシミュレーション・パス

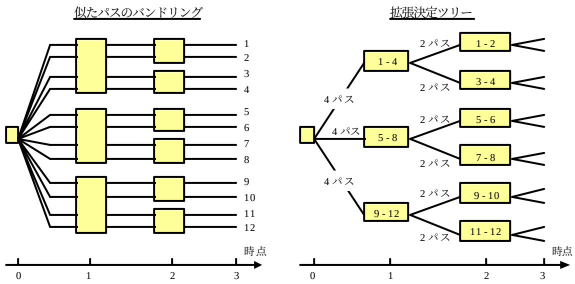

図 19: シミュレーション・パスと拡張決定ツリー

4.2 多期間最適化モデルの実務への適用

実務への適用例として、シミュレーション／ツリー混合型モデルを用いて慶應義塾大学と住友生命相互保険会社が共同開発した企業年金 ALM システム [17] について説明しよう[16]。具体的な計算フローを図 20 に示す。

シナリオは、確率分布で記述するか、もし

[14]例えば、5 期間問題を考えよう。各期間同数で状態が広がる場合、最終時点でのシナリオ数を仮に 10 万本としても、$10^5 = 100,000$ であり、1 時点目には 10 個の状態しか想定できない。

[15]非予想条件 (non-anticipativity condition) とは、モデルの定式化において、将来の不確実な状態の中からどの状態が生じるかを確定的に知っていることを利用して意思決定ができる機会を許さない条件のことである。不確実性下の投資決定を行う確率計画モデルには必要な条件である。

[16]この開発プロジェクトでは、他に次の企業が参画している。住友生命グループ (住友生命総合研究所、SLI)、CTC フィナンシャルエンジニアリング、バーラジャパン、 数理システム

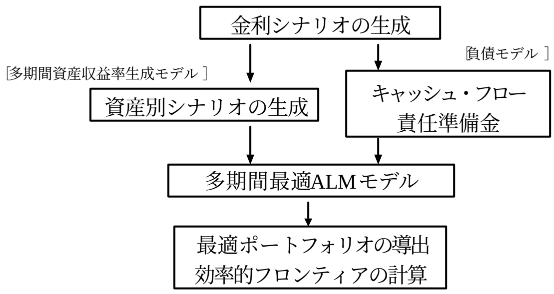

図 20: 具体的な計算フロー

くはモンテカルロ・シミュレーションにより生成されるサンプルパスでもよい。

(1) 期間の設定

年金運用の場合、超長期 (20 年程度) の計画期間で運用することが必要であるが、財政再計算までの運用 (5 年ごと) も重要である。また、ある程度、資産収益率モデルで予測が可能な期間は 5 年までであろう。そのため、5 年目以降の資産収益率を投資決定に用いるならば、全体の投資決定を歪める可能性がある。そこで、期間を以下のように分割し、定式化を試みる。

- 動的取引戦略 ($t = 0, \ldots, \tau$) : 最初の 5 年間 (0 時点〜4 時点: 1 年ごと、5 回)
- 固定取引戦略 ($t = \tau + 1, \ldots, T$) : 5 年目、10 年目、15 年目、20 年目 (4 つの時点)

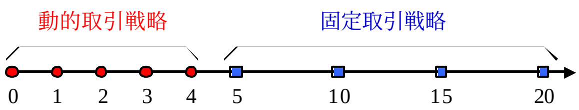

図 21: 計画期間と意思決定

動的取引戦略をとる時点はリバランス (意思決定による投資配分の変更) を行う時点で、固定取引戦略をとる時点はリバランスを行わない時点である。モデルは、8 期間問題として定式化される。各時点でリスク評価を行うが、リターン評価は 5 年目と 20 年目とする。

(2) リスク指標の設定

資産額が年金債務を下回ること (サープラスの不足) をリスクと考え、下方リスクを利用する。

すべての時点でリスクを考慮するために、各時点で計算されるリスク指標を成熟度を用いて、一元化し、合成リスク指標を設定する。

$$\text{リスク} = E\left[\max\left(\text{年金債務} - \text{資産額}, 0\right)\right]$$

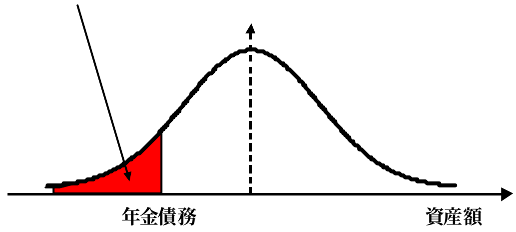

図 22: リスク指標の設定

$$\text{合成リスク指標} = \sum_{t=1}^{T} d_t \cdot w_t \cdot \mathrm{Risk}_t$$

用いる記号の意味は以下の通りである。

d_t : 割引率

w_t : 成熟度 $\left(\displaystyle\sum_{t=1}^{T} w_t = 1 \text{ となるように変換}\right)$

Risk_t : t 時点のリスク指標値

(3) リターン指標の設定

中期的なリターンと長期的なリターンの両方を考慮するために、5 年目と 20 年目の期待資産額の加重平均値をリターン指標として設定する。

$$\text{リターン指標} = w_R E\left[W_5\right] + (1 - w_R) E\left[W_{20}\right]$$

用いる記号の意味は以下の通りである。

w_R : 5 年目の期待資産額の重み係数

$E\left[W_t\right]$: t 年目の期待資産額

(4) 目的関数の設定

合成リスク指標とリターン指標を用いた関数を目的関数として設定し、その最大化を目指す。

$$\text{目的関数} = \text{リターン} - \text{リスク回避係数} \times \text{リスク}$$

(5) 最適資産配分と効率的フロンティア

一つの計算例として、リスク回避係数をパラメトリックに変化させて求めた効率的フロンティアを図 23 に示す。資産配分比率は効率的フロンティア上のある一点における結果を表す。ただし、1 時点以降は各ノードごとに最適配分が求められるが、紙面の都合上、各ノードの平均値を表す。

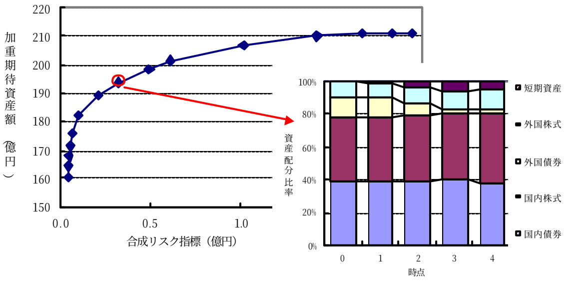

図 23: 最適資産配分と効率的フロンティア

5　まとめ

政策アセットミックスを決定する際に、負債を考慮し、キャッシュ・フローを明示的に記述して、リバランス投資戦略を行いたいならば、多期間最適化モデルは最適方策を決める有用なモデルである。しかし、多期間モデルは1期間モデルに比べて、モデル自体も複雑で、多くの入力パラメータを要求されるため、モデル利用者はモデルの特徴(長所と欠点)を十分に理解したうえで、使う必要がある。

『多期間モデルは1期間モデルに比べてよいか？』という質問を受けることも多い。これに対する答えは、『概念上は優位であり、年金基金にとって利用するに値するモデルであるが、多期間モデルを使った方が絶対によいと言うことはできない。』である。実際には今まで説明してきたように、多期間モデルをうまく使いこなせるかどうかに委ねられる。1期間モデルを使っている年金運用担当者は、すぐには1期間モデルに比べて多期間モデルをうまく使いこなすことはできないだろう。だからといって、多期間モデルは使えないとは言えない。『各期の予想を伴う多期間モデルを使うと、予想がはずれたときに1期間モデルに比べてよい結果を得られないから、多期間モデルを使わない』[17] と言う人がいる。多期間モデルを使って徐々に経験を積んでいけば、様々な状況を想定できるモデルは年金運用担当者の技量を反映させることができ、柔軟なモデルとして使い勝手がよくなるであろう。一方、年金ALMにおいては、政策アセットミックスを決定することが主であるが、様々な予想に対する結果を評価することも重要である。多期間モデルはこのニーズに応えてくれることのできる柔軟なモデル化の方法である。将来の収益に関連する多くの要因に対する感度分析を行うことによって、年金ALMにおけるリスク評価を様々な側面から明らかにすることができる。

多期間モデルには、実務上克服しなければいけない問題点は多い。モンテカルロ・シミュレーションを最適化の中にうまく組み込むことができる混合型モデルは従来のシナリオ・ツリー型モデルに比べて、シナリオ生成の上で有利な点が多く、実務的なモデルとして有用であると考えられる。今後、多くの人に多期間最適化モデルに興味を持っていただき、そこから得られた知見や情報などが研究者や実務家にフィードバックされることによって、よりよいモデルへと発展していくことを望んでいる。

[17] 予想というのは、収益率がある一つの値になることを当てることでなく、収益率分布もしくはそのパラメータ(期待収益率や分散など)を想定することである。

参考文献

[1] E. Bogentoft, H. Romeijn, and S. Uryasev, Asset/Liability Management for Pension Funds Using CVaR Constraints, *The Journal of Risk Finance*, Fall 2001, pp.57–71.

[2] D.R. Cariño, T. Kent, D.H. Myers, C. Stacy, M. Sylvanus, A.L. Turner, K. Watanabe and W.T. Ziemba, The Russel–Yasuda Kasai Model: An Asset/Liability Model for a Japanese Insurance Company Using Multistage Stochastic Programming, *Chapter 24 in* Ziemba and Mulvey[12] (1998), pp.609–633.

[3] D.R. Cariño, D.H. Myers and W.T. Ziemba, Concepts, Technical Issues, and Uses of the Russell-Yasuda Kasai Financial Planning Model, *Operations Research*, **46**, 4(1998), pp.450–462.

[4] D.R. Cariño and W.T. Ziemba, Formulation of the Russell-Yasuda Kasai Financial Planning Model, *Operations Research*, **46**, 4(1998), pp.433–449.

[5] N. Hibiki, Hybrid Simulation/Tree Stochastic Optimization Model for Dynamic Asset Allocation, *Chapter 14 in* "Asset and Liability Management Tools: A Handbook for Best Practice" edited by B. Scherer, Risk Books, pp.269–294, 2003.

[6] N. Hibiki, Multi-period Stochastic Optimization Models for Dynamic Asset Allocation, **日本金融・証券計量・工学学会 2003年冬季大会予稿集**, pp.243–264.

[7] R.C. Merton, Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, *The Review of Economics and Statistics*, **51** (1969), pp.247–257.

[8] J.M. Mulvey and A.E. Thorlacius, The Towers Perrin global capital market scenario generation system, *Chapter 13 in* Ziemba and Mulvey[12](1998), pp.286–312.

[9] J.M. Mulvey and W.T. Ziemba, Asset and Liability Allocation in a Global Environment, *Chapter 15 in* "Handbooks in OR & MS, Vol.9", edited by R.Jarrow et al., 1995, pp.435–463. (**邦訳：枇々木規雄：グローバル環境における資産負債配分**, **第15章**, **今野浩**, **古川浩一編著**, **ファイナンスハンドブック**, 1997, pp.424–450.)

[10] J.M. Mulvey and W.T. Ziemba, Asset and Liability Management Systems for Long-Term Investors: Discussion of the Issues, *Chapter 1 in* Ziemba and Mulvey[12] (1998), pp.3–38.

[11] P.A. Samuelson, Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, *The Review of Economics and Statistics*, **51** (1969), pp.239–246.

[12] W.T. Ziemba and J.M. Mulvey, Worldwide Asset and Liability Modeling, 1998, Cambridge University Press.

[13] **大場昭義**, **菅原周一 編**, **年金資産運用の理論と実践**, **日本経済新聞社**, 2002.

[14] **厚生年金基金連合会・リスク管理研究会**, **厚生年金基金のリスク管理 ― 政策アセットミクスの策定 ― 第一次報告**, 2001.

[15] **齋藤直紀**, **枇々木規雄**, **市場リスクと信用リスクを考慮した銀行の資産負債管理に対する確率的最適化モデル**, **日本金融・証券計量・工学学会 2001年夏季大会予稿集**, pp.330–349.

[16] **多田羅智之**, **枇々木規雄**, **多期間確率計画モデルの年金ALMへの適用**, **日本金融・証券計量・工学学会 2001年夏季大会予稿集**, pp.350–366.

[17] **日経金融新聞「住友生命、慶応大学、企業年金の新評価手法、長期の資産管理、柔軟に。」**, 2002**年**7**月**5**日**.

[18] **枇々木規雄**, **戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル**, *Journal of Operations Research Society of Japan*, **44**, No.2(2001), pp.169–193.

[19] **枇々木規雄**, **最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル**, **高橋一編**, **ジャフィー・ジャーナル** [2001] **金融工学の新展開**, pp.89–119.

[20] **枇々木規雄**, **金融工学と最適化**, **朝倉書店**, 2001.

[21] **枇々木規雄**: **シミュレーション型多期間確率計画モデルに対する数値実験による考察**. **日本金融・証券計量・工学学会 2002年夏季大会予稿集**, pp.81–100.

[22] **枇々木規雄**, **コンパクト表現によるシミュレーション型多期間確率計画モデルの定式化**, *Journal of Operations Research Society of Japan*, **45**, 4(2002), pp.529–549.

[23] 枇々木規雄, 田辺隆人：多期間ポートフォリオ最適化問題におけるモデリング技術と実装 (計算) 技術の重要性，高橋一, 池田昌幸編, 金融工学と資本市場の計量分析—ジャフィー・ジャーナル [2003], pp.81–114.

[24] 本多俊毅, 投資機会が変動する場合の最適ポートフォリオについて, 現代ファイナンス, **6** (1999), pp.19–45.

付録

A　多期間年金 ALM モデルの詳細

A.1　モデルの構造

ここでは、以下のような設定のもとで、最も典型的で基本的な年金 ALM 問題のための多期間確率計画モデルを示す。個々の年金基金のニーズに合わせて、このモデル化をベースにして拡張・修正することが可能である。

① すべての負債項目の増減に関するキャッシュ・フローを一括してまとめ、一つの負債項目として記述する。

② 資金は、n 個の危険資産と現金 (コール・ローン) で運用する。

③ 0 時点を計画開始時点、T 時点を計画最終時点とする。この期間をリバランスを行う (動的取引戦略をとる) 時点である $t = 0, \ldots, \tau$ とリバランスを行わない (固定取引戦略をとる) 時点である $t = \tau+1, \ldots, T$ に分割し、定式化を試みる。

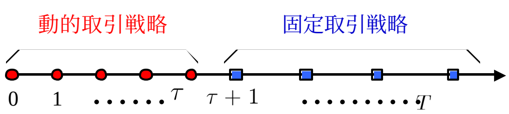

図 24: 計画期間と意思決定

④ リターン尺度は $\tau+1$ 時点 (中期) と T 時点 (長期) の期待富の加重平均とする。リスク尺度は全時点の 1 次下方部分積率の加重平均とする。これらのリターン尺度とリスク尺度を用いた関数を目的関数に設定する。

⑤ 投資量 (単位数) を決定変数としたモデル化を行う[18]。

A.2　モデルに用いる記号

(1) 添字

j ：危険資産を表す添字。

t ：時点を表す添字。

i ：経路 (パス) を表す添字。

s ：決定ノードを表す添字で，時点 (t) とともに記述する。

s'：任意の時点の決定ノード s につながっている 1 時点前の決定ノードを表す添字。

M_t^s：t 時点の決定ノード s に含まれる経路の集合。$(t = 1, \ldots, \tau;\ s \in S_t)$

S_t：t 時点の決定ノード s の集合。$(t = 1, \ldots, \tau)$

(2) パラメータ

n ：危険資産数 (現金を含めると、資産数は $n+1$ 個)

T ：計画最終時点

τ ：動的取引戦略期間の最終時点

I ：経路の本数

b_0 ：0 時点の取引前の現金の保有額。

b_j ：0 時点の取引前の危険資産 j の投資量。$(j = 1, \ldots, n)$

[W_0 ：0 時点での富 (初期富)。

$$W_0 = b_0 + \sum_{j=1}^{n} \rho_{j0} b_j$$]

[18] 1 期間モデルでは、一般に投資比率を決定変数とするモデル化の方法が行われるが、多期間モデルでは投資量 (単位数) を決定変数とする定式化が行われる。これは投資比率を決定変数とすることが、モデルの非線形構造の (非凸非線形計画問題として定式化される) 原因となっていて、一般に大域的最適解の導出を保証することができないからである。

ρ_{j0} ：0時点の危険資産 j の価格。
$(j=1,\ldots,n)$

$\rho_{jt}^{(i)}$ ：t 時点の経路 i の危険資産 j の価格。
$(j=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T;$
$i=1,\ldots,I)$

r_0 ：期間 0 の金利(0 時点のコール・レート)。

$r_{t-1}^{(i)}$：期間 t の経路 i の金利($t-1$ 時点のコール・レート)。
$(t=2,\ldots,T;\ i=1,\ldots,I)$

$D_t^{(i)}$：t 時点の負債科目の増減額。負債科目が増額すれば負値、減額すれば正値をとる[19] 。$(t=1,\ldots,T:\ i=1,\ldots,I)$

$W_{G,t}$：t 時点での目標富[20] 。

U_0^I, L_0^I：現金の組み入れ比率の上限値、下限値

U_j^I, L_j^I： 危険資産 j の組み入れ比率の上限値、下限値。$(j=1,\ldots,n)$

U_j^T： 危険資産 j の売買回転率の上限値。
$(j=1,\ldots,n)$

cl ：$\tau+1$ 時点以降の負債キャッシュ・フローのために、τ 時点に現金で確保すべき割合。

w_t ：t 時点のリスク値(LPM_t)の重み係数 $(t=1,\ldots,T)$。ただし、$\sum_{t=1}^{T} w_t = 1$ とする。

w_W： $\tau+1$ 時点における期待富に対する重み係数。(T 時点における期待富に対する重み係数は、$1-w_W$ 。)

λ ：リスク回避係数。

[19]年金支払い額 (支出) から年金の掛金収入を引いた値を表す。また、0時点ではすでに考慮済み(b_0 に反映されているもの)とする。

[20]掛金水準を維持するための最小のリスク水準、PBO水準、t 時点において必要とされる負債額(t 時点以降、支出されるであろう金額の t 時点における価値), もしくは政策的に目標とする富の水準を設定する。

df_t ：t 時点の評価尺度の割引率。
$(t=1,\ldots,T)$

(3) 決定変数

z_{j0} ：0 時点の危険資産 j への投資量。
$(j=1,\ldots,n)$

z_{jt}^s ：t 時点の決定ノード s の危険資産 j への投資量。
$(j=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,\tau;\ s\in S_t)$

v_0 ：0 時点の現金(コール運用額)。

$v_t^{(i)}$： t 時点の経路 i の現金(コール運用額)。$(t=1,\ldots,\tau;\ i=1,\ldots,I)$

$q_t^{(i)}$： t 時点の経路 i の富の目標富に対する不足分。$(t=1,\ldots,T;\ i=1,\ldots,I)$

A.3 モデルの定式化

(1) キャッシュ・フロー制約式

(動的取引戦略期間：$t=0,\ldots,\tau$)

(1) 式は 0時点の配分決定、(2), (3) 式は 1 時点以降の富 $W_t^{(i)}$ およびキャッシュ・フロー等価式を表す。

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} W_1^{(i)} &\equiv \sum_{j=1}^{n} \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1+r_0)v_0 - D_1^{(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \rho_{j1}^{(i)} z_{j1}^s + v_1^{(i)},\ (s\in S_1;\ i\in M_1^s) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} W_t^{(i)} &\equiv \sum_{j=1}^{n} \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1}^{s'} + \left(1+r_{t-1}^{(i)}\right) v_{t-1}^{(i)} - D_t^{(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \rho_{jt}^{(i)} z_{jt}^s + v_t^{(i)}, \\ &\quad (t=2,\ldots,\tau;\ s\in S_t;\ i\in M_t^s) \end{aligned} \tag{3}$$

(2) 富の計算式(固定取引戦略期間：
$t=\tau+1,\ldots,T;\ s\in S_\tau;\ i\in M_\tau^s$)

$$W_t^{(i)} \equiv \sum_{j=1}^{n} \rho_{jt}^{(i)} z_{j\tau}^s + CR_t^{(i)} v_\tau^{(i)} - CDS_t^{(i)} \tag{4}$$

$$v_\tau^{(i)} \geq cl \times \max\left\{\max_t\left(\frac{CD_t^{(i)}}{CR_t^{(i)}}\right), 0\right\},$$
$$(i = 1, \ldots, I) \tag{5}$$

ここで、

- $CR_t^{(i)}$: $v_\tau^{(i)}$ を t 時点まで運用するときの経路 i の累積倍率

$$CR_{\tau+1}^{(i)} = 1 + r_\tau^{(i)}$$
$$CR_t^{(i)} = CR_{t-1}^{(i)} \times \left(1 + r_{t-1}^{(i)}\right) = \prod_{u=\tau+1}^{t}\left(1 + r_{u-1}^{(i)}\right),$$
$$(t = \tau + 2, \ldots, T)$$

- $CD_t^{(i)}$: $\tau + 1 \sim t$ 時点の経路 i の累積負債増減額

$$CD_{\tau+1}^{(i)} = D_{\tau+1}^{(i)}$$
$$CD_t^{(i)} = CD_{t-1}^{(i)} + D_t^{(i)} = \sum_{u=\tau+1}^{t} D_u^{(i)},$$
$$(t = \tau + 2, \ldots, T)$$

- $CDS_t^{(i)}$: $\tau + 1 \sim t$ 時点の金利も考慮した経路 i の累積負債増減額

$$CDS_{\tau+1}^{(i)} = D_{\tau+1}^{(i)}$$
$$CDS_t^{(i)} = CDS_{t-1}^{(i)} \times \left(1 + r_{t-1}^{(i)}\right) + D_t^{(i)},$$
$$(t = \tau + 2, \ldots, T)$$

(3) 非負制約式

$$v_t^{(i)} \geq 0,\ (t = 1, \ldots, \tau - 1;\ i = 1, \ldots, I) \tag{6}$$
$$q_t^{(i)} \geq 0,\ (t = 1, \ldots, T;\ i = 1, \ldots, I) \tag{7}$$

z_{j0}, z_{jt}^s にも非負制約が必要であるが、組み入れ比率の下限制約式で代用可能なため、ここでは記述しない。

(4) 期待富に関する式

$|M_t^s|$ は集合 M_t^s に含まれる経路数を表し、$\overline{\rho}_{jt}^s = \frac{1}{|M_t^s|}\sum_{i \in M_\tau^s} \rho_{jt}^{(i)}$ とする。

① t 時点の決定ノード s の期待富

$$\overline{W}_t^s = \frac{1}{|M_t^s|}\sum_{i \in M_t^s} W_t^{(i)} \tag{8}$$

② T 時点の期待富

$$\overline{W}_T = \sum_{s \in S_\tau} \frac{|M_\tau^s|}{I} \sum_{j=1}^{n} \overline{\rho}_{jT}^s z_{j\tau}^s + \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} CR_T^{(i)} v_\tau^{(i)} - \overline{CDS}_T \tag{9}$$

(5) 上下限制約式

① 現金の上下限制約式

$$L_0^I W_0 \leq v_0 \leq U_0^I W_0 \tag{10}$$
$$L_0^I \overline{W}_t^s \leq \overline{v}_t^s \leq U_0^I \overline{W}_t^s,$$
$$(t = 1, \ldots, \tau;\ s \in S_t) \tag{11}$$

ここで、$\overline{v}_t^s = \frac{1}{|M_t^s|}\sum_{i \in M_t^s} v_t^{(i)}$ である。

② 危険資産の上下限制約式[21]

$$\max\left(-U_j^T + \frac{\rho_{j0} b_j}{W_0},\ L_j^I\right) W_0 \leq \rho_{j0} z_{j0} \leq \min\left(U_j^T + \frac{\rho_{j0} b_j}{W_0},\ U_j^I\right) W_0,$$
$$(j = 1, \ldots, n) \tag{12}$$
$$L_j^I \overline{W}_t^s \leq \overline{\rho}_{jt}^s z_{jt}^s \leq U_j^I \overline{W}_t^s,$$
$$(j = 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, \tau;\ s \in S_t) \tag{13}$$

③ 危険資産の売買回転率

$$-U_j^T \overline{W}_t^s \leq \overline{\rho}_{jt}^s (z_{jt}^s - z_{j,t-1}^{s'}) \leq U_j^T \overline{W}_t^s,$$
$$(j = 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, \tau;\ s \in S_t) \tag{14}$$

(6) 目的関数

最大化 $$w_W df_{\tau+1} \overline{W}_{\tau+1} + (1 - w_W) df_T \overline{W}_T - \lambda \cdot \sum_{t=1}^{T} w_{R,t} df_t \mathrm{LPM}_t \tag{15}$$

ただし、

$$\mathrm{LPM}_t \equiv \min\left\{\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} q_t^{(i)} \middle| W_t^{(i)} + q_t^{(i)} \geq W_{G,t}^{(i)}\right\} \tag{16}$$

[21] 0時点に関しては売買回転率制約との組み合わせによって記述する。