

# ポートフォリオ最適化のモデル開発と実務への適用

枇々木 規雄 (慶應義塾大学理工学部)

## Portfolio Optimization Modelling and Applications in Financial Engineering

N. Hibiki (Keio University)

**Abstract**— We discuss modelling and applications for multi-period portfolio optimization problems in the paper. We introduce the research topics for portfolio optimization modelling. We explain the features of the simulated path model and the hybrid model which are the multi-period optimization models developed by the author. We describe the applications using these models; pension ALM model used in practice and household financial planning model.

**Index terms**— Portfolio optimization, multi-period model, pension ALM, household financial planning

### 1 はじめに

ポートフォリオ最適化モデルはリスクとリターンを考慮して、最適な資産の組み合わせ(ポートフォリオ)を見つける問題を解くための数理モデルで、株式ポートフォリオ選択問題、資産配分問題、ALM(資産負債管理)において利用されている。理論的にも実務的にも主に使われている代表的なモデルは平均・分散モデルである。リスク尺度を収益率の分散(標準偏差)とするため、投資家の効用関数が2次関数である場合を除き、資産収益率が正規分布に従うという暗黙の仮定を置くことになる。しかし、デリバティブや保険商品などのように正規分布を仮定できない場合には、他のリスク尺度を用いた方がよい。それに対応するために、下方部分積率やCVaR(条件付きバリュー・アット・リスク)などのダウンサイドリスク尺度を用いた最適化モデルを利用することができる(詳しくは枇々木<sup>1)</sup>を参照されたい)。

一方、平均・分散モデルは1期間モデルであり、年金基金や保険会社のように、長期間におけるリバランスを前提とした資産運用に対応するためには多期間最適化モデルが適している。また、年金や保険のALMに対応するためには負債を考慮する(キャッシュ・フローを含む)モデル化も必要である<sup>1)</sup>。

本稿ではまずはじめに、ポートフォリオ最適化モデルに関する研究の概要を示す。そして、著者が研究した多期間最適化モデルを中心に、今まで適用を試みた実際の問題に対するモデル化や分析結果について説明する。

<sup>1)</sup>実際には、これらに対応できるモデルを構築せずに、平均・分散モデルを適用することが多いようである。ファイナンスの教科書にも平均・分散モデルしか書かれていないことが多いので、「ポートフォリオ最適化モデル=平均・分散モデル」というのは仕方がないことかもしれない。

本論文の構成は以下の通りである。2章ではポートフォリオ最適化モデルに関する研究の概要を示す。3章では多期間最適化のモデル化について解説する。多期間最適化モデルの実際問題への適用事例として、4章では年金ALMモデル、5章では家計の資産形成モデルについて説明する。最後に6章でまとめを行う。

### 2 ポートフォリオ最適化のモデル化

ポートフォリオ最適化のモデル化に関する研究を大きく3つに分けて、その概要を説明する。

#### (1) 一般的なモデル化に関する研究

モデルを記述するために必要な基本要素は、期間数(時間)、収益率などの確率分布、投資決定(最適解)の3つである。期間数の違いによって、1期間モデルか多期間モデルのどちらかで記述することになり、さらに多期間モデルでは連続時間モデルか離散時間モデルに区分される。1期間モデルは株式ポートフォリオ問題など投資対象数が多い問題に適用される。多期間モデルは資産配分問題やALMに適用される。収益率などの確率分布も連続分布もしくは離散分布(シナリオ)のどちらで取り扱うかによってモデル化の方法が異なる。最適解(投資決定)として、解析解(関数形)を得たいのか、数値解でよいのかによっても解法が異なるため、解法に合ったモデル化をする必要がある。

#### (2) 実際問題へ適用するモデル構築に関する研究

実際問題をモデル化するにあたり、問題の本質を深く理解するとともに実務のニーズを認識することが必要である。しかし、「研究レベルで実務に使えますと主張するだけ」か、「実際に使えるモデル化を行う」かによって、そのレベル感は全く異なる<sup>2)</sup>。前者はテーマ

<sup>2)</sup>大学の研究者はコンサルタントを生業としているわけではないので、いきなり問題解決の依頼が来るわけではなく、前者の立場で研究を行い、それを見た企業が後者の形で研究を依頼してくるケースがほとんどであろう。

の設定を間違わずに、しかも理論的になりすぎなければ(実務への適用可能性が見えれば)、通常の研究と変わらない。一方、後者は(多くの経験があるわけではなく、著者の経験から言えば)、実務家に理解可能で、モデルの実装まで行わなければいけない。モデルをブラックボックス化しないためには実務家への教育まである程度、携わる必要があり、いろいろな面でコストが高くなる。

前述したように、モデル化の方法にはいくつかの選択肢がある。ただし、実務的な制約を含めて最適解を得るためには、数理計画モデルによる定式化が必須であるとともに、既存の計算アルゴリズムを利用するためにモデルを近似するなどの工夫も必要である。

### (3) 高速解法のためのモデル化の研究

大規模で複雑な問題の場合には、ナイーブなモデル化をするだけでは、高速に解くことが難しい問題もある。その場合、モデル構造を変形して、既存のアルゴリズムを適用するか、新しい解法アルゴリズムを開発し、高速に解く研究も行われている。モデル構造を変更して問題を解く代表例として、平均・分散モデルに対するコンパクト分解表現(Konno and Suzuki<sup>35</sup>)がある。著者もこれを株式の最適執行戦略に応用して高速に問題を解けるモデル表現を開発している(枇々木<sup>22</sup>)。一方、非凸非線形計画問題の例として、取引コストを考慮したポートフォリオ最適化問題があるが、この問題に対しては、0-1型混合整数計画を用いたモデル化および解法アルゴリズムも開発されている(山本<sup>43</sup>)。

## 3 多期間最適化モデルに関する研究

モデルの対象期間が1期間なのか多期間なのかによって、モデル化の方法は大きく異なる。1期間モデルと多期間モデルの最大の違いは、多期間モデルでは期中の富の水準もしくはキャッシュ・フローを明示的に考慮する必要があることである。しかし、そのことが多期間モデルの最適解の導出を難しくしている。ここでは、多期間最適化のモデル化に関する研究について説明する。

### 3.1 連続モデルと離散モデル

数理ファイナンスや金融経済学分野で研究されている連続モデルは連続時間・連続分布でモデルを記述し、ベルマン方程式やマルチンゲール・アプローチによって解析解を見つけることを目指している。ただし、Kim and Omberg<sup>34</sup>、Liu<sup>37</sup>、Civitanić and Karatzas<sup>7</sup>など解析解が得られるケースは限定されている。近年、最小二乗モンテカルロ法(Longstaff and Schwartz<sup>38</sup>)を

用いた近似解法により数値解を求める手法が Brandt, et al.<sup>4</sup>)によって提案されている。現実的な問題に対しては数値解を計算する方法が有力になると思われるが、それでも実務的な制約を加えることは難しい。

一方、金融工学やオペレーションズ・リサーチ分野で研究されている離散時間モデルは離散時間・離散分布でモデルを記述し、数理計画法によって数値解を計算する。定番モデルは、1990年代に急速に発展したシナリオ・ツリー型モデルであり、これまでに様々な研究成果が発表されている(Ziemia and Mulvey<sup>44</sup>、Zenios and Ziemia<sup>45, 46</sup>)。数理計画モデルでは、実務的な制約を加えることは容易である。しかし、収益率分布の記述を詳細にすると、ツリーが指数的に増加することにより計算負荷が大きくなり、実際に問題を解くことが難しくなる。それに対し、枇々木<sup>15</sup>)は、モンテカルロ法によるシミュレーション・パスを用いて収益率分布を近似して問題を解く数理計画モデルとして、シミュレーション型モデルを開発した。さらに枇々木<sup>16</sup>)はシミュレーション型モデルに条件付き意思決定を導入した混合型モデルを開発した。以下では、これらのモデルおよび研究成果について説明する。

### 3.2 シミュレーション型モデルと混合型モデル

#### 3.2.1 シミュレーション型モデル

著者は1992年頃(博士課程の学生の時)、シナリオ・ツリー型モデルを用いて銀行のALMモデルを研究していた。当時、シナリオ・ツリーの作成方法を具体的に記述した既存論文はなく、クラスター分析を使ったアイデアを考えていたが、実際にはアイデアのみでシナリオ・ツリー「ありき」でモデルの研究を行った。その後、数年経ち、企業研究者から Barberis<sup>1</sup>)の拡張として「リスク資産を1つから複数に拡張できないか?」という相談を受け、多期間モデルの研究を再開した。この論文はシミュレーションを使って数値解を計算していた。その枠組みでは拡張は難しかったので、全く発想を変えたシミュレーション型モデル<sup>15</sup>)を開発した<sup>3</sup>。シミュレーション型モデルは、Fig.1のように、モンテカルロ・シミュレーションで生成した将来の資産収益率などを用いた多期間最適化モデルである。シミュレーション・パスごとに条件付き意思決定を行うと非予想条件をクリアできないため(予想できるもとの意思

<sup>3</sup>銀行ALMモデルの研究以外に、新たな研究テーマを模索しているときに、市場リスクや信用リスクを評価する方法としてモンテカルロ・シミュレーションが使われていることを知り、勉強をしていたことが、この研究に繋がった。

決定になるため)、意思決定の柔軟さを犠牲にして、どの時点でも意思決定を同一にするモデル化を行った(行わざるを得なかった)<sup>4</sup>。「同一の意思決定」とは、すべてのパスに対して、同一のリスク資産の投資量(単位数)、投資額、もしくは投資比率で投資することを表す。

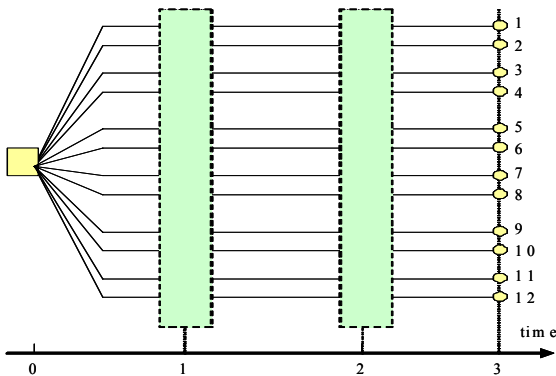


Fig. 1: Simulated path model

### 3.2.2 混合型モデル

シミュレーション型モデルにおいて、条件付き意思決定を導入するために、を応用して混合型モデル<sup>16</sup>)を開発した<sup>5</sup>。枇々木<sup>21</sup>)は様々な数値分析によってモデルの特徴を明らかにしている。混合型モデルはFig.2のように、パスを束ねた決定ノード内においては同一の意思決定を行うが、それぞれのパス群に対しては条件付き意思決定を行うモデルである。したがって、混合型モデルはシミュレーション型モデルに比べて、意思決定を柔軟に記述できるモデルとなる。

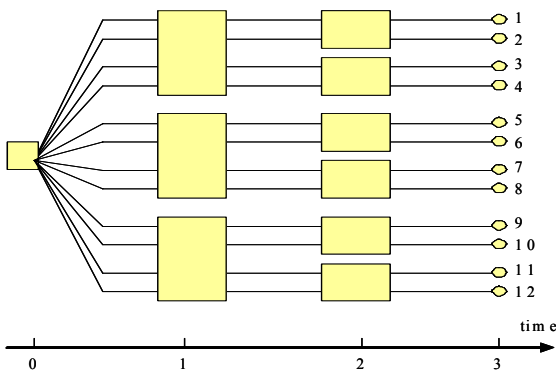


Fig. 2: Hybrid model

混合型モデルは決定ノードに含まれるパス上でのリスク資産価格をすべて同じとすると、シナリオ・ツリー

<sup>4</sup>Gaivoronski and de Lange<sup>13</sup>)はシナリオ・ツリー型モデルを用いて、不確実性の記述の正確さは意思決定の柔軟さよりも重要であることを示している。

<sup>5</sup>収益率分布を詳細に記述できるシミュレーション型モデルと条件付き意思決定ができるシナリオ・ツリー型モデルの混合モデルである。モデルにあたり、Tilley<sup>42</sup>)のアイデアが役に立った。これはモンテカルロ法によりアメリカン・オプションの価格付けを行う論文であるが、生成したパスを束に分割して計算を行う点に着目した。

型モデルと同じになる。したがって、混合型モデルはシナリオ・ツリー型モデルに比べて、不確実性を詳細に記述できるモデルとなる。Hibiki<sup>19</sup>)は混合型モデルとシナリオ・ツリー型モデルを数値分析を用いて比較した。その結果の一部として、効率的フロンティアをFig.3に示す。

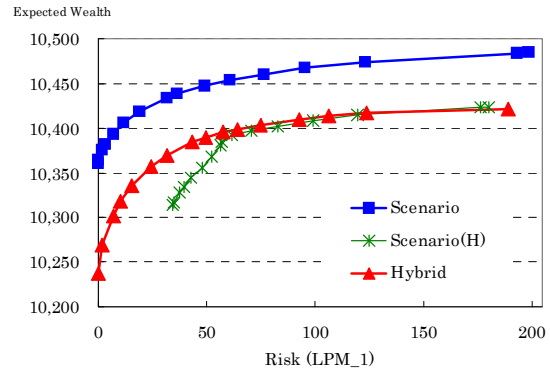


Fig. 3: Efficient frontiers for two models

紙面の都合上、詳細は省略するが、シナリオ・ツリーはシミュレーション・パスを束ねて生成している。‘Scenario(H)’はシナリオ・ツリー型モデルの最適解を用いて、シミュレーション・パス上で最終富を計算し、その期待値とリスク(1次の下方部分積率(LPM<sub>1</sub>))の曲線を描いている。このリスク・リターン曲線に比べて、シナリオ・ツリー型モデルの効率的フロンティア(‘Scenario’)は左上にシフトし、パスを束ねて問題を解くことによって過大評価されることが分かる。また、シナリオ・ツリー型モデルの最適解でシミュレーション評価したリスク・リターン曲線(‘Scenario(H)’)は低いリスク値を持つ最適解を導出することができない。このことから、混合型モデル(‘Hybrid’)はシナリオ・ツリー型モデルに比べて、リスクを適切に評価し、管理できることが分かる。

### 3.3 リスク・マネジメントにおける問題点の解決

金融リスクを評価する方法としてモンテカルロ・シミュレーションが使われるのに対し、リスクとリターンを考慮して資産配分決定を行う多期間最適化の定番は(今でも)シナリオ・ツリー型モデルである。マネジメントは、PDCA サイクルを繰り返すが、著者はリスクの評価と制御(意思決定)を行うシナリオが違っていても良いのか?という問題意識も持っていた。混合型モデルを用いることによって、リスクマネジメントにおける計画と評価を同じシミュレーション・パスを用いて行うことができる。

### 3.4 現在の研究課題

現実の世界で連続的にリバランスが行われることはなく、リバランスは離散時間で行われる<sup>6</sup>。したがって、実務で用いたい理想的な多期間最適化モデルは「収益率分布に制約がなく、実務的な制約条件を含めることができ、離散時間、連続分布で条件付き意思決定を行うことができるモデル」である。しかし、この条件を完全に満たすことができ、最適解を導くことができる多期間最適化モデルは存在しない。

混合型モデルは、決定ノードごとに条件付き意思決定はできるものの、連続分布での条件付き意思決定はできない。モデルの構造上、完全にこれに対応することはできないが、Hibiki<sup>19</sup>で提案された(投資決定を記述する)投資量関数を工夫することによって、より良い意思決定を行うことが期待される。Kawaguchi and Hibiki<sup>32</sup>では、Civitanic and Karatzas<sup>7</sup>の連続時間モデルと混合型モデルの比較を行い、投資量関数を工夫するための基礎研究を行っている。

## 4 年金 ALM モデルに関する研究

### 4.1 研究の概要

年金 ALM とは資産運用と負債特性を同時に考慮して、年金基金のリスク管理を総合的に行う手法である。現在、多くの年金 ALM では、最初は負債を考慮せずに、資産のみの情報から平均・分散モデルを用いて政策アセットミックスの候補をいくつか選択している。その候補案をコンスタント・リバランス戦略で運用するという前提で、ALM シミュレーションを行い、継続基準における年金債務(責任準備金)と対比することによって、候補案の中から最も相応しい政策アセットミックスを決定している。これはシミュレーション型年金 ALM と呼ばれる。一方、年金債務の金利変動リスクを明示的に織り込み、資産時価から負債時価を引いたサープラス(剰余金)を管理するバランスシート型年金 ALM も利用され始めている。退職給付債務(PBO)が年金債務として用いられる。しかし、いずれの方法も1期間モデルを用いて政策アセットミックスを決定し、シミュレーションを行う手法である。年金 ALM は長期にわたる資産と負債を管理する必要があり、その目的に合ったモデル化の方法として、多期間最適化モデルを利用することができる。

シナリオ・ツリー型多期間最適化モデルを用いた年金 ALM モデルの研究は数多く行われている。初期の代表

<sup>6</sup>年金基金の場合には1年ごとに政策ポートフォリオを見直す。

例と近年の各国での事例を含めて挙げると、Mulvey and Thorlacius<sup>40</sup>、Consigli and Dempster<sup>10</sup>、Donhi *et al.*<sup>12</sup>、Hilli *et al.*<sup>27</sup>、Geyer and Ziemba<sup>14</sup>、Dupačova and Polivka<sup>11</sup>、Kilianová and Pflug<sup>33</sup> 等がある。

一方、枇々木<sup>15, 16, 19, 21</sup>の多期間最適化モデルも年金 ALM モデルに応用されている。多田羅, 枇々木<sup>41</sup>は企業年金に、枇々木, 茶野<sup>24</sup>は公的年金にシミュレーション型モデルを用いて年金 ALM のモデル化を行い、数値分析を用いて有用性を示している。著者以外でも Bogentoft, *et al.*<sup>3</sup>はオランダの年金基金に対し、混合型モデルの特殊形によって、CVaR をリスク尺度に用いた ALM モデルを構築し、その有用性を示している。上崎, 山本<sup>29</sup>はシミュレーション型モデルを用いて、公的年金の ALM モデルを構築し、分析を行っている。本稿では、枇々木<sup>15, 16, 19, 21</sup>の多期間最適化モデルに年金負債(責任準備金や退職給付債務)を考慮して構築した年金 ALM モデルを議論する。

### 4.2 年金 ALM のモデル化

資産配分モデルに対し、年金 ALM モデルでは負債のキャッシュ・フローや年金 ALM 固有の制約条件を含めることが必要であるが、拡張は容易である。枇々木<sup>17</sup>の第9章で年金や保険に対する ALM モデルの基本的な定式化を示しているが、著者はこのモデルをベースとして住友生命との共同研究により、年金 ALM システムを開発した(「日経金融新聞」2002年7月5日)。また、同様に、みずほ年金研究所との共同研究により、混合型多期間モデルを用いた年金 ALM モデルを開発し、2009年度よりその運用を開始している(「年金情報」2009年9月7日号)。ここでは、桂, 桃北<sup>30, 31</sup>(みずほ年金研究所との共同研究)を参照し、年金 ALM のモデル化の方法を記述する。

#### (1) モデル化のプロセス

モデル化のプロセスを Fig.4 に示す。資産サイドとして将来金利、インフレ率、各資産の将来リターン、負債サイドのデータとして将来の掛金、給付を発生させる。負債指標である退職給付債務(PBO)や責任準備金を計算する。資産・負債の将来予測を行い、政策アセットミックスを求める。Fig.2のようなツリー構造ではなく、Fig.5のような格子構造を持つ混合型モデルを用いて最適化を行う。混合型モデルで問題を解くために、最初にシミュレーション型モデルで最適化を行い、その結果を用いてパスの束を作る(クラスタリングを行う)。

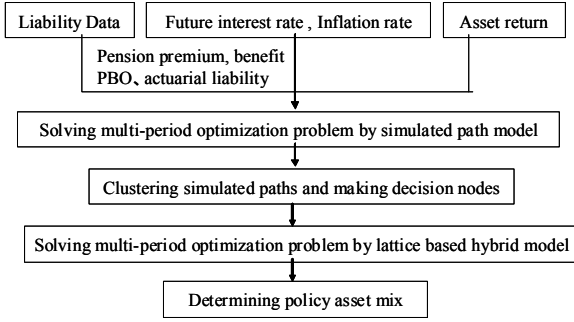


Fig. 4: Modeling Process

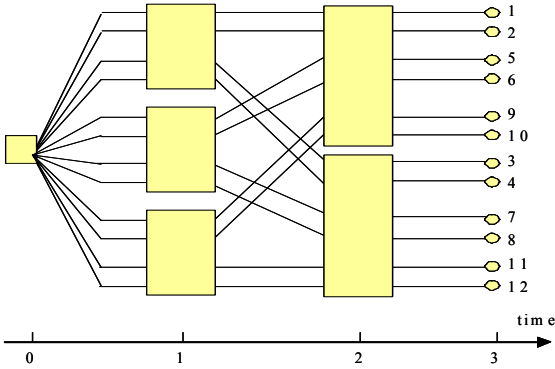


Fig. 5: Lattice based hybrid model

積み立てるべき水準(年金債務に対する不足金額の平均的な水準)に対する制約条件のもとで、目的関数として最終時点における富(資産時価)を最大にするようにモデル化する。記号および定式化を以下に示す。

## (2) 記号<sup>7</sup>

### ① 集合

$S_t$ :  $t$  時点の決定ノード  $s_t$  の集合 ( $t = 1, \dots, T-1$ )

$V_t^{s_t}$ :  $t$  時点の決定ノード  $s_t$  に含まれるパスの集合 ( $s_t \in S_t, t = 1, \dots, T-1$ )

### ② パラメータ

$n$ : リスク資産数。リスク資産の添字  $j$  の要素 ( $j = 1, \dots, n$ ) の記述は以降省略する。

$T$ : 期間数(最終時点も表す)。時点の添字  $t$  の要素が ( $t = 1, \dots, T$ ) の場合は記述を以降省略する。

$I$ : パス数。パスの添字  $i$  の要素 ( $i = 1, \dots, I$ ) の記述は以降省略する。

$\rho_{j0}$ : 0 時点のリスク資産  $j$  の価格

$\rho_{jt}^{(i)}$ :  $t$  時点のパス  $i$  のリスク資産  $j$  の価格

$r_0$ : 0 時点(期間 1) の金利

$r_{t-1}^{(i)}$ :  $t-1$  時点(期間  $t$ ) のパス  $i$  の金利 ( $t = 2, \dots, T$ )

<sup>7</sup>Fig.5の場合、 $T = 3, I = 12, S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{1, 2\}$  である。

$L_t^{(i)}$ :  $t$  時点のパス  $i$  で積み立てておくべき負債金額 (PBO, 責任準備金)

$D_t^{+(i)}$ :  $t$  時点のパス  $i$  に積み立てられる予定の掛金

$D_t^{-(i)}$ :  $t$  時点のパス  $i$  に支払われる予定の給付金

$U$ : 1 次の下方部分積率の加重平均 ( $LPM_1$ ) の上限

$k$ : 負債指標に乗ずる係数

$\omega_t$ :  $t$  時点のリスク加重調整係数

### ③ 決定変数

$z_{j0}$ : 0 時点のリスク資産  $j$  への投資量(単位数)

$z_{jt}^{s_t}$ :  $t$  時点の決定ノード  $s_t$  のリスク資産  $j$  への投資量(単位数) ( $s \in S_t, t = 1, \dots, T-1$ )

$v_0$ : 0 時点の現金(無リスク資産)

$v_t^{(i)}$ :  $t$  時点、パス  $i$  の現金(無リスク資産) ( $t = 1, \dots, T-1$ )

$q_t^{(i)}$ : パス  $i$  の富  $W_t^{(i)}$  の  $k \cdot L_t$  を下回る部分

### (3) 定式化

$$\text{最大化} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \quad (1)$$

#### 制約条件

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j1} z_{j0} + v_0 = W_0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1 + r_0)v_0 + D_1^{+(i)} - D_1^{-(i)} \\ & = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j1}^{s_1} + v_1^{(i)} \quad (s_1 \in S_1; i \in V_1^{s_1}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1}^{s_{t-1}} + \left(1 + r_{t-1}^{(i)}\right) v_{t-1}^{(i)} + D_t^{+(i)} - D_t^{-(i)} \\ & = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt}^{s_t} + v_t^{(i)} \\ & \quad (s_t \in S_t; i \in V_t^{s_t}; t = 2, \dots, T-1) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} W_{1,T}^{(i)} & = \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1}^{s_{T-1}} + \left(1 + r_{T-1}^{(i)}\right) v_{T-1}^{(i)} \\ & \quad + D_T^{+(i)} - D_T^{-(i)} \end{aligned} \quad (5)$$

$$W_t^{(i)} + q_t^{(i)} \geq k \cdot L_t \quad (6)$$

$$\sum_{t=1}^T \omega_t \left( \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q_t^{(i)} \right) \leq U \quad (7)$$

$$z_{j0} \geq 0; z_{jt}^{s_t} \geq 0 \quad (s_t \in S_t; t = 1, \dots, T-1) \quad (8)$$

$$v_0 \geq 0; v_t^{(i)} \geq 0 \quad (t = 1, \dots, T-1) \quad (9)$$

$$q_t^{(i)} \geq 0 \quad (10)$$

(3)式の値は  $W_1^{(i)}$ 、(4)式の値は  $W_t^{(i)}$ 、(7)式の値は

$LPM_1$  を表す。詳しい数値分析については桂, 桃北<sup>30, 31)</sup>を参照されたい。

ところで、掛金を保険料収入、給付金を保険金支出と考えれば、保険ALMモデルの基本形にもなる。5章の家計の資産形成モデルにおいては、逆に保険金の受け取りがキャッシュ・イン・フロー、保険料の支払いがキャッシュ・アウト・フローになる。また、掛金  $D_t^{+(i)}$ 、給付金  $D_t^{-(i)}$  の部分を取り除くと、資産配分問題として記述することができる。ただし、追加型の投資信託において入金と解約金が発生する場合には、このままでも投資信託に対する資産運用モデルの基本形になる。このように、多期間最適化モデルの基本形を記述できれば、様々なタイプの問題に応用可能である。

## 5 家計の資産形成モデル

世帯は家族構成、収入・支出、資産・負債や住宅購入、子供の教育、退職後の生計などの将来に対する希望や目標、家計に与える様々なリスクを考慮して、長期間にわたる投資や保険などの戦略を決定する必要がある。個人の最適な投資戦略は学術的にも古くから研究が進められており、近年では Campbell<sup>5)</sup>も家計のファイナンスの重要性を述べている。Chen *et al.*<sup>6)</sup>は資産配分に加えて、賃金収入、消費支出、生命保険を含む1期間最適化モデルを提唱している。それに対し、枇々木, 小守林, 豊田<sup>26)</sup>, 枇々木, 小守林<sup>25)</sup>, Hibiki<sup>21)</sup>, 枇々木<sup>23)</sup>は3章で説明したシミュレーション型多期間最適化モデルによって、家計の資産形成モデルを提案している<sup>8)</sup>。

モデルに組み込むべき特徴は以下の通りである。

- ① 共働きか否か、住宅購入の有無、子供の数、教育投資など、家計に与える要因が多岐にわたり、世帯の個性が強いため、柔軟なモデル化を行う。
  - ② 世帯主(人的資産)が家計に与える影響が大きく、特に労働者が世帯主だけの場合、万が一のために生命保険で収入リスクをヘッジする。
  - ③ 賃金収入や消費支出などのキャッシュ・フローを考慮し、長期計画問題として明示的にモデル化する。
- 本稿では枇々木<sup>23)</sup>のモデルの概要を簡単に説明する。

<sup>8</sup>資産配分決定を行う個人投資家向けALMモデル(シナリオツリー型多期間最適化モデル)として、Berger and Mulvey<sup>2)</sup>, Consiglio *et al.*<sup>8, 9)</sup>, Hocht *et al.*<sup>27)</sup>, Medova *et al.*<sup>39)</sup>, Kotlikoff<sup>36)</sup>がある。保険を含めるためにはシミュレーション型多期間最適化を利用する方が適している。その理由は保険に関連する死亡率や火災発生率などは発生確率が低く、サンプルパスで記述するためには多くのパスを必要とするからである。

## 5.1 モデルの設定

世帯主のみが働き、配偶者は専業主婦とする。世帯主の死亡事故、世帯主の重大な疾病、住宅の火災事故という3つのリスクが存在し、世帯の収入や支出の構造はこれらのリスクの発生によって影響を受ける。各時点で発生する可処分所得、退職金、遺族年金、生活支出などのキャッシュ・フローを所与とし、 $t_e$  時点で住宅を購入すると仮定する。また、退職後に必要な資金の不足が心配である一方で、できるだけ資金も増やしたいと考える。そこで、退職時点(計画最終時点)の最終富のCVaRをリスク尺度、最終富の期待値をリターン尺度としてモデル化を行う。具体的には、最終富のCVaRの下制限約<sup>9)</sup>のもとで、期待最終富を最大化するように、以下に示す最適な資産配分と保険購入・解約を決めるモデルを構築する。概要をFig.6に示す。

- 0時点で資産配分を行い、1時点以降も  $T-1$  時点まで毎時点リバランスを行う。
- 0時点で  $T$  期間満期の生命保険を購入し、住宅購入時点で一部もしくは全部を解約できる。
- 0時点で  $T$  期間満期の医療保険を購入する。
- 1期間満期の火災保険を0時点から  $T-1$  時点まで毎時点購入する。

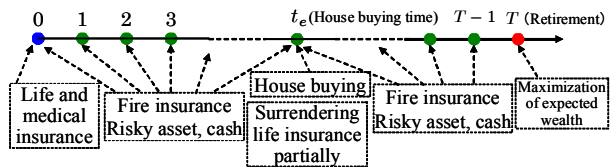


Fig. 6: Modeling structure

## 5.2 数値分析

世帯主が30歳で、60歳で定年となる仮想の世帯を設定する。無リスク資産と1つのリスク資産にのみ投資すると仮定する。紙面の都合上、詳細な設定の説明は省略する。以下に分析結果を示す。

### (1) リスク資産

Fig.7にリスク資産の最適投資比率を示す。CVaRの値が大きくなる(リスクが小さくなる)につれて、投資比率の値も小さくなる。住宅を購入する際に支払う頭金を確保するために、10時点まで現金比率を高めている(リスク資産比率を下げる)。住宅を購入すると、頭金を現金で支払うことによって相対的にリスク資産の

<sup>9</sup>下限値を退職後に必要な資金とすると、たとえば  $\beta = 0.8$  の場合、下位20%の確率で生じる最終富の条件付き期待値を退職後に必要な資金以上にするという制約になる。

比率が上昇する。それ以降は、定年時に安定的な富を築くために、リスクを考慮しない最終期待富最大化を除き、徐々にリスク資産比率は減少する。

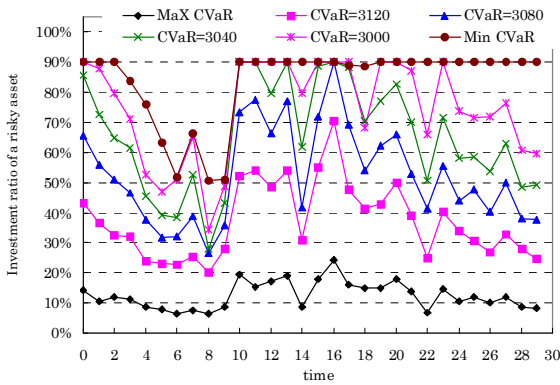


Fig. 7: Investment ratios of a risky asset

## (2) 生命保険

生命保険として、無解約返戻金型の平準定期保険、逓減定期保険、収入保障保険の3種類を対象とする。

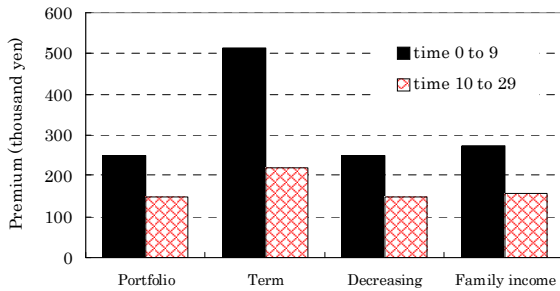


Fig. 8: Premium of life insurance

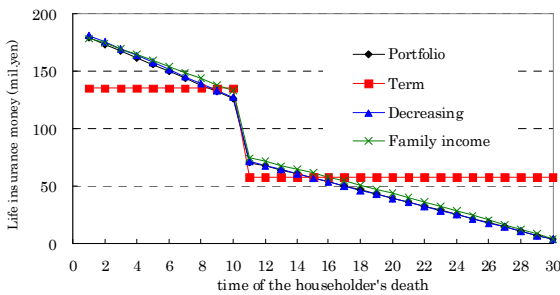


Fig. 9: Life insurance money

CVaR最大化問題を解いたときの生命保険の平準保険料をFig.8に、保険金額をFig.9に示す。平準定期保険(Term insurance)に比べて、逓減定期保険(Decreasing term insurance)または収入保障保険(Family income insurance)を購入する場合には、平準保険料も約半分になる<sup>10</sup>。保険の種類にかかわらず、住宅購入により保険を一部解約することが最適解となる。

<sup>10</sup>紙面の都合上省略しているが、効率的フロンティアも改善する。

## (3) 賃金と株式の相関の考慮

資産運用の対象とする株式と勤務する企業の業績は相関を持つと仮定する。

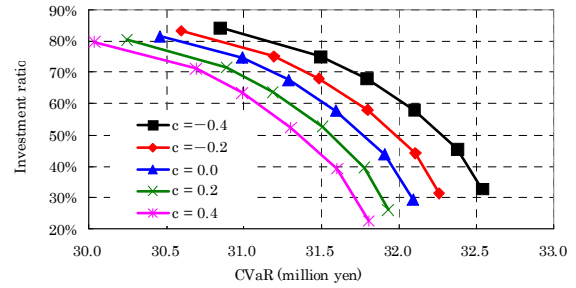


Fig. 10: Investment ratios for various correlation

賃金の変動と株式収益率の相関係数が異なる場合の各時点の投資比率の平均とCVaRの関係をFig.10に示す。相関係数が大きくなるにつれて賃金と株式の分散効果が小さくなるため、同じリスクの値を得るには、投資比率を低くする必要があることを表している。これはChen *et al.*<sup>6)</sup> と統合的な結果である。

## 5.3 今後の研究課題

退職時点以降の老後の計画(リタイアメント・プランニング)のモデル化、共働き世帯も含めた対象世帯の多様化、期間の集約モデルの構築による計算時間の短縮に関して研究を行う予定である。また、最近では、行動ファイナンスでの研究成果を踏まえて、個人が合理的に(自動的に)行動するための商品開発も必要であることが言われている。ライフサイクルファンドはその一例であり、本研究成果もその設計に使うことができる。

## 6 おわりに

本稿では多期間最適化モデルに関する研究を中心に、その適用事例に対するモデル化や分析結果も含めて説明した。ポートフォリオ最適化は資産運用やALMに利用され、金融工学の重要な研究分野の一つである。コンピュータの計算速度や最適化の計算技術が今後進展するにつれて、実務に必要な大規模で複雑な最適化モデルも解けるようになると期待される。

## 参考文献

- 1) Barberis, N., Investing for the Long Run when Returns Are Predictable, *Journal of Finance*, **55**-1, 225/264 (2000)
- 2) Berger, A.J. and J.M. Mulvey, The Home Account Advisor, Asset and Liability Management for Individual Investors, In: Ziemba and Mulvey<sup>44)</sup>, 634/665 (1998)
- 3) Bogentoft, E., H. Romeijn and S. Uryasev, Asset/Liability Management for Pension Funds Using CVaR Constraints, *The Journal of Risk Finance*, **3**-1, 57/71 (2001)

- 4) Brandt, M.W., A. Goyal, P. Santa-Clara and J.R. Stroud, A Simulation Approach to Dynamic Portfolio Choice with an Application to Learning About Return Predictability, *Review of Financial Studies*, **18**-3, 831/873 (2005)
- 5) Campbell, J.Y., Household Finance, *The Journal of Finance*, **61**-4, 1553/1604 (2006)
- 6) Chen, P., R.G. Ibbotson, M. Milevsky, and X. Zhu, Human Capital, Asset Allocation, and Life Insurance, *Financial Analysts Journal*, **62**-1, 97/109 (2006)
- 7) Civitanic, J. and I. Karatzas, On Dynamic Measures of Risk, *Finance and Stochastics*, **3**-4, 451/482 (1999)
- 8) Consiglio, A., F. Cocco and S.A. Zenios, www.Personal.Asset\_Allocation, *Interfaces*, **34**-4, 287/302 (2004)
- 9) Consiglio, A., F. Cocco and S.A. Zenios, Scenario Optimization Asset and Liability Modelling for Individual Investors, *Annals of Operations Research*, **152**, 167/191 (2007)
- 10) Consigli, G. and M.A.H. Dempster : Dynamic Stochastic Programming for Asset-liability Management, *Annals of Operations Research*, **81** , 131/161 (1998)
- 11) Dupačova, J. and J. Polivka : Asset-liability Management for Czech Pension Funds Using Stochastic Programming, *Annals of Operations Research*, **165**, 5/28 (2009)
- 12) Donhi, G., F. Herzog, L.M. Schumann and H.P. Geering, Dynamic Asset and Liability Management for Swiss Pension Funds, In: Ziemba and Ziemba<sup>46)</sup>, 963/1028, (2007)
- 13) Gaivoronski, A.A. and P.E. de Lange, An Asset Liability Management Model for Casualty Insurers: Complexity Reduction vs. Parametrized Decision Rules. *Annals of Operations Research*, **99**, 227/250 (2000)
- 14) Geyer, A. and W.T. Ziemba, The Innovest Austrian Pension Fund Financial Planning Model InnoALM, *Operations Research*, **56**-4, 797/810 (2008)
- 15) 枇々木規雄 : 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **44**-2, 169/193 (2001)
- 16) 枇々木規雄, 最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル, 高橋一編, ジャーナル・ジャーナル[2001] 金融工学の新展開, 89/119 (2001)
- 17) 枇々木規雄, 金融工学と最適化, 朝倉書店, (2001)
- 18) 枇々木規雄, 年金 ALM のための多期間ポートフォリオ最適化モデル, みずほ年金レポート, **55**, 36/48 (2004)
- 19) Hibiki, N., Multi-period Stochastic Optimization Models for Dynamic Asset Allocation, *Journal of Banking and Finance*, **30**-2, 365/390 (2006)
- 20) 枇々木規雄, 多期間最適資産配分モデル (小暮厚之 編著, リスクの科学—金融と保険のモデル分析, 第1章), 1/31, 朝倉書店, (2007)
- 21) Hibiki, N., Multi-period Optimization Model for a Household, and Optimal Insurance Design, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **50**-4, 463/487 (2007)
- 22) 枇々木規雄, 線形価格インパクト関数を用いた最適執行戦略, *Transactions of the Operations Research Society of Japan*, **50**, 100/122 (2007)
- 23) 枇々木規雄, 家計のファイナンシャル・プランニングのための多期間最適化モデル, ファイナンシャル・プランニング研究, **8**, 32/42 (2008)
- 24) 枇々木規雄, 茶野努: 公的年金への多期間最適化モデルの適用, 慶應義塾大学理工学部管理工学科 テクニカルレポート, 02-002 (2002).
- 25) 枇々木規雄, 小守林克哉, 多期間最適資産形成モデル — 実践的なモデルへの拡張 —, 日本保険・年金リスク学会誌, **2**-1, 3/31 (2006)
- 26) 枇々木規雄, 小守林克哉, 豊田暢子, 多期間最適化手法を用いた世帯の資産形成モデル, 日本保険・年金リスク学会誌, **1**-1, 45/68 (2005)
- 27) Hilli, P., M. Koivu , T. Pennanen, and A. Ranne : A Stochastic Programming Model for Asset Liability Management of a Finnish Pension Company, *Annals of Operations Research*, **152**, 115/139 (2007)
- 28) Höcht, S., N.K. Hwa, C.G. Rösch and R. Zagst, Asset Liability Management in Financial Planning, *The Journal of Wealth Management*, **11**-2, 29/46 (2008)
- 29) 上崎勝巳, 山本零, 公的年金運用における基本ポートフォリオ策定プロセスの再考について — 多期間最適化モデルの活用 —, 証券アナリストジャーナル, **47**-8, 65/77(2009)
- 30) 桂眞一, 桃北憲, 数理計画法による年金 ALM 多期間最適化モデル, みずほ年金レポート, 76, 60/79 (2007)
- 31) 桂眞一, 桃北憲, 多期間最適化モデルによる年金 ALM, みずほ年金レポート, 84, 54/69 (2009)
- 32) Kawaguchi, M. and N. Hibiki, Dynamic Asset and Liability Management Models for Pension Systems – The Comparison between Multi-period Stochastic Programming Model and Stochastic Control Model –, *The 13th Annual Conference of The Asia-Pacific Risk and Insurance Association* (2009), Beijing
- 33) Kilianová, S. and G.C. Pflug, Optimal Pension Fund Management under Multi-period Risk Minimization, *Annals of Operations Research*, **166**, 261/270 (2009)
- 34) Kim, T. and E. Omberg, Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior, *Review of Financial Studies*, **9**-1, 141/161 (1996)
- 35) Konno, H. and K. Suzuki: A Fast Algorithm for Solving Large Scale Mean Variance Models by Compact Factorization of Covariance Matrices, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **35**, 93/104 (1992)
- 36) Kotlikoff, L.J., Economics' Approach to Financial Planning, *Journal of Financial Planning*, **21**-3, 42/52 (2008)
- 37) Liu, J., Portfolio Selection in Stochastic Environments, *Review of Financial Studies*, **20**-1, 1/39 (2007)
- 38) Longstaff, F.A. and E.S. Schwartz, Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach, *Finance and Stochastics*, **14**-1, 113/147 (2001)
- 39) Medova, E.A., J.K. Murphy, A.P. Owen and K. Rehman, Individual Asset Liability Management, *Quantitative Finance*, **8**-6, 547/560 (2008)
- 40) Mulvey, J.M. and A.E. Thorlacius, The Towers Perrin Global Capital Market Scenario Generation System, In: Ziemba and Mulvey<sup>44)</sup>, 286/312 (1998)
- 41) 多田羅智之, 枇々木規雄, 多期間確率計画モデルの年金 ALM への適用, 日本金融・証券計量・工学学会 2001 年夏季大会予稿集, 350/366 (2001)
- 42) Tilley, J., Valuing American Options in a Path Simulation Model, *Transactions of the Society of Actuaries*, **45**, 83/104 (1993)
- 43) 山本零, ポートフォリオ最適化, 三菱 UFJ トラスト投資工学研究所, 創立 20 周年記念論文集「フィナンシャル・テクノロジーの過去・現在・未来」, 153/192 (2008)
- 44) Ziemba, W.T. and J.M. Mulvey, Worldwide Asset and Liability Modeling, Cambridge University Press, (1998)
- 45) Zenios, S.A. and W.T. Ziemba, Handbook of Asset and Liability Management, Volume 1: Theory and Methodology, North-Holland, (2006)
- 46) Zenios, S.A. and W.T. Ziemba, Handbook of Asset and Liability Management, Volume 2: Applications and Case Studies, North-Holland, (2007)