多期間最適化によるアセットアロケーション

慶應義塾大学　理工学部管理工学科　枇々木　規雄
(E-mail：hibiki@ae.keio.ac.jp)

みずほ年金レポート 2012年 3/4月号

枇々木　規雄（ひびき　のりお）1994年慶應義塾大学大学院理工学研究科管理工学専攻博士課程修了、1992年慶應義塾大学理工学部助手、1997年同専任講師、2002年同助教授、2009年同教授、現在に至る。著書に『金融工学と最適化』(朝倉書店, 2001年)、『金融工学入門』(共訳、日本経済新聞社, 2002年)、『ポートフォリオ最適化と数理計画法』(共著、朝倉書店, 2005年)がある。

目次

概要

多期間 (動的) 最適資産配分問題は数理ファイナンス、金融経済学、金融工学、オペレーションズ・リサーチなど様々な分野で研究が活発に行われている。本稿では、はじめに、これらのアプローチを簡単に紹介する。具体的には解析解が求められている2つのケース、モンテカルロ回帰、多期間確率計画モデル (シナリオ・ツリー型モデル、混合型モデル) について説明する。これらを参照しながら、実際の資産運用で利用するためのモデル化について議論する。モンテカルロ・シミュレーションで柔軟なシナリオ (収益率分布) を生成し、実務的な制約を含めることが容易な混合型モデルの概要を説明するとともに、筆者らの最近の研究成果として、インプライド分布を用いたモデル、解析解の特徴を考慮したモデル化とモデルの比較分析についても紹介する。

1　はじめに

最適資産配分 (アセット・アロケーション) 問題において、理論的にも実務的にも使われている代表的なモデルは平均・分散モデルである。しかし、平均・分散モデルは1期間モデルであり、年金基金や保険会社のように、長期間におけるリバランスを前提とした資産運用に

対応するためには多期間(動的)最適化モデルが適している[1]。また、年金や保険のALMに対応するためには負債を考慮する(キャッシュ・フローを含む)モデル化も必要である。

このような多期間(動的)最適化問題に対するアプローチ(解法)は様々な分野で研究が活発に行われている。大きく2つの分野に分けて紹介する。

数理ファイナンスや金融経済学の分野では、連続時間・連続分布でモデルを記述し、ベルマン方程式やマルチンゲール法によって解析解や数値解(近似解)の導出を行う。Kim and Omberg[28], Cvitanić and Karatzas[6] など解析解が得られるケースは限定されている。近年、モンテカルロ(MC)法による数値解法が提案されている[2]。Detemple, Garcia and Rindisbacher[8]は、MCMD(MCマリアバン微分)、MCC(MC共変動)、MCR(MC回帰)、MCFD(MC有限差分)の4種類のモンテカルロ法を比較している。現実的な問題に対しては数値解を計算する方法が有力であるが、それでも実務的な制約を加えると最適解の導出が難しくなるという問題点がある。

一方、金融工学やオペレーションズ・リサーチの分野では、離散時間・離散分布でモデルを記述し、数理計画法によって数値解を計算する。定番モデルはシナリオ・ツリー型モデルであり、これまでに様々な研究成果が発表されている(Ziemba and Mulvey[43], Zenios and Ziemba[39, 40])。数理計画モデルでは実務的な制約を加えることは容易である。しかし、シナリオ・ツリー型モデルの場合、収益率分布を記述するツリー構造が指数的に増加することにより計算負荷が大きくなり、うまくシナリオ・ツリーを記述しないと実際に問題を解くことが難しくなる。それに対し、モンテカルロ法によって生成したシミュレーション・パスで柔軟なシナリオ(収益率分布)を記述し、問題を解く数理計画モデルとして、シミュレーション型モデル(枇々木[13])、さらに条件付き意思決定を可能にした混合型モデル(枇々木[14])が提案されている。

本稿ではこれらのアプローチを簡単に紹介し、実際の資産運用で利用するためのモデル化について議論する。筆者が提案している混合型モデルの概要を説明するとともに、最近の研究成果であるインプライド分布を用いたモデル(木村・枇々木[29])、解析解の特徴を考慮したモデル化とモデルの比較分析(高屋・枇々木[36])についても紹介する。

本論文の構成は以下の通りである。2章では多期間(動的)資産配分問題に対する4種類のモデルを示す。3章では実際の資産運用で利用するためのモデル化について議論する。4章では混合型モデルを用いた資産配分問題に関する研究について、筆者らの最近の研究成果も含めて紹介する。最後に5章でまとめを行う。

2 多期間(動的)最適資産配分モデル

連続時間モデル(解析解)、モンテカルロ回帰、シナリオ・ツリー型モデル、混合型モデルの4種類のモデルを紹介する。

2.1 連続時間モデル

連続時間モデルの枠組みで、1つのリスク資産と無リスク資産に投資するポートフォリオ最適化問題に対して解析解が得られている2つのモデルを説明する。

2.1.1 期待効用最大化モデル

リスク資産価格が幾何ブラウン運動(一般化ウィナー過程)に従い、リスクの市場価格(状態価格)は平均回帰すると仮定したモデルで、CRRA型のべき型効用関数((1)式)を用

[1]「動的(dynamic)」は連続時間・離散時間を問わず使われるのに対し、「多期間(multi-period)」は通常、離散時間モデルにのみ使われる。

[2]数値計算上は離散時間・離散分布でモデルを記述する。

いて期待効用を最大化するモデルが Kim and Omberg[28] によって提唱されている。

$$U(W_T) = \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{1}$$

ここで、W_T は最終時点 T の富、γ は相対的リスク回避係数を表す。

リスク資産への投資比率 $\pi(t)$ は状態価格 $X(t)$ の1次関数 ((2) 式) として解析解が得られている。

$$\pi(t) = a_t X(t) + b_t \tag{2}$$

ボラティリティを一定とすると、リスク資産の投資比率は期待収益率の1次関数となる。$T = 3$ の場合のあるパラメータの組み合わせに対するリスク資産比率を図1に示す。

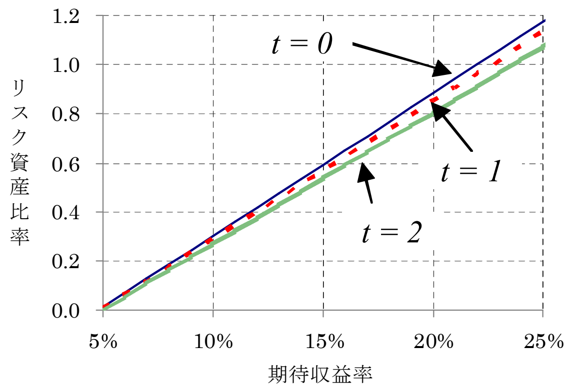

図 1: リスク資産比率 (期待効用最大化)

2.1.2　下方リスクの最小化モデル

年金運用においては運用収益率が予定利率を下回ることを回避したい。それを表す下方リスク尺度の一つとして下方部分積率 (LPM) がある。リスク資産価格が幾何ブラウン運動に従うという仮定の下で、目標富 W_G に対する最終富 W_T の1次の下方部分積率 (LPM_1 : (3) 式) を最小化するモデルが Cvitanić and Karatzas[6] によって提唱されている。

$$\mathrm{LPM}_1 = \mathrm{E}\left[|W_T - W_G|^-\right] \tag{3}$$

ここで、$\mathrm{E}[x]$ は x の期待値を表す。また、$|a|^- = \max(-a, 0)$ である。リスク資産の投資比率 $\pi(t)$ は t 時点の積立比率 (富を目標富の割引価値で除した値) $Y(t)$ の関数として解析解が得られている。

$$\pi(t) = f(Y(t)) \tag{4}$$

$T = 3$ の場合のあるパラメータの組み合わせに対するリスク資産比率を図2に示す。

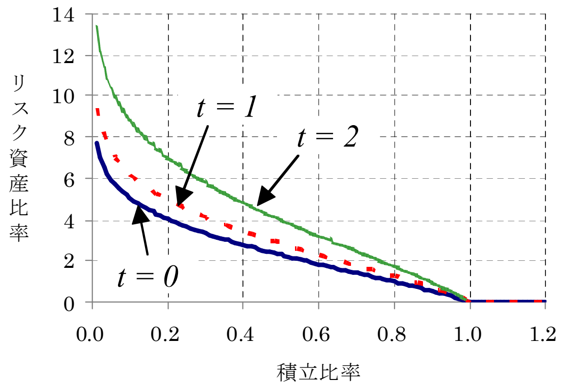

図 2: リスク資産比率 (LPM_1)

この図から以下のことが分かる。

- t 時点での積立比率が1を上回っていれば、t 時点以降は無リスク資産への投資だけで目標富を上回ることができるので、リスク資産へは投資しない。
- 積立比率が1未満になるとリスクを取って目標富を達成しようとする。積立比率が小さいときに投資比率が1を大きく上回る投資戦略が最適解として得られる。また、満期に近づくほど投資比率は大きくなる。

2.2　モンテカルロ回帰

連続時間モデルに対するベルマン方程式を解く方法として、最小二乗モンテカルロ法を用いて数値解を求める手法 (近似解法) が Brandt *et al.*[3] によって提案されている。テイラー展開[3] によって価値関数を投資比率の4次関数で近似したときに、投資比率の係数部分に現れる条件付き期待値を最小二乗法 (回帰分析) を用いて推定し、4次関数の最大化問題を解いて最適投資比率をバックワードに求めていく方

[3] Brandt *et al.*[3] は金利周りで、梅内 [37] は近視眼的ポートフォリオの収益率周りで、4次までテイラー展開している。

法である。t 時点での価値関数 V_t を簡単に説明すると、期待効用を最大にするように t 時点以降の最適投資 $\pi_s(s=t,t+1,\ldots,T-1)$ を行った結果得られる t 時点での効用の条件付き期待値である。したがって、$t+1$ 時点の価値関数の t 時点における期待値を最大にする最適投資 π_t を行った結果得られる期待効用とも同じになる。ベルマン方程式を解く考え方を使って、バックワードに問題を解いていく。

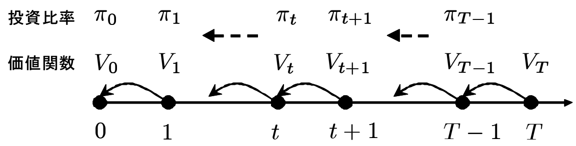

図 3: バックワードで解く考え方

モンテカルロ回帰は、「回帰分析で条件付き期待値を計算する」「4次関数の最大化問題を解いて最適投資比率を求める」ことをバックワードに繰り返す。簡単のため、効用関数は (1) 式、回帰分析をするときに用いる基底関数は状態変数の一次式という設定の下で、図4を用いて具体的な計算手順を図解する。

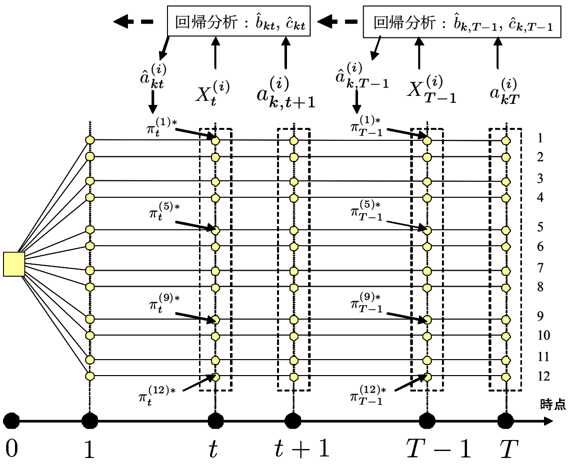

図 4: 計算手順の図解

図4の t 時点と $t+1$ 時点において、期間 $t+1$ のリスク資産の収益率と $t+1$ 時点の価値関数から計算される I 個 $(i=1,\ldots,I$ で図4の場合は $I=12)$ の $a^{(i)}_{k,t+1}$ と状態変数 $X^{(i)}_t$ を用いて、(5) 式で回帰分析を k ごとに行う $(k=1,2,3,4)$ [4]。

$$a^{(i)}_{k,t+1} = b_{kt}X^{(i)}_t + c_{kt} + \varepsilon^{(i)}_{kt} \ (i=1,\ldots,I) \quad (5)$$

ここで、k は投資比率の4次関数のべき乗の指数に相当する記号である。$\varepsilon^{(i)}_{kt}$ は誤差項を表す。(5) 式で計算された推定値 $\hat{b}_{kt}, \hat{c}_{kt}$ を用いて (6) 式で計算される $\hat{a}^{(i)}_{kt}$ をパス i における条件付き期待値とする。

$$\hat{a}^{(i)}_{kt} = \hat{b}_{kt}X^{(i)}_t + \hat{c}_{kt} \ (i=1,\ldots,I) \quad (6)$$

そして、投資比率の4次関数[5]である $\sum_{k=1}^{4} \hat{a}^{(i)}_{kt}(\pi^{(i)}_t)^k$ を最大にする $\pi^{(i)}_t$ をパスごとに求める。このことを各時点でバックワードに繰り返す。

2.3 シナリオ・ツリー型モデル

シナリオ・ツリー型モデルは多期間最適化に対する数理計画アプローチの定番モデルである。図5(左) のようにシナリオ・ツリーによって収益率分布を離散的に記述し、各ノード (状態) において条件付き意思決定を行う。図5(左) は3期間問題の例で、1時点は3つのノード、2時点は6つのノードがあり、それぞれのノードごとに各資産の価格と投資を表す決定変数が割り当てられて、モデルが記述される (詳しくは枇々木 [15] 第7章を参照)。

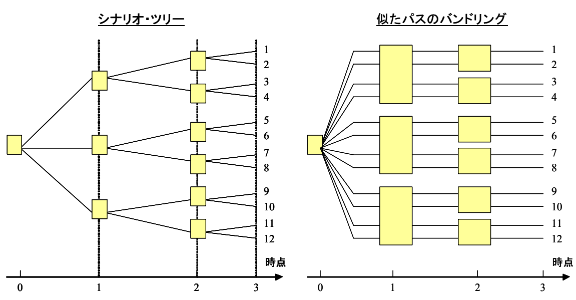

図 5: シナリオ・ツリーとシミュレーション・パス

シナリオ・ツリー型モデルを用いた研究は数多く行われており、年金ALMにも適用されている。初期の代表例としては、Mulvey and Thorlacius[31], Consigli and Dempster[7] が

[4]リスク資産の収益率や状態変数はモンテカルロ・シミュレーションで生成される。

[5]価値関数をテーラー展開した4次関数から定数を除いている。

ある。近年では各国の年金基金を対象としてモデル化がされている。Donhi *et al.*[10](スイス), Hilli *et al.*[20](フィンランド), Geyer and Ziemba[11](オーストリア), Dupačova and Polivka[9](チェコ), Kilianová and Pflug[27](スロバキア), Klein Haneveld *et al.*[30](オランダ) 等がある。

一方、モデル構築にとって重要なシナリオ・ツリーの生成方法も近年、提案されている。前述の研究に必ずしも使われているわけではないが、いくつか紹介する。Høyland and Wallace[21] はシナリオ・ツリーから生成される収益率の統計量をもとの分布の統計量に合わせる (モーメント・マッチングをする) ために、収益率と発生確率を両方とも決定変数とする非凸非線形計画問題として定式化している。Ji *et al.*[22] は収益率をパラメータとして設定し、発生確率のみを決定変数とする線形計画問題として定式化している。Gülpinar, Rustem and Settergren[12] は、① モンテカルロ・シミュレーションとクラスタリング法の組み合わせ、② 発生確率を決定変数として 1〜4 次モーメントと共分散をマッチングする非線形計画問題、③ これらの 2 つを組み合わせて簡単化した混合アプローチ、の 3 種類の方法を提案している。Pranevicius and Sutiene[33] は修正 K-means クラスタリング法を用いてシミュレーションパスをバンドリングしてシナリオ・ツリーを生成するとともに統計量の平均と分散のモーメント・マッチングもしている。

シナリオ・ツリー生成に必要な手法をまとめると、① シミュレーション、② クラスタリング手法、③ モーメント・マッチング、の 3 つであり、これらの手法が組み合わされている。図 5(右) のようにパスをバンドリング (クラスタリング) して、図 5(左) のようなシナリオ・ツリーを生成するイメージである。

2.4 混合型モデル

混合型モデル (枇々木 [14]) は図 5(右) のように、モンテカルロ・シミュレーションで生成した将来の資産収益率などを用いつつ、パスを束ねた決定ノード (パス群) に対して条件付き意思決定を行うモデルである[6]。シミュレーション型モデル (枇々木 [13]) はすべてのパスを 1 つに束ねたと考えるモデルに相当するので、ここでは区別せずに議論する。これらのモデルは、非予想条件を満たすためにパス群に対して同一の意思決定 (同一の投資ルール) で投資する[7]。図 5(右) に示す決定ツリーの例の場合、各資産の価格は各時点でパス数と同じ 12 個が設定されるが、同一の意思決定 (投資) を表す決定変数は 1 時点は 3 つのノード、2 時点は 6 つのノードに割り当てられる。

シミュレーション型モデルや混合型モデルの特徴を調べるために様々な数値分析が行われている。枇々木 [16] はシミュレーション型モデルを対して、サンプリング・エラーの評価、時系列相関を考慮したモデルの提案、1 期間ロール・オーバーモデルとの比較を行っている。また、Hibiki[17], 枇々木 [19] は混合型モデルの特徴を明らかにするために、決定ツリーの生成方法の比較、パス数やツリー構造の違いによる比較、サンプリング・エラーの評価、投資量関数の比較などを行っている。

Hibiki[18] は混合型モデルとシナリオ・ツリー型モデルを比較している[8]。その結果の一部と

[6] シナリオ・ツリー生成法とは異なるが、図が似ているので、図 5(右) を使って説明する。

[7] 枇々木 [13] はシミュレーション型モデルを定式化する際に投資量を同一の意思決定としていた。それに対して、枇々木 [16] は『「同一の意思決定」とは必ずしも投資量が同じ値である必要はなく、投資ルールが決まっていれば、非予想条件を満たすことができる』と考えて、その定式化をより一般化する方法として、投資量関数を提案している。混合型モデルにおいても、ある一つの決定ノードを通るパスに関しては同一の意思決定をするので、そのまま適用できる。投資量関数の詳細は 4.1.2 項で説明する。

[8] 2.3 節で紹介した方法とは異なるが、シナリオ・ツリーの生成に必要な 3 つの手法を用いている。また、混合型モデルは決定ノードに含まれるパス上でのリスク資産価格をすべて同じ値に設定すると、シナリオ・ツリー

型モデルと同じになる。

して、効率的フロンティアを図 6に示す。

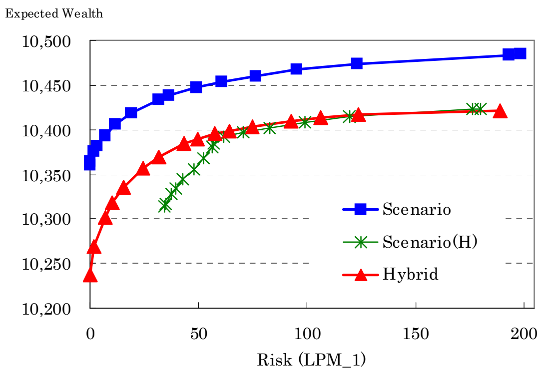

図 6: 効率的フロンティア

'Scenario(H)' はシナリオ・ツリー型モデルの最適解を用いて、シミュレーション・パス上で最終富を計算し、その期待値とリスク (LPM_1) を描いた曲線である。このリスク・リターン曲線に比べて、シナリオ・ツリー型モデルの効率的フロンティア ('Scenario') は左上に位置しており、シナリオ・ツリーで問題を解くことによって過大評価されることが分かる。また、混合型モデル ('Hybrid') とは違い、'Scenario(H)' のリスク・リターン曲線は低いリスク値を持つ最適解を導出することができない。このことから、混合型モデル ('Hybrid') はシナリオ・ツリー型モデルに比べて、リスクを適切に評価し、管理できることが分かる。

混合型モデルの定式化やその他の研究等については4章で紹介する。

3　実際の資産運用のためのモデル化

2章において紹介した様々なモデルを参照しながら、実際の資産運用において多期間最適化モデルを用いる場合に考慮する要素を示し、モデル化との関連を議論する。

3.1　投資決定時点

2章で連続時間モデルと離散時間モデルに分けて、4つのモデルを紹介した。この区分は各時点で投資決定を実行すると考えれば、投資決定時点の設定方法の違いと言ってもよい。連続時間モデルと離散時間モデルの投資決定の違いを図 7に示す。

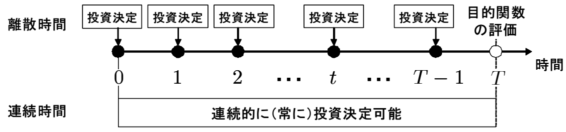

図 7: 投資決定時点

連続時間での投資決定は現実にはできない行動を前提にするため、離散時間での投資決定問題を考えることが現実的である[9]。

3.2　シナリオ生成 (分布の記述)

実際の資産運用において、より精緻に資産収益率を記述するためには、様々な、そして複雑な確率過程や確率分布を想定できるように対応する必要がある。解析解を求めるためには簡単な確率過程が必要であるし、シナリオ・ツリーは指数的に増大する可能性がある。そのため、資産間の相関を記述するためにコピュラを用いることもでき、柔軟なシナリオ生成を簡単にできるモンテカルロ・シミュレーションを利用できるモデルがよい。資産のリスク評価にはモンテカルロ・シミュレーションが使われることが多く、「リスク評価」と「リスク制御」(最適化) をシームレスに行えるモデル化は取り扱いやすく、重要である。

3.3　状態に依存した最適な意思決定

連続分布モデルに対して得られる解析解は状態変数の連続関数として記述される。同様に、モンテカルロ法による数値解もほぼ連続的な状態に依存した意思決定を記述できる。また、シナリオ・ツリー型モデルは離散的ではあるが、各状態に対する条件付き意思決定の記述が可能である。一方、混合型モデルは各

[9] 連続時間モデルで得られた最適解を離散時点のみに適用するという考え方もあるので、離散時間モデルでなければならない訳ではないが、モデルとしては整合性に欠けることになる。

状態にではなく、状態の集合に対して条件付き意思決定の記述が可能である。これらの意思決定の違いを図8に示す。

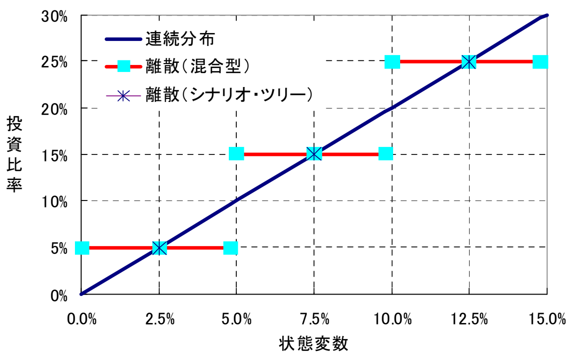

図 8: 状態に依存した最適な意思決定

図8の横軸を状態変数、縦軸を投資比率とする。Kim and Omberg モデル [28](2.1.1項) の場合にはリスクの市場価格 (ボラティリティ一定の場合には期待収益率)、Cvitanić and Karatzas モデル [6](2.1.2項) の場合には富 (もしくは積立比率) が状態変数に相当する。これらの連続分布モデルの場合、投資比率は状態変数の連続関数になっている。一方、シナリオ･ツリー型モデルの場合、図8では3つの状態変数の値 (2.5%, 7.5%, 12.5%) のみでシナリオが記述され、相応する投資比率 (5%, 15%, 25%) が最適解として求められる。混合型モデルの場合には3つの状態変数の値の集合 (0〜5%, 5%〜10%, 10%〜15%) でシナリオが記述され、相応する投資比率 (5%, 15%, 25%) が最適解として求められる。

3.4 目的関数・制約条件・資産数

投資家の目的関数 (効用関数) や実務に関連する制約式を自由に設定できないと、投資家のニーズに応えることはできない。また、年金基金などの資産運用においては、伝統的4資産 (内株・内債・外株・外債) とキャッシュの5資産に投資を行うことは必須であり、複数のリスク資産への対応が必要である。数理計画法の解法アルゴリズムで求解できる定式化に限定されるが、現在利用されている目的関数や制約式であれば、確率計画モデルを利用することで対応可能である。

3.5 議論

これらの要素に関して各モデルを比較した表を表1に示す。

表 1: 各モデルの比較

モデル	時間間隔	分布記述	意思決定	目的関数	制約条件	資産数$^+$
解析解	連続	△	○	△	×	2
MCR†	離散	○	○	△	△	2
ツリー‡	離散	△	○	○	○	≥ 2
シミュ*	離散	○	×	○	○	≥ 2
混合型	離散	○	△	○	○	≥ 2

† MCR：モンテカルロ回帰
‡ ツリー：シナリオ・ツリー型
* シミュ：シミュレーション型
+ 資産数≥ 2：2資産以上可能

表1の「○」「△」「×」は設定の自由度を3段階で評価したものである。表1を見ても分かるように、各モデルは一長一短である。しかし、実際の資産運用において多期間最適化モデルを用いる場合、3.4節の目的関数・制約条件・資産数を柔軟に決められることは最も重要な要素であると考えられる。さらに、リスク管理の面からは収益率分布を柔軟に記述できることも重要である。以上の点から、実際に利用するという視点からは混合型モデルが有用であると考えられる。次に4章で混合型モデルについて説明する。

4 混合型最適資産配分モデル

4.1 混合型モデルの概要

混合型モデルの基本的な考え方をさらに理解してもらうために、数理計画モデルの定式化 (目的関数と制約式) を示す[10]。また、パス

[10]詳細な定式化は Hibiki[18], 枇々木 [19] を参照されたい。

を束ねたそれぞれの状態の集合 (パス群) に対する同一の意思決定 (投資ルール) が異なっても、混合型モデルを一つの定式化で記述できる投資量関数についても説明する。

4.1.1 定式化

複数のリスク資産とキャッシュへの資産配分問題を混合型モデルによって定式化する。リターン尺度には最終富の1次の下方部分積率 (LPM_1) を用いる。目的関数には期待最終富から LPM_1 の定数倍 (λ倍) を引いた関数を設定する。決定変数は、リスク資産の投資量 (単位数) のベース変数とキャッシュ(金額) である。以下のように定式化される。

最大化 ： 期待最終富 $-\ \lambda \cdot \mathrm{LPM}_1$

制約条件

① 「0時点のリスク資産配分額の合計」
　　＋「キャッシュ配分額」＝「初期富」

② 「$t-1$時点の投資の結果 (t時点の富)」
　　＝「t時点のリスク資産配分額の合計」
　　　＋「キャッシュ配分額」
　　　$(t = 1, \ldots, T-1)$

③ 「T時点の富」＝「$T-1$時点の投資の結果」

④ リスク資産の投資量のベース変数 ≥ 0

⑤ キャッシュ ≥ 0

⑥ その他の制約式

目的関数の期待最終富と LPM_1 は③の T時点の富を使って計算される。①は予算制約式、②はキャッシュ・フロー制約式 (インフローとアウトフローが等価である制約式) である。②, ③ は各パスごとに制約式を記述する。④, ⑤ は非負制約式[11]で、④は各資産、各時点、各決定ノード、⑤は各時点、各パスごとに記述する。⑥には法的・政策的な制約式などを記述する。

各資産への配分額 (投資額) は「価格 × 投資量 (単位数)」で求めることができる。この投資量を表すためにそのベースを表す決定変数を用いて、投資量関数を設定する。

[11]上下限制約式を設定することもできる。

4.1.2 投資量関数

投資量関数とは (7) 式のように、リスク資産 j、時点 t、決定ノード s の投資量のベースを表す決定変数 z^s_{jt} を用いて、状態 (パス) i ごとに投資量 (単位数) を変える関数である[12] (枇々木 [16, 19], Hibiki[17, 18]) 。

$$h^{(i)}(z^s_{jt}) = a^{(i)}_{jt} z^s_{jt} \tag{7}$$

同一の意思決定 (投資ルール) の違いにより、投資量パラメータ $a^{(i)}_{jt}$ の値は様々な設定方法が考えられる。いくつかの設定例を示す[13] 。ここで、$\rho^{(i)}_{jt}$ と $\mu^{(i)}_{jt}$ はそれぞれリスク資産 j、時点 t、状態 (パス) i の価格と収益率、$W^{(i)}_t$ は時点 t、状態 (パス) i の富を表す。

(1) 投資量決定戦略：z^s_{jt} を投資量とする
　$a^{(i)}_{jt} = 1$

(2) 投資額決定戦略：z^s_{jt} を投資額とする
　$a^{(i)}_{jt} = \frac{\rho_{j0}}{\rho^{(i)}_{jt}}$

(3) 投資比率決定戦略：z^s_{jt} を投資比率とする
　$a^{(i)}_{jt} = \frac{W^{(i)}_t}{\rho^{(i)}_{jt}}$

(4) 順張り戦略： 価格が上昇 (下落) したら、それに応じて投資量も増やす (減らす)
　(例) $a^{(i)}_{jt} = 1 + \mu^{(i)}_{jt} = \frac{\rho^{(i)}_{jt}}{\rho^{(i)}_{j,t-1}}$ ： z^s_{jt} の「1+1期前の収益率」倍を投資量とする。

(5) 逆張り戦略： 価格が下落 (上昇) したら、それに応じて投資量も増やす (減らす)
　(例) $a^{(i)}_{jt} = \frac{1}{1+\mu^{(i)}_{jt}} = \frac{\rho^{(i)}_{j,t-1}}{\rho^{(i)}_{jt}}$ ： z^s_{jt} の「1+1期前の収益率」の逆数倍を投資量とする。

[12]簡単な変数変換によって、投資量ではなく、投資額や投資比率を状態ごとに変える関数として記述することもできる。ただし、4.1.1項に示す定式化の中のリスク資産への投資額の記述方法を「価格 × 投資量関数」から「投資額関数」、「富 × 投資比率関数」に修正する必要がある。

[13]枇々木 [16] はシミュレーション型モデルの枠組みで、順張り戦略や逆張り戦略を表す投資量関数や時系列相関を考慮した投資量関数を用いたモデルの定式化を示している。これらの投資戦略を導入するために、過去 (1期前) の収益率の線形関数として (過去の収益率に応じて投資量が変わる) 投資量関数を記述している。

これらの投資量関数を用いることによって、様々な投資ルールに対しても一つの定式化で混合型モデルを柔軟に記述することができる。

4.2 関連する研究の紹介

筆者らは年金ALM、家計の資産形成、リタイアメント・プランニングなどの研究において、シミュレーション型モデルや混合型モデルを適用して多期間最適化問題を解いている[14]。定番であるシナリオ・ツリー型モデルに比べて論文は少ないが、ここでは筆者ら以外による資産配分問題・ALMへの適用やモデル化の方法に関する研究を紹介する。

Bogentoft, Romeijn and Uryasev[2] はオランダの年金基金に対し、混合型モデルの特殊形を用いたALMモデルを構築している。上崎・山本[23], 上崎・山本・笠島[24] はシミュレーション型モデルを修正して公的年金のALMモデルを構築し、分析を行っている。桂・桃北[25, 26] は混合型モデルを用いた年金ALMモデルを開発し、その定式化と数値分析結果を示している[15]。Zhang and Zhang[41] は遺伝的アルゴリズム、Zhang and Zhang[42] は適応粒子群最適化を適用し、混合型モデルの枠組みで取引コストを考慮した資産配分問題を解いている。Xu *et al.*[38] は混合型モデルの枠組みでジャンプを含む確率ボラティリティモデルを導入し、2資産配分問題を解いている。Takano and Gotoh[34] はシミュレーション型モデルの枠組みで取引コストを考慮し、コンスタント・リバランス戦略の問題を解くアルゴリズムを開発している。Takano and Gotoh[35] はCalafiore[4, 5] の考え方を適用し[16]、過去の収益率の関数として非線形制御ポリシーを求める方法をカーネル法を用いて開発している。

次に、筆者らによる最近の研究成果を2つ紹介する。

4.3 インプライド分布を用いたモデル

木村・枇々木[29] は日経225オプション価格から推定される株式価格のインプライド分布を用いた多期間最適資産配分モデルを提案し、バックテストによって、その有用性を検証している。

インプライドリスク中立分布(RND)のパラメータをキャリブレートする(推定する)確率分布として、混合対数正規分布と第二種の一般化ベータ分布の2種類を用いている。インプライドRNDを最適資産配分問題に利用するために、リスク中立確率から実確率へと変換する(リスク調整を行う)方法として、最尤推定法とBerkowitz 検定の統計量を利用した推定法の2種類の方法を示している。一方、他のリスク資産(国内債券、外国株式・債券)にはヒストリカルデータを用いて、GH分布(一般化双曲型分布)のパラメータを推定している。さらに、各資産の確率分布の依存関係を表現するためにtコピュラを用いている。これらを考慮してモンテカルロ・シミュレーションにより収益率を生成し、混合型モデルで最適解を求めている。これらの手順をまとめると図9のようになる。

CVaRレシオ(=期待超過収益率/CVaR)を目的関数として3期間問題を解いている。1993年1月〜2008年12月のデータ期間で運用パフォーマンスの評価を行い、国内株式にもヒストリカル分布を用いた場合の投資戦略、均等リ

[14] 年金ALMモデルとして多田羅・枇々木(2001), 枇々木・茶野(2002)、家計の資産形成モデルとして枇々木・小守林・豊田(2005), 枇々木・小守林(2006), Hibiki(2007), 枇々木(2008, 2011), リタイアメント・プランニングモデルとして枇々木・西岡(2010)がある。また、枇々木(2002)はコンパクト表現による定式化、枇々木・田辺(2003)は内点法の実装上の工夫による高速化の方法も示している。Kawaguchi and Hibiki (2009)は LPM_1 に対する解析解(2.1.2項)と混合型モデルによる数値解を比較し、その近似精度を評価している。紙面の都合上、これらは参考文献リストから除いているが、一部を除き筆者のホームページからダウンロード可能である。

[15] 慶應義塾大学とみずほ年金研究所が行った共同研究の成果を紹介している。

[16] Calafiore[4, 5] は多期間平均・分散モデルの枠組みで、過去の収益率の関数として線形制御ポリシーを求める最適資産配分問題を解いている。

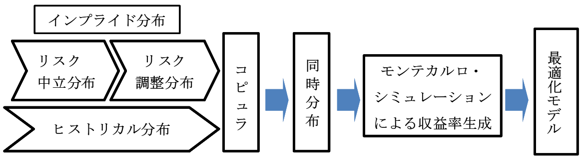

図 9: モデル化の手順

バランス戦略と比較を行っている。

インプライド分布やヒストリカル分布を用いて求められた投資戦略によるリターンは、均等リバランス戦略に比べて、平均は高く、標準偏差は低かった。インプライド分布を用いたモデルはヒストリカル分布のみを用いたモデルに比べて、全ケースで平均リターンが高いという結果が得られている。

今後の課題として、複数資産に対してインプライド分布を用いるモデルへの拡張が必要である[17]。

4.4 解析解の特徴を考慮したモデル化とモデルの比較分析

連続時間・連続分布でモデルを記述するアプローチでは「1つのリスク資産と無リスク資産」のポートフォリオ最適化問題であることが多い。一方、確率計画モデルによるアプローチは複数のリスク資産 (無リスク資産も含む)、様々な制約の導入など柔軟なモデル化を指向している。そのため、これらのアプローチは比較も含めて一緒に議論されることはほとんどない。それに対し、高屋・枇々木 [36] は「1つのリスク資産と無リスク資産」のポートフォリオ最適化問題に対する両者のアプローチを比較するとともに、解析解の特徴を考慮した (両者のアプローチを融合した) 線形近似モデルの提案を行っている。

[17] 日経225オプションの満期日は第二金曜日であるのに対し、米国株式 (S&P500) オプションの満期日は第三金曜日である。そのため、複数資産を取り扱うためにはインプライド分布の満期依存を取り除く (満期日を合わせる) 必要がある。この問題に対する解決策の一つとして、Alentorn and Markose[1] の方法が考えられる。

4.4.1 線形近似モデル

線形近似モデルとは混合型モデル (シミュレーション型モデルも含む) の投資量関数を修正し、解析解の特徴である状態変数の連続関数を用いて条件付き意思決定を可能にするモデルである。

リスク資産が1つの場合、混合型・投資比率モデルの投資量関数 $h^{(i)}(\pi_t^s)$ は4.1.2項でも示したように (8) 式で表せる。

$$h^{(i)}(\pi_t^s) = \left(\frac{W_t^{(i)}}{\rho_t^{(i)}}\right)\pi_t^s \tag{8}$$

線形近似モデルは (9) 式のように状態 i に依存した投資比率 $\pi_t^{(i)}$ を設定し、(10) 式のように混合型モデルの投資比率を書き換えて投資量関数を記述するモデルである[18]。

$$\pi_t^{(i)} = X_t^{(i)} b_t^s + c_t^s \tag{9}$$

$$h^{(i)}(\pi_t^{(i)}) = \left(\frac{W_t^{(i)}}{\rho_t^{(i)}}\right)\pi_t^{(i)} \tag{10}$$

ここで、$X_t^{(i)}$ は状態変数、b_t^s はその係数、c_t^s は定数で、b_t^s と c_t^s が状態の集合 s に対する決定変数となる。

3.3節の図8と同じ図で、2種類の投資比率モデル (シミュレーション型モデル、混合型モデル) と3種類の線形近似モデル (シミュレーション型線形近似、混合型線形近似、区分線形近似) の違いを図10に示す。

4.4.2 各モデルの比較

Kim and Omberg[28](2.1.1項・期待効用最大化問題) と Cvitanić and Karatzas[6](2.1.2項・LPM_1最小化問題) の2種類の問題に対して、数値分析を用いて比較を行っている。紙面の都合上、分析条件の記述は省略する。

(1) 期待効用最大化問題

[18] 投資比率を状態変数の連続関数として記述すると、(9) 式は以下のように1次までテーラー展開をした数式を表す。

$$\pi_t^{(i)} = f_t(X_t^{(i)}) = f_t(X_t^*) + \frac{df_t(X_t^*)}{dX}(X_t^{(i)} - X_t^*)$$

(10) 式は複数の項を持つ投資量関数である。

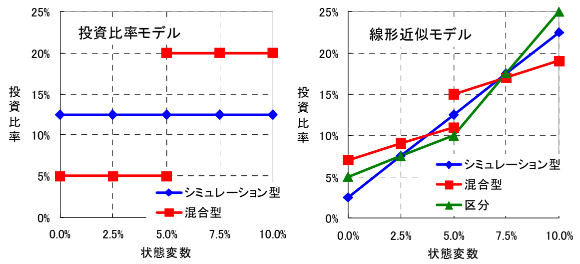

図 10: 線形近似モデル

表2に示した解析解、モンテカルロ回帰 (MCR: 2種類)、投資比率モデル (2種類)、線形近似モデル (3種類) を対象として、ノード数、時間間隔、リスク回避係数に対する感度分析を行い、比較している。

表 2: モデルの比較対象

解法	モデル
解析解	Kim and Omberg[28]
MCR	金利周りでテイラー展開
	近視眼解周りでテイラー展開
確率計画 (先行研究)	シミュレーション型モデル
	混合型モデル
確率計画 (高屋・枇々木 [36])	シミュレーション型線形近似
	混合型線形近似
	区分線形近似

分析結果の例の一つとして、異なるノード数に対する0時点投資比率を図11に示す。

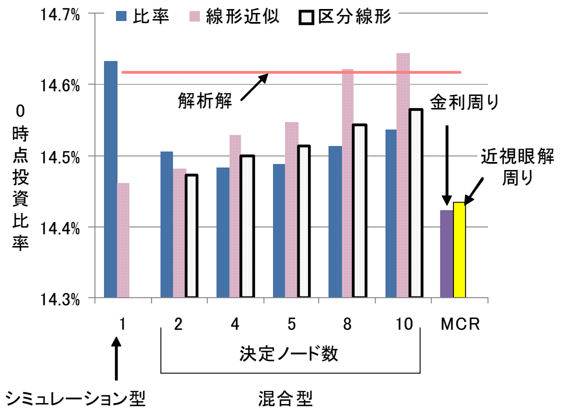

図 11: 0時点投資比率 (期待効用最大化)

各モデル間の投資比率の差は約0.2%であり、実用上はどのモデルでも問題ない。近視眼的な解析解 (投資比率) は12.5%である。

分析結果から以下の結論を導いている。

- 線形近似モデルの期待効用は他のモデルより高く、解析解に近くなる
- 0時点投資比率はモデルによる違いが少なく、実用上は混合型モデルで問題ない
- 期中の投資比率 (関数) を見ると、線形近似モデルは状態変数と投資比率の線形・大小関係が保たれ、解析解に近い結果となっている
- 線形近似モデルは制約を入れることが容易なため、制約を含めることが難しい MCR よりも一般的な場合では有利である

(2) LPM$_1$最小化問題

LPM$_1$ はテーラー展開ができないため、表2から MCR を除く。また、解析解は Cvitanić and Karatzas[6] である。ノード数、時間間隔、積立比率に対する感度分析を行い、比較している。

分析結果の例の一つとして、異なるノード数に対する0時点投資比率を図12に示す。

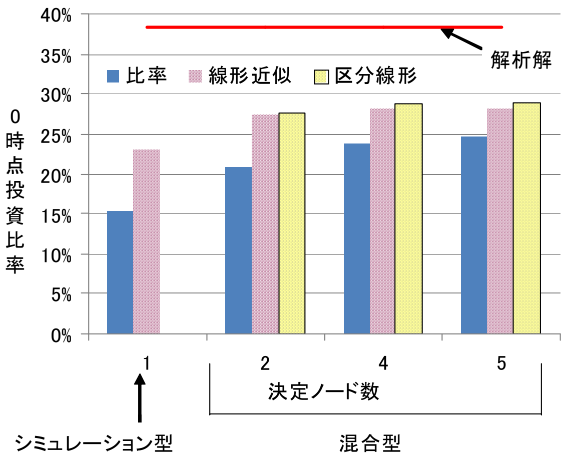

図 12: 0時点投資比率 (LPM$_1$最小化)

線形近似モデルは少ないノード数でも投資比率モデルより解析解に近づく。また、ノード数が多くなるほど、解析解に近づく。混合型線形近似と区分線形近似はほぼ同じである。

分析結果から以下の結論を導いている。

- 期待効用最大化の場合との違いとして、①

連続時間リバランスの影響が出やすく、解析解との差が大きい、② 線形近似関数の導入効果は期待効用最大化問題ほど大きくない、③ 時間間隔の小さい方が線形近似効果が高い、ということが分かる

- 線形近似モデルは混合型モデルと違い、解析解に比較的近い(高いレバレッジの)投資をすることが増える

4.4.3　今後の拡張

今後の拡張として考えられる点を列挙する。

(1) 実務への適用

複数のリスク資産や上下限制約式を含む場合のモデル化が必要である。そうすれば、実務においても線形近似モデルが混合型モデルの代わりに利用できるようになる。

(2) 線形近似モデルの利用法

線形近似モデルを利用するためには投資量関数を特定する必要がある。解析解の関数形が分かっている場合は4.4.2項でも示したように、期待収益率や富の関数を当てはめればよい。一方、解析解の関数形が分からない場合(通常の場合)には以下の手順で行う。

① 混合型モデルで問題を解き、関数形を特定する(投資量関数を予想する)

② 特定した投資量関数を用いて線形近似モデルを構築し、問題を解く

5　まとめ

本稿では、多期間最適化による資産配分モデルを中心に議論した。実務への適用を考えるならば、目的関数・制約条件の設定がある程度自由にでき、3資産以上の複数資産への対応も可能で、収益率分布を柔軟に記述するためにモンテカルロ・シミュレーションを利用する混合型モデルが有用である。その一方で、さらに投資量関数の設定方法を工夫することによって、3資産以上の複数資産に対する線形近似モデルを構築することが必要である。

荻島[32]は年金運用における「動態的な資産管理」についての考え方とその実践的な手法を整理している。このような議論が実務家に浸透するとともに、多期間最適化モデルへの理解が深まることを望んでいる。今後も実務家からの様々なニーズに応えられる実践的なモデルの研究を進めたいと考えている。

参考文献

[1] Alentorn, A. and S. Markose, Removing Maturity Effects of Implied Risk Neutral Densities and Related Statistics, *Economics Discussion Papers 609, University of Essex, Department of Economics*, 2006.

[2] Bogentoft, E., H. Romeijn and S. Uryasev, Asset/Liability Management for Pension Funds Using CVaR Constraints, *The Journal of Risk Finance*, **3**, 1(2001), pp.57–71.

[3] Brandt, M.W., A. Goyal, P. Santa-Clara and J.R. Stroud, A Simulation Approach to Dynamic Portfolio Choice with an Application to Learning About Return Predictability, *Review of Financial Studies*, **18**,3(2005), pp.831–873.

[4] Calafiore, G., Multi-period Portfolio Optimization with Linear Control Policies, *Automatica*, **44**(2008), pp.2463–2473.

[5] Calafiore, G., An Affine Control Method for Optimal Dynamic Asset Allocation with Transaction Costs, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **48**, 4(2009), pp.2254–2274.

[6] Cvitanić, J. and I. Karatzas, On Dynamic Measures of Risk, *Finance and*

Stochastics, **3**, 4(1999), pp.451–482.

[7] Consigli, G. and M.A.H. Dempster, Dynamic Stochastic Programming for Asset-liability Management, *Annals of Operations Research*, **81**(1998), pp.131–161.

[8] Detemple, J., R. Garcia and M. Rindisbacher: Simulation Methods for Optimal Portfolios. In Birge, J. R. and V. Linetsky (eds.): *Handbooks in Operations Research and Management Science: Financial Engineering Volume 15*(Elsevier, 2007), pp.867–924.

[9] Dupačova, J. and J. Polivka, Asset-liability Management for Czech Pension Funds Using Stochastic Programming, *Annals of Operations Research*, **165**(2009), pp.5–28.

[10] Donhi, G., F. Herzog, L.M. Schumann and H.P. Geering, Dynamic Asset and Liability Management for Swiss Pension Funds, *In: Zenios and Ziemba[40]*, pp.963–1028.

[11] Geyer, A. and W.T. Ziemba, The Innovest Austrian Pension Fund Financial Planning Model InnoALM, *Operations Research*, **56**, 4(2008), pp.797–810.

[12] Gülpinar, N., B. Rustem and R. Settergren, Simulation and Optimization Approaches to Scenario Tree Generation, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **28**(2004), pp.1291–1315.

[13] 枇々木規雄, 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **44**, 2(2001), pp.169–193.

[14] 枇々木規雄, 最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル, 高橋一編, ジャフィー・ジャーナル 金融工学の新展開 (東洋経済新報社, 2001), pp.89–119.

[15] 枇々木規雄, 金融工学と最適化, 朝倉書店, 2001.

[16] 枇々木規雄, シミュレーション型多期間確率計画モデルに対する数値実験による考察, 日本金融・証券計量・工学学会 2002 年夏季大会予稿集, pp.81–100.

[17] Hibiki, N., Hybrid Simulation/Tree Stochastic Optimization Model for Dynamic Asset Allocation, In Scherer B. (eds.): *Asset and Liability Management Tools: A Handbook for Best Practice*(Risk Books, 2003), pp.269–294.

[18] Hibiki, N., Multi-period Stochastic Optimization Models for Dynamic Asset Allocation, *Journal of Banking and Finance*, **30**, 2(2006), pp.365–390

[19] 枇々木規雄, 多期間最適資産配分モデル, 小暮厚之 編著, リスクの科学ー金融と保険のモデル分析 (朝倉書店, 2007), pp.1–31.

[20] Hilli, P., M. Koivu, T. Pennanen and A. Ranne, A Stochastic Programming Model for Asset Liability Management of a Finnish Pension Company, *Annals of Operations Research*, **152**(2007), pp.115–139.

[21] Høyland, K. and S.W. Wallace, Generating Scenario Trees for Multistage Decision Problems, *Management Science*, **47**, 2(2001), pp.295–307.

[22] Ji, X., S. Zhu, S. Wang and S. Zhang, A Stochastic Linear Goal Programming

Approach to Multistage Portfolio Management Based on Scenario Generation via Linear Programming, *IIE Transactions*, **37**(2005), pp.957–969.

[23] 上崎勝巳, 山本零, 公的年金運用における基本ポートフォリオ策定プロセスの再考について — 多期間最適化モデルの活用 —, 証券アナリストジャーナル, **47**, 8(2009), pp.65–77.

[24] 上崎勝己, 山本零, 笠島久司, 公的年金の負債特性を考慮した積立金運用について — 実質的な運用利回りの確保と効率的な資金運用の考察 —, 年金と経済, **30**, 1(2011), pp.40–48.

[25] 桂眞一, 桃北憲, 数理計画法による年金ALM多期間最適化モデル, みずほ年金レポート, **76**(2007), pp.60–79.

[26] 桂眞一, 桃北憲, 多期間最適化モデルによる年金ALM, みずほ年金レポート, **84**(2009), pp.54–69.

[27] Kilianová, S. and G.C. Pflug, Optimal Pension Fund Management under Multi-period Risk Minimization, *Annals of Operations Research*, **166**(2009), pp.261–270.

[28] Kim, T. and E. Omberg, Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior, *Review of Financial Studies*, **9**, 1(1996), pp.141–161.

[29] 木村嘉明, 枇々木規雄, インプライド分布を用いた多期間最適資産配分モデル, 日本金融・証券計量・工学学会 2010 年夏季大会予稿集, pp. 215–226.

[30] Klein Haneveld, W.K., M.H. Streutker and M.H. van der Vlerk, An ALM Model for Pension Funds Using Integrated Chance Constraints, *Annals of Operations Research*, **177** (2007), pp.47-62.

[31] Mulvey, J.M. and A.E. Thorlacius, The Towers Perrin Global Capital Market Scenario Generation System, *In: Ziemba and Mulvey[43]*, pp.286–312.

[32] 荻島誠治, 動態的な資産管理とダウンサイドリスク, 企業年金連絡協議会資産運用研究会 編, チャレンジする年金運用 (日本経済新聞出版社, 2011), pp.15–44.

[33] Pranevicius, H. and K. Sutiene, Scenario Tree Generation by Clustering the Simulated Data Paths, *Proceedings 21st European Conference on Modelling and Simulation*, 2007.

[34] Takano, Y. and J. Gotoh, Constant Rebalanced Portfolio Optimization Under Nonlinear Transaction Costs, *Asia-Pacific Financial Markets*, **18**, 2(2011), pp.191–211.

[35] Takano, Y. and J. Gotoh, A Nonlinear Control Policy Using Kernel Method for Dynamic Asset Allocation, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **54**, 4(2011), pp.201–218.

[36] 高屋圭介, 枇々木規雄, モンテカルロ・シミュレーションを用いた動的ポートフォリオ最適化モデル, *Transactions of the Operations Research Society of Japan*, 投稿中.

[37] 梅内俊樹, 多期間最適ポートフォリオ問題 — LSM法を利用した近似解法の近似精度, 津田博史, 中妻照雄, 山田雄二 (編), ジャフィー・ジャーナル 金融工学と市場計量分析　非流動性資産の価格付けとリアルオプション (朝倉書店, 2008), pp.184–212.

[38] Xu, W., C. Wu, W. Xu and H. Li, Dynamic Asset Allocation with Jump Risk, *The journal of Risk*, **12**, 3(2010), pp.29–44.

[39] Zenios, S.A. and W.T. Ziemba, Handbook of Asset and Liability Management, Volume 1: Theory and Methodology, *North-Holland*, 2006.

[40] Zenios, S.A. and W.T. Ziemba, Handbook of Asset and Liability Management, Volume 2: Applications and Case Studies, *North-Holland*, 2007.

[41] Zhang, X. and K. Zhang, Using Genetic Algorithm to Solve a New Multi-period Stochastic Optimization Model, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **231**(2009), pp.114–123.

[42] Zhang, X. and K. Zhang, Application of Adaptive Particle Swarm Optimization in Portfolio Selection, *The 1st International Conference on Information Science and Engineering (ICISE2009)*, pp.3977–3980.

[43] Ziemba, W.T. and J.M. Mulvey, Worldwide Asset and Liability Modeling, *Cambridge University Press*, 1998.