DEAにおける修正クロス効率値を用いた評価法

枇々木　規雄

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

Journal of Operations Research Society of Japan, **41**, No.2(1998), pp.229-244.

Abstract

DEAにおけるクロス効率値は、DMUの特徴付けやD効率的なDMUの順序付けなどのD効率値とは違う側面から効率性を評価することができる。本研究では、クロス効率値を適切に評価に利用するための理論的な枠組みを議論し、その具体的な方法を示す。まず、はじめに、クロス効率値における任意性の問題と不公平性の問題を解決するために、修正クロス効率値を示す。修正クロス効率値はクロス効率値の最小値と最大値を計算し、その中から何らかの適切な基準によって一つに決める効率値を表す。次に、一つに決める方法として7種類の基準(最小値、最大値、満足度、ウェイトの平均値、算術平均値、幾何平均値、調整済満足度)を示す。さらに、(修正)クロス効率値を用いた評価法として、7種類の評価法(平均クロス効率値、加重平均クロス効率値、満足度、調整済満足度、幾何平均値、最大値、最小値)を示す。修正クロス効率値の特徴、一つに決める基準やクロス効率値を用いた評価法に対する特徴について、比較・検討する。本研究で示した方法や考察結果を利用することによって、クロス効率値を用いた評価を適切に行うことが期待できる。

1.　はじめに

DEA(Data Envelopment Analysis)は、Charnes *et al.* [3]によって、開発された多入力・多出力系システムにおける相対的な効率性評価法である [1]。一方、Sexton *et al.* [13]は、DEAにおける効率性を測定する別の方法としてクロス効率値(cross-efficiency)を提案している。クロス効率値は、対象DMU a のD効率値を求めた後、そのときに得られる最適ウェイトを用いて計算される DMU j の効率値を表す。対象 DMU a に対するウェイト $\boldsymbol{v}_a^*, \boldsymbol{u}_a^*$ を用いて計算されるDMU j のクロス効率値 η_{ja} は(1.1)式で示される。

$$\eta_{ja} = \frac{Y_j^T \boldsymbol{u}_a^*}{X_j^T \boldsymbol{v}_a^*},\ (j = 1, \ldots, n \text{ and } a = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

$X \in R^{m \times n}, Y \in R^{k \times n}$ は入力、出力の値($X_j \in R^m, Y_j \in R^k$ は DMU j の入力、出力の値、$\boldsymbol{v}_a \in R^m, \boldsymbol{u}_a \in R^k$ はそれぞれ入力および出力に対するウェイトを表す。また、m, k, n はそれぞれ入力、出力の項目数とDMUの数、a は対象DMUの番号を、T は転置を表す。

クロス効率値 η_{ja} は $n \times n$ 行列の j 行 a 列の要素となるクロス効率性行列(cross-efficiency matrix)として表すことができる [2]。自分にとって最も都合の良いウェイトによるD効率値はクロス効率性行列の対角要素になる(‘self-rated efficiency’と呼ばれる)。クロス効率性行

[1] DEAについての詳細は、Charnes *et al.* [2], 刀根 [16]を参照されたい。

[2] Sexton *et al.* [13]は、対象DMU a を行に、ウェイトを用いてクロス効率値が計算されるDMU j を列にして、クロス効率性行列を記述している。しかし、本論文では2節で提案する修正クロス効率値の表記法と合わせるため、DMU j の添字を最初にする(Sexton *et al.*の表記法とは逆に記述する)。

列の j 行に注目すると、そのDMU j が他のDMUによって、どのように評価されるかが分かる。クロス効率値はDMUの特徴を探ることやD効率的なDMUの順序付けなど、D効率値とは違う側面から効率性を評価することができるが、DMUの評価にクロス効率値を利用する場合には、注意が必要である。というのは、DEAの大きな特徴は「自分にとって最も都合良く評価する」ことだからである。そのように評価したい場合はD効率値を使うべきであり、クロス効率値は、「自分に都合の良い評価だけでなく、他からの評価も利用したい」と考える場合に用いるべきである。ただし、クロス効率性行列の対角要素はD効率値でもあり、利用方法に注意すれば、クロス効率値はD効率値に加えて、より多くの情報を含む一般的な効率値の表現方法ということができる。

ところで、Sexton *et al.* [13]はクロス効率性行列を用いる際の問題点として、

> 『 対象DMUがD効率的なとき、他のDMUのクロス効率値は任意である。対象とするDMUがD効率的なとき、DEAの定式化を行った線形計画問題は複数の最適解、すなわちウェイトの組み合わせは複数求められる可能性がある。つまり、D効率的なDMUに対して求められるウェイトはシンプレックス法で計算された最初に出てくる最適解に過ぎない。したがって、そのようにして求められた任意のウェイトを用いてクロス効率値が計算される結果、DMUの評価において全くの誤解を導く可能性があり得る。』

という点を指摘し、ウェイトを一意に決める一つの方法として目標計画法を用いたモデルを提案している。これらの定式化では、ある特別な(実際の問題においてはほとんどあり得ない)場合を除き、ウェイトは一意に決まる。しかし、必ずしも一意に決まるとは限らないという問題点は解決されていない[3]。偏差の和の最大化または最小化を目指すので、DMUによっては不利な評価を受ける可能性もある。

本研究では、まずはじめに、他のDMUからの評価値として測定されるクロス効率値の特徴を生かしつつ、これらの問題点を解決する修正クロス効率値(modified cross-efficiency)を提案する。さらに、クロス効率値を評価に利用する際の基礎となる理論的な枠組みを作ることを目的とする。以降、本論文の構成を示す。2節ではクロス効率値が一意に決まるとは限らない任意性の問題とDMUによっては不利な評価を受ける可能性のある不公平性の問題を解決するための考え方と修正クロス効率値の基本計算法および簡易計算法を示す[9]。3節では、その値が範囲として定義される修正クロス効率値を一つに決める方法として、7通りの基準を示し、それぞれの方法の持つ特徴を明確にする[10]。4節では、3節で求められるクロス効率値を用いた評価法として、7通りの方法を示す。さらに3節で示した7通りの基準と組み合わせた計49通りの評価法を比較し、その特徴や利用法を検討する[11]。最後に、5節で結論と今後の課題を述べる[4]。

2. 修正クロス効率値の考え方とその計算法

2.1. クロス効率値の問題点の解決

クロス効率値は、(1.1)式からも分かるように、DEA問題を解くことによって得られる最適ウェイトを用いて計算される。しかし、ウェイトを用いなくても直接、クロス効率値を求めることはできる。クロス効率値は、効率値の大きさだけが問題であり、どのようなウェイトを用いて計算してもそのウェイトの大きさ自体は意味を持たない。ウェイトは対象DMU

[3]詳しくは、枇々木[9]付録Aを参照されたい。

[4]本論文は、枇々木[9, 10, 11]をまとめた論文である。各節のさらに詳しい議論や数値例などを知りたい方は、各論文を参照されたい。これらの論文は著者に請求されれば、入手することが可能である。

以外のクロス効率値を計算するという手続き上、必要なだけだからである。何の基準もなしに、ウェイトの組み合わせを一意に決める(そのことにより効率値を計算する)ことは難しいが、効率値だけに注目し、その最大値と最小値を求め、範囲を限定することは容易である。最大値と最小値を求めた後で、一つの値に決めることによって、計算で任意に求められたものではなく、しかも適切な評価基準を用いることで公平なクロス効率値になる。最大値と最小値を求めた時点で、クロス効率値を(ある値という意味ではないが)範囲として一意に決めることになる。また、それぞれのDMUのクロス効率値がとり得る範囲は、公平な評価をする基準化のためにも用いることができる。

このようなクロス効率値は従来のものとは異なる考え方によって計算されるので、区別するために修正クロス効率値(modified cross-efficiency)と呼ぶことにする。

次に、クロス効率値を一意に決めるための従来の研究を示す。Oral *et al.* [12]は、R & D プロジェクトに対するモデルとして、二段階の評価モデル(と選択モデルの計三段階モデル)を示しており、一段階目の評価モデルとしてDEAモデルを利用している。そして、二段階目のモデルとして、クロス評価モデルを示している。このモデルは、Sexton *et al.* [13]のクロス効率値を参照していないため、クロス評価モデル(Cross-Evaluation Model)と呼ばれている。Doyle *et al.* [4]は、個々のDMUのクロス効率値の最小値を求めるモデルとしてtargeted aggression を示している。Sexton *et al.* [13]の aggressive formulation を blanket aggression と呼び、区別している。2.2節で示す修正クロス効率値の最大値を求めるモデル(MAX–MCEモデル)はOral *et al.*のモデル、最小値を求めるモデル(MIN–MCEモデル)はDoyle *et al.*のモデルに対応する[5]。本研究で提案する修正クロス効率値を求めるモデルはクロス効率値のとり得る範囲を求めるので、これらのモデルを含む一般的なモデルである。さらに、これらの研究と異なる重要な点は、修正クロス効率値の計算にかかわる条件や方法などの詳しい手続きについても考察し、その利用法についても検討していることである。

2.2. 修正クロス効率値の基本計算法

次の3ステップによって、DMU aを対象にしたときのDMU j の修正クロス効率値μ_{ja}の計算法を示す。

【 第1ステップ 】

対象DMU a のD効率値を求める。ここではCCRモデルを用いる。

$$\begin{aligned} \textbf{maximize} \quad & \theta_a(=\mu_{aa}) = Y_a^T \boldsymbol{u}_a & (2.1)\\ \textbf{subject to} \quad & X_a^T \boldsymbol{v}_a = 1 & (2.2)\\ & Y^T \boldsymbol{u}_a - X^T \boldsymbol{v}_a \leq \mathbf{o} & (2.3)\\ & \boldsymbol{v}_a \geq \mathbf{o} & (2.4)\\ & \boldsymbol{u}_a \geq \mathbf{o} & (2.5) \end{aligned}$$

ここで、θ_a^*(修正クロス効率値の表記法ではμ_{aa}^*)は対象DMU a のD効率値を示す。

[5]修正クロス効率値はこれらの研究とは独立に行われたので、修正クロス効率値と呼ぶ[8, 9]。また、修正クロス効率値の最大値や最小値は3節で示す7通りの基準の中でも特別な値を示すので、利用する際には注意が必要である。

【 第2ステップ 】

ウェイトが一意に決まらない場合(現実的には、DMU a がD効率的なとき) [6] に限り、第3ステップへ進む。それ以外は、第1ステップで求められた最適ウェイト $\boldsymbol{v}_a^*$, $\boldsymbol{u}_a^*$ を用いて、DMU a を対象としたときのその他のDMU $j\,(j=1,\ldots,n\,,\,j\neq a)$ の修正クロス効率値 μ_{ja}^* を(2.6)式により求める。

$$\mu_{ja}^* = \frac{Y_j^T \boldsymbol{u}_a^*}{X_j^T \boldsymbol{v}_a^*}\;,\;(j=1,\ldots,n \text{ and } j\neq a) \tag{2.6}$$

【 第3ステップ 】

第1ステップで求められたDMU a のD効率値 θ_a^* の値を保ちながら、DMU a を対象にしたときのその他のDMU $b\,(b=1,\ldots,n\,,\,b\neq a)$ の修正クロス効率値の最大値 μ_{ba}^{U*} をMAX–MCEモデルによって、最小値 μ_{ba}^{L*} をMIN–MCEモデルによって求める。

＜MAX–MCEモデル(最大値を求めるモデル)＞

$$\begin{aligned}
\textbf{maximize}\quad & \mu_{ba}^U = Y_b^T \boldsymbol{u}_b && (2.7)\\
\textbf{subject to}\quad & X_b^T \boldsymbol{v}_b = 1 && (2.8)\\
& Y_a^T \boldsymbol{u}_b - \theta_a^* \cdot X_a^T \boldsymbol{v}_b = 0 && (2.9)\\
& Y_j^T \boldsymbol{u}_b - X_j^T \boldsymbol{v}_b \leq 0,\ (j=1,\ldots,n, j\neq a) && (2.10)\\
& \boldsymbol{v}_b \geq \mathbf{o} && (2.11)\\
& \boldsymbol{u}_b \geq \mathbf{o} && (2.12)
\end{aligned}$$

＜MIN–MCEモデル(最小値を求めるモデル)＞

$$\begin{aligned}
\textbf{minimize}\quad & \mu_{ba}^L = Y_b^T \boldsymbol{u}_b && (2.13)\\
\textbf{subject to}\quad & (2.8)\sim(2.12)\text{式}
\end{aligned}$$

第1〜3ステップをすべてのDMU $a\,(a=1,\ldots,n)$ について行い、修正クロス効率値を求める。次に、図1を用いて、最大値 μ_{ba}^{U*} および最小値 μ_{ba}^{L*} について、図解する。簡単のため、2入力1出力でDMUが6個の場合を用いて説明する。ただし、出力値はすべて1になるように入力値を調整する。図の見方として例えば、A点は DMU_A の入力値を表す。

図1は DMU_E を対象にしたときの DMU_D の修正クロス効率値を示す。DMU_E をD効率的に保ちながら DMU_D にとって最も都合の良いウェイトはB点とE点を結んだ直線に相当するウェイトである。そのときの効率値が最大値となる。一方、E点から右に伸ばした直線に相当するウェイトにおける効率値が最小値となる。DMU_E を対象にしたときの DMU_D の修正クロス効率値はこの範囲の値である。従来のクロス効率値はこの中の任意の値をとる。

ところで、クロス効率値は対象DMU a のウェイトをある一つに固定して、他のDMUの効率値を計算している。それに対して、修正クロス効率値は対象DMU a のD効率値を固定して他のDMU毎に効率値(MAX–MCEモデルでは最大の効率値、MIN–MCEモデルでは

[6] CCRモデルでは, スラックの値が0となる入出力項目の数が参照集合に含まれるDMUの数 +1 より大きい場合である。スラックは(2.4),(2.5)式の双対解に、参照集合に含まれるDMUの数は(2.3)式の双対解の非ゼロの数に対応する。DEAにおけるウェイトの一意性に関する判定条件については枇々木[9]付録Bを参照されたい。

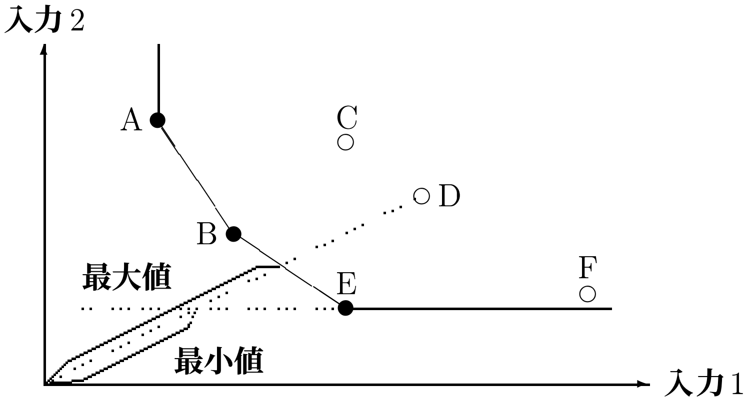


図 1: 修正クロス効率値の最大値と最小値

最小の効率値) を線形計画問題を解くことによって求めるという違いがある。また、第2ステップの条件で終了して求められる修正クロス効率値は一つの値に決まるが、これは従来のクロス効率値と同じである。

2.3. 修正クロス効率値の簡易計算法

修正クロス効率値は2.2節で示した3ステップによって計算することができる。この3ステップはある一つのDMU a を対象にしたときの計算法である。しかし、修正クロス効率値をすべてのDMU $a\,(a=1,\ldots,n)$ について求めるならば、第1ステップと第2ステップを初めにすべて計算することによって, 第3ステップは計算を簡易にすることができる。ここで、対象DMU を DMU h とし、第1ステップで求められる参照集合を $E_h\,(h=1,\ldots,n)$、D効率的なDMUの集合を E とする。MAX–MCE モデルに関しては3つ、MIN–MCE モデルに対しては1つの簡易計算法を示す [7]。

(A) MAX–MCE モデルに対する簡易計算法

- (A1) 対象DMU a がその他のDMU b の参照集合 E_b に含まれる ($a \in E_b$) とき、そのDMU b の修正クロス効率値の最大値 μ_{ba}^{U*} はDMU b のD効率値 θ_b^* と同じ ($\mu_{ba}^{U*}=\theta_b^*$) になる。これは、DMU b がD非効率的な場合に適用される。
- (A2) DMU b がD効率的 ($\theta_b^*=1$) で、しかもその他のDMU h の参照集合 E_h の中に対象とするDMU a とDMU b を両方とも含むもの ($\{b,a\}\in E_h(\,h=1,\ldots,n)$) が一つでも存在するとき、そのDMU b の修正クロス効率値の最大値 μ_{ba}^{U*} は1 ($\mu_{ba}^{U*}=1$) になる。これは、DMU b がD効率的な場合に適用される。
- (A3) 第3ステップの(2.10)式はDMU b の参照集合 E_b のうち、対象DMU a 以外のもの ($j\in E_b,\ j\neq a$) だけで良い。

(B) MIN–MCE モデルに対する簡易計算法

- (B1) 第3ステップの(2.10)式はD効率的なDMUの集合 E のうち、対象DMU a 以外のもの ($j\in E,\ j\neq a$) だけで良い。

[7]証明は枇々木 [9]2.3節を参照されたい。

3.　修正クロス効率値を一つに決める方法

修正クロス効率値は範囲として求めた後で、何かの適切な基準をもとにして一つの値に決めるものである。そこで、ここでは修正クロス効率値を一つに決める方法として、2節の計算法から求めることができる3通りの方法(基準)と線形計画問題を解いたときに最適解の候補として求められるすべてのウェイト解の情報を利用した4通りの方法(基準)を示す。

ところで、ウェイトが一意に決まらない結果、クロス効率値が一意に決まらないのは現実的にはD効率的なDMUの場合だけである。そこで、3節以降は記述の煩雑さを避けるためにD効率的なDMUのみを対象にする。

3.1.　最大値と最小値を用いた基準

以下に3通りの基準を示す。E はD効率的なDMUの集合を表す。

(1) クロス効率値の最大値 η_{ja}^{U} を用いる方法

$$\eta_{ja}^{U} = \mu_{ja}^{U*},\ (j = 1, \ldots, n \text{ and } a \in E) \tag{3.1}$$

この基準は、他の(D効率的な)DMU a からの評価を最大にするように(評価される DMU にとっては、最も都合良く考えて)、評価する場合に有効である。

(2) クロス効率値の最小値 η_{ja}^{L} を用いる方法

$$\eta_{ja}^{L} = \mu_{ja}^{L*},\ (j = 1, \ldots, n \text{ and } a \in E) \tag{3.2}$$

この基準は、他の(D効率的な)DMU a からの評価を最小にするように(評価される DMU にとっては、最も都合悪く考えて)、評価する場合に有効である。

(3) 満足度を同じにするクロス効率値 η_{ja}^{S} を用いる方法[8]

最大値ならば、これ以上でとり得る良い値はないので最も満足と、また、最小値ならば、これ以下でとり得る悪い値はないので、最も不満足と考える。これを基準にして、満足度 $d_{ja}(\eta_{ja}^{S})$ を考えると、それは(3.3)式で表せる。

$$d_{ja}(\eta_{ja}^{S}) = \frac{\eta_{ja}^{S} - \eta_{ja}^{L}}{\eta_{ja}^{U} - \eta_{ja}^{L}},\ (j = 1, \ldots, n \text{ and } a \in E) \tag{3.3}$$

この満足度 $d_{ja}(\eta_{ja}^{S})$ の値を決める(与える)ことによって、修正クロス効率値の範囲の中からある一つの値 η_{ja}^{S} を決めることができる。与えられた満足度を d_{ja}^{S} とすると、そのときのクロス効率値 η_{ja}^{S} は(3.4)式で与えられる。

$$\eta_{ja}^{S} = \eta_{ja}^{L} + (\eta_{ja}^{U} - \eta_{ja}^{L}) \cdot d_{ja}^{S}\,,\ (j = 1, \ldots, n\,,\ a \in E) \tag{3.4}$$

この基準は、他の(D効率的な)DMU a からの評価を最大値や最小値という極端な値ではなく、その中間的な評価を表す満足度という点を考慮したい場合に有効である。

[8]従来の任意に求められるクロス効率値と修正クロス効率値を明確に分けるために、前者を η_{ja}、後者を μ_{ja} と記述していた。しかし、これらの問題は(1), (2)のように修正クロス効率値の最大値と最小値の記号を定義することによって、見分けることができると考え、クロス効率値の記号を η_{ja} に統一する。

3.2. 最適解の候補として求められるウェイト解を利用した基準

対象DMU a が効率的な場合、DEAの問題は次の条件を満たす。

$$Y_a^T \boldsymbol{u}_a - X_a^T \boldsymbol{v}_a = 0 \tag{3.5}$$

$$Y_j^T \boldsymbol{u}_a - X_j^T \boldsymbol{v}_a \leq 0\,,\ (j \in E) \tag{3.6}$$

(3.5),(3.6)式を満たすウェイトの組み合わせは無数に考えられる。通常のシンプレックス法のプログラムで求められる最適解(ウェイト)は、端点として求められる最適基底解の一つに過ぎない。そのために、出てくる解は任意性の問題を持つのである。そこで、(3.5),(3.6)式を満たす端点をすべて求める、つまり、最適解を与える多面体上の端点をすべて列挙し、それらの情報を用いることによって、修正クロス効率値を一つに決めるということを考える。すべての端点(最適ウェイト解の候補)を利用することで、3.1節の最小値、最大値のみの情報よりも詳しい情報に基づいて、DMUのクロス効率性を評価することができる。ここでは、Fukuda [5, 6]のプログラム(`cdd.c` [9])を利用して、端点をすべて求める(列挙する)。

対象DMUが効率的と評価され、ウェイトの組み合わせを求めるとき、通常の線形計画法のプログラムでは一つの端点解(最適基底解)しか得られない。そこで、ここでは簡単化のために、どの端点も解として得られる可能性(確率)をすべて同じとして、基準を考えてみる。

効率的なDMU a を対象にしたときに得られる端点の数を N_a、そのときのウェイトを $\boldsymbol{v}_a^{(s)}$, $\boldsymbol{u}_a^{(s)}$ $(s = 1, \ldots, N_a)$とする。このとき、端点毎に求められるウェイトを用いて計算したクロス効率値 $\eta_{ja}^{(s)}$は(3.7)式で求めることができる。

$$\eta_{ja}^{(s)} = \frac{Y_j^T \boldsymbol{u}_a^{(s)}}{X_j^T \boldsymbol{v}_a^{(s)}}\,,\ \ (j = 1, \ldots, n \text{ and } s = 1, \ldots, N_a) \tag{3.7}$$

ここでは修正クロス効率値を一つに決めるための基準として、次の4つの方法を示す。

(1) ウェイトの平均値を用いてクロス効率値 η_{ja}^W を計算する方法

ウェイトの平均値 $\overline{v}_{ia}$, $\overline{u}_{ra}$ は(3.8),(3.9)式で求めることができる。

$$\overline{v}_{ia} = \frac{1}{N_a} \sum_{s=1}^{N_a} v_{ia}^{(s)}\,,\ (i = 1, \ldots, m \text{ and } a \in E) \tag{3.8}$$

$$\overline{u}_{ra} = \frac{1}{N_a} \sum_{s=1}^{N_a} u_{ra}^{(s)}\,,\ (r = 1, \ldots, k \text{ and } a \in E) \tag{3.9}$$

これらを用いて、クロス効率値 η_{ja}^W を(3.10)式で求める。

$$\eta_{ja}^W = \frac{Y_j^T \overline{\boldsymbol{u}}_a}{X_j^T \overline{\boldsymbol{v}}_a}\,,\ (j = 1, \ldots, n \text{ and } a \in E) \tag{3.10}$$

(2) クロス効率値の算術平均値 η_{ja}^A を用いる方法

(3.7)式で計算されるクロス効率値 $\eta_{ja}^{(s)}$ の算術平均値 η_{ja}^A を(3.11)式で計算する。

$$\eta_{ja}^A = \frac{1}{N_a} \sum_{s=1}^{N_a} \eta_{ja}^{(s)}\,,\ (j = 1, \ldots, n \text{ and } a \in E) \tag{3.11}$$

[9] `cdd.c`は、フリーソフトウェアで、`ftp.epfl.ch`(128.178.139.3)[directory:`incoming/dma`] から anonymous ftp で入手することができる。

(3) **クロス効率値の幾何平均値 η_{ja}^{G} を用いる方法**

(3.7) 式で計算されるクロス効率値 $\eta_{ja}^{(s)}$ の幾何平均値 η_{ja}^{G} を (3.12) 式で計算する。

$$\eta_{ja}^{G} = \sqrt[N_a]{\prod_{s=1}^{N_a} \eta_{ja}^{(s)}}\,,\ (j = 1, \ldots, n \text{ and } a \in E) \tag{3.12}$$

(4) **調整済満足度を同じにするクロス効率値 η_{ja}^{R} を用いる方法**

DEA の問題を解いたときにどこかの端点解が求められるということを考えた場合、(3.3) 式の満足度を用いることが必ずしも良いとは限らない。なぜならば、ある DMU によってはとり得る最大値付近に端点が多いかもしれないし、逆の場合もあり得るからである。そこで、端点の情報をすべて利用した調整済満足度という考え方を導入する。各端点毎のクロス効率値 $\eta_{ja}^{(s)}$ を小さい順に並べたものの l 番目の値を η_{ja}^{l} とする。そのとき、クロス効率値 η_{ja}^{R} の調整済満足度 $f_{ja}(\eta_{ja}^{R})$ を (3.13) 式で定義する。

$$f_{ja}(\eta_{ja}^{R}) = \frac{1}{N_a - 1} \cdot \left\{ \frac{\eta_{ja}^{R} - \eta_{ja}^{l}}{\eta_{ja}^{l+1} - \eta_{ja}^{l}} + (l-1) \right\}\,,\ \left(\eta_{ja}^{l} \leq \eta_{ja}^{R} \leq \eta_{ja}^{l+1}\,,\ l = 1, \ldots, N_a - 1 \right) \tag{3.13}$$

この調整済満足度 $f_{ja}(\eta_{ja}^{R})$ の値を決める (与える) ことによって、修正クロス効率値の範囲の中からある一つの値 η_{ja}^{R} を決めることができる。与えられた調整済満足度を f_{ja}^{R} とすると、そのときのクロス効率値 η_{ja}^{R} は (3.14) 式で与えられる。

$$\eta_{ja}^{R} = \left\{ (N_a - 1) f_{ja}^{R} - (l-1) \right\} \cdot (\eta_{ja}^{l+1} - \eta_{ja}^{l}) + \eta_{ja}^{l}\,,\ \left(\frac{l-1}{N_a - 1} \leq f_{ja}^{R} \leq \frac{l}{N_a - 1} \right) \tag{3.14}$$

ここで示した 4 つの基準は、他の (D 効率的な)DMU a からの評価を最大値や最小値という情報だけでなく、とり得る値をなるべく使って中間的な評価をしたい場合に有効である [10] 。

3.3. 一つの値に決められた修正クロス効率値の特徴

次に、様々な方法で一つの値に決められた修正クロス効率値の特徴をまとめる。

1. 調整済満足度が 0.5 に対するクロス効率値は、その中央値と一致する。
2. 一般的に算術平均値は幾何平均値よりも大きいが、変動係数 (または、標準偏差) が大きいと、算術平均値に比べて幾何平均値の小さくなる度合いも大きくなっている。ばらつきも考慮してクロス効率値を求めるならば、算術平均値よりも幾何平均値の方が良い。
3. 調整済満足度が 0.5 の場合は、歪度が正ならば、クロス効率値の算術平均値の方が中央値 (調整済満足度による値) よりも大きく、負ならば、その逆の傾向が見られる。

さらに、各方法の特徴をより明らかにするために、クラスター分析 (ウォード法) を行った結果のデンドログラム (樹系図) を図 2 に示す [11] 。非類似度には 1 から相関係数を引いた値を用いる。

---

[10] 厳密に考えれば、(3.5),(3.6) 式を満たす領域の情報 (多次元の体積など) を使うべきだが、これは非常に難しく、端点になる最適解を使い、中間的な評価を行うのは、必然性があるというよりも、簡便性に重きを置いているためである。4 つの方法は簡便に評価をするための様々な方法を示したもので、必ずしもこの 4 つに限られるわけではない。

[11] 刀根 [15] の図書館データの一部 (東京 23 区中、人口の少ない順に 11 区) による 5 入力 2 出力の CCR モデルの結果である。

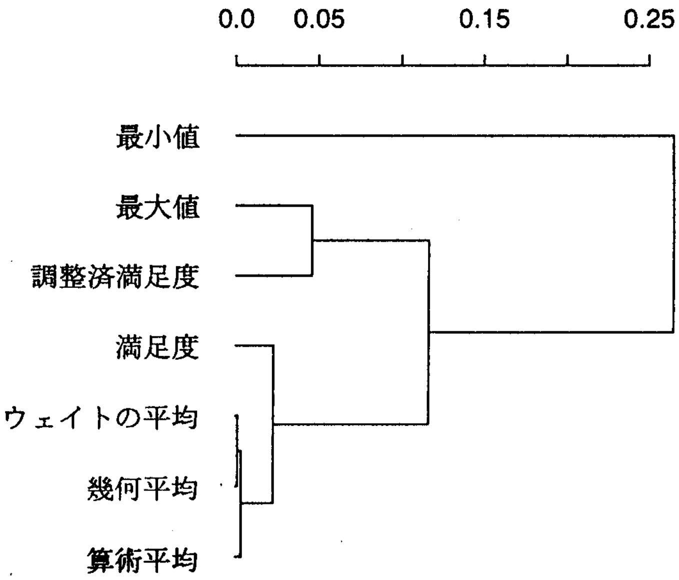


図 2: クラスター分析 (ウォード法) による各方法の分類

4. ウェイトの平均値を使ったクロス効率値 η_{ja}^{W} は、算術平均値よりも幾何平均値に近い値を取る。
5. D 効率的な DMU では、0.5 の満足度、ウェイトの平均値、算術平均値、幾何平均値に比べて、調整済満足度によるクロス効率値 (中央値) は大きく離れた値になる。これは、歪度の絶対値が大きいと、満足度と調整済満足度との間に差が出やすいためである。
6. 歪度が負の値をほとんど取っていると、最大値と調整済満足度 (0.5 の値) が近い値を取りやすくなる。
7. 最小値は、他の値に比べて、大きく離れている。値自体も離れているが、変動の大きさも違うことが分かる。

これらの特徴から、基準の選択方法を以下に示す。

(a) 極端な値を重視したい場合には、最小値または最大値を選択する。
(b) とり得る範囲を重視したい場合には、満足度による値を選択する。
(c) 普通に平均的な値を重視したい場合には、算術平均値を選択する。
(d) 平均的な値とともに各値のばらつきも考慮したい場合には、幾何平均値、ウェイトの平均値を選択する。
(e) とり得る各値を重視したい場合には、調整済満足度による値を選択する。
(f) 平均的な値を重視したいが、満足度や調整済満足度のような基準も含みたい場合には、満足度や調整済満足度が 0.5 になる値を選択する (調整済満足度は中央値になる)。

大きく分けると、(a) の極端な値と、それ以外の中間的な値を用いる方法があるが、状況 (評価基準) を考えて選択することにより、得られる評価結果を有効に用いることができると考えられる。また、すべての基準で評価し、それらを比べることによって、DMU を特徴づけることもできる。他のケースでも、全体的に見れば、ほぼ同じように特徴付けられると思われるが、各ケース毎に考察は必要である。また、Oral *et al.* [12] や Doyle *et al.* [4] の

モデルで決められるクロス効率値は、極端な値(最大値、最小値)を重視したい場合に相当するが、図2から、本研究で示した他の基準とはDMUの評価の際に、かなり異なる影響を及ぼすことが分かる。

4. クロス効率値を用いた評価法

クロス効率値 $\eta_{ja}\,(j=1,\ldots,n \text{ and } a=1,\ldots,n)$ を用いて各DMUの評価をする場合、その一つのケースとして(4.1)式に示す平均クロス効率値 $\overline{\eta}_j\,(j=1,\ldots,n)$ が使われている [13]。

$$\overline{\eta}_j = \frac{1}{n}\boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{\eta}_j\,,\ (j=1,\ldots,n) \tag{4.1}$$

ここで、$\boldsymbol{e}_n^T=(1,\ldots,1)\in R^n$, $\boldsymbol{\eta}_j=(\eta_{j1},\ldots,\eta_{jn})^T\in R^n$ である。$\overline{\eta}_j$ は、DMU a を対象にしたときのウェイトで計算されるDMU j のクロス効率値を用いて、平均的に(自分も含めて)他からどのように評価されているかを示す。そこで、クロス効率値を用いた評価を詳しく議論するために、平均クロス効率値以外の方法として、加重平均クロス効率値による評価法、満足度による評価法(満足度、調整済満足度)、その他の評価法(幾何平均値、最大値、最小値)を示し、平均クロス効率値も含めて比較・検討する。

4.1. 加重平均クロス効率値による評価法

平均クロス効率値はDMU j のクロス効率値を同じ重み、つまりすべて $\frac{1}{n}$ の重みを掛けて求められる。これを一般化して、(4.2)式に示す $\boldsymbol{w}=(w_1,\ldots,w_n)^T$ の重みを掛けた加重平均クロス効率値 η_j^E により、DMUを評価する方法を示す。

$$\eta_j^E = \boldsymbol{\eta}_j^T\boldsymbol{w}\,,\ (j=1,\ldots,n) \tag{4.2}$$

重み $\boldsymbol{w}$ を決める方法として、効率値最大化法を示す。効率値最大化法は、クロス効率値により評価を行うDMU(対象DMU a)に付ける重み $\boldsymbol{w}$ をできるだけ自分に都合良く決める方法、つまり、DMUそれぞれの加重平均クロス効率値ができるだけ大きくなるように決める方法である。単純な平均では他のDMUから付けられた評価をすべて同じく扱う($\frac{1}{n}$倍する)のに対し、この方法は各DMUの意思を重み $\boldsymbol{w}$ に反映させることができる。これは次の多目的計画問題MOLP-CEとして定式化できる。ただし、重み $\boldsymbol{w}$ の合計は 1 という制約を置く(一般性を失うことはない)。

【MOLP-CE】

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \boldsymbol{\eta}_j^T\boldsymbol{w}\,,\ (j=1,\ldots,n) && (4.3)\\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{w}=1 && (4.4)\\ & \boldsymbol{w}\geq \mathbf{o} && (4.5) \end{aligned}$$

この多目的計画問題の単一目的関数化(スカラー化)手法によるアプローチには、様々なものが考えられるが、ここでは条件付き等加重平均効率値最大化法を示す[12]。この方法は、

[12] n 個の目的関数に適当な重み係数 $\alpha_j>0\,(j=1,\ldots,n)$ を掛け合わせて問題を単一目的関数にして解く方法も考えられる(加重平均効率値最大化法と呼ぶ)。この問題の解は $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot\eta_{ja}\,,\ (a=1,\ldots,n)$ の中の最大値を持つDMU a に対する w_a が 1 となる。

目的関数をすべて同じ重みで加算し、さらに重み w_a を加重平均クロス効率値(各DMUに対する評価値)に依存して決めるという条件を付ける(問題WNLP-CEの中の(4.7)式に対応する)方法である。これは、DMUに対する評価を重みに反映させることによって多目的に対して妥協(合意)する一つの方法(基準)と考えることができる。これは次の問題WNLP-CEに定式化できる。

【WNLP-CE】

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximize} \quad & \boldsymbol{e}_n^T H\boldsymbol{w} && (4.6)\\
\textbf{subject to} \quad & H\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w} && (4.7)\\
& \boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{w} = 1 && (4.8)\\
& \boldsymbol{w} \geq \mathbf{o} && (4.9)
\end{aligned}
$$

ここで、H はクロス効率性行列を表す。この方法は杉山ら [14] の固有ベクトルからDMUの重要度を計算する方法と等価である。(4.7)式を行列 H に対する固有値問題として考えると、λ は固有値を表す。さらに、(4.7)式に左から $\boldsymbol{e}_n^T$ を掛け、(4.8)式の条件を加えると(4.10)式が導かれる。

$$\boldsymbol{e}_n^T H\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{w} = \lambda \tag{4.10}$$

(4.10)式を用いると、問題WNLP-CEの目的関数は、

$$\textbf{max} \quad \lambda \tag{4.11}$$

となり、加重平均クロス効率値を求めるのに用いる重みは、(4.8)式の条件のもとで(4.7)式に示す固有値問題を解いたときに得られる最大固有値に対する最大固有ベクトル $\boldsymbol{w}^*$ として求めることができる。$H \geq 0$ であるので、ペロン・フロベニウス(Perron-Frobenius)の定理より、(4.9)式の条件(制約式)は満たされる。そして、求められた加重平均クロス効率値ベクトル $H\boldsymbol{w}^*$ は、(4.7)式より $\lambda\boldsymbol{w}^*$ となる。したがって、各DMUの加重平均クロス効率値を最大にする多目的計画問題MOLP-CEを条件付き等加重平均効率値最大化法で(問題WNLP-CEに置き換えて)解く方法は、杉山ら [14] の固有ベクトルからDMUの重要度を計算する方法に相応すると解釈できる。逆に言えば、固有ベクトルによってDMUの重要度を算出するのは、その背後にこれらの考え方が潜んでいると考えることができ、このような場合にこの評価方法は有効に機能すると考えられる。

4.2. 満足度を用いた評価法

(1) 満足度均等化法による評価法

クロス効率値の最大値で評価されれば、これ以上でとり得る良い値はないので最も満足と、最小値で評価されれば、これ以下でとり得る悪い値はないので、最も不満足と考えるならば、次に示す評価値 $d_j(\eta_j^S)$ はとり得る値を基準にして0から1の値をとる満足度と考えることができる。

$$d_j(\eta_j^S) = \frac{\eta_j^S - \eta_j^L}{\eta_j^U - \eta_j^L},\ (j = 1, \ldots, n) \tag{4.12}$$

これは、最大値 η_j^U と最小値 η_j^L を用いて各DMUの満足度を同じにするクロス効率値を評価値として用いる方法である。この満足度 $d_j(\eta_j^S)$ の値を決める(与える)ことによって、ク

ロス効率値の評価値 η_j^S を決めることができる。与えられた満足度を d_j^S とすると、そのときの評価値 η_j^S は (4.13) 式で与えられる。

$$\eta_j^S = d_j^S \cdot (\eta_j^U - \eta_j^L) + \eta_j^L\,,\ (j = 1, \ldots, n) \tag{4.13}$$

(2) 調整済満足度均等化法による評価法

満足度均等化法はクロス効率値の最大値と最小値を直線で結んだ関数を評価関数として想定している。しかし、DMU j の各クロス効率値を評価値として満足度に直し (基準化し)、それらを小さい順に並べ、折れ線グラフにすると必ずしも直線にはなっていない。そこで、3.2節で示した調整済満足度の考え方を導入し、DMUの各クロス効率値を反映した評価関数に依存する満足度を同じにする方法を考える。クロス効率値として得られた値をそれぞれ評価値に反映させるために、各DMU毎に (4.14) 式に示す評価関数 $f_j(\eta_j^R)$ を定義する。

$$f_j(\eta_j^R) = \frac{1}{n-1} \cdot \left\{ \frac{\eta_j^R - \eta_j^l}{\eta_j^{l+1} - \eta_j^l} + (l-1) \right\}\,,\ (\eta_j^l \leq \eta_j^R \leq \eta_j^{l+1}\,,\ l = 1, \ldots, n-1) \tag{4.14}$$

ここで、η_j^k は $\eta_{ja}(a = 1, \ldots, n)$ を小さい順に並べた k 番目の値であり、

$$\eta_j^L = \eta_j^1 \leq \eta_j^2 \leq \cdots \leq \eta_j^{n-1} \leq \eta_j^n = \eta_j^U$$

となる。そして、この評価関数として得られた値 $f_j(\eta_j^R)$ を調整済満足度とする。

この調整済満足度 $f_j(\eta_j^R)$ の値を決める (与える) ことによって、クロス効率値による評価値 η_j^R を決めることができる。与えられた調整済満足度を f_j^R とすると、そのときの評価値 η_j^R は (4.15) 式で与えられる。

$$\eta_j^R = \left\{ (n-1) f_j^R - (l-1) \right\} \cdot (\eta_j^{l+1} - \eta_j^l) + \eta_j^l\,,\ \left(\frac{l-1}{n-1} \leq f_j^R \leq \frac{l}{n-1} \right) \tag{4.15}$$

この方法は、他のDMU が評価した値の範囲 (最大値と最小値の間) の中で、その中間的な評価を表す満足度、もしくは調整済満足度という点を考慮したい場合に有効である。

4.3. その他の評価法

(1) 幾何平均値による評価法

幾何平均値 η_j^G は、(4.16) 式で計算できる。

$$\eta_j^G = \sqrt[n]{\prod_{a=1}^{n} \eta_{ja}}\,,\ (j = 1, \ldots, n) \tag{4.16}$$

この評価方法は、他のDMUからの評価のばらつきも考慮して、平均的な評価をする場合に有効である。

(2) 最大値による評価法

最大値 η_j^U は (4.17) 式で示すことができる。

$$\eta_j^U = \max_a\ \eta_{ja}\,,\ (j = 1, \ldots, n) \tag{4.17}$$

この評価方法は、他のDMUからの評価の中で最も良く評価してくれるDMUの評価を用いる場合に有効である。クロス効率値の最大値はD効率値と一致するため、最大値による評価法は通常のDEAによる評価を表す。

(3) **最小値による評価法**

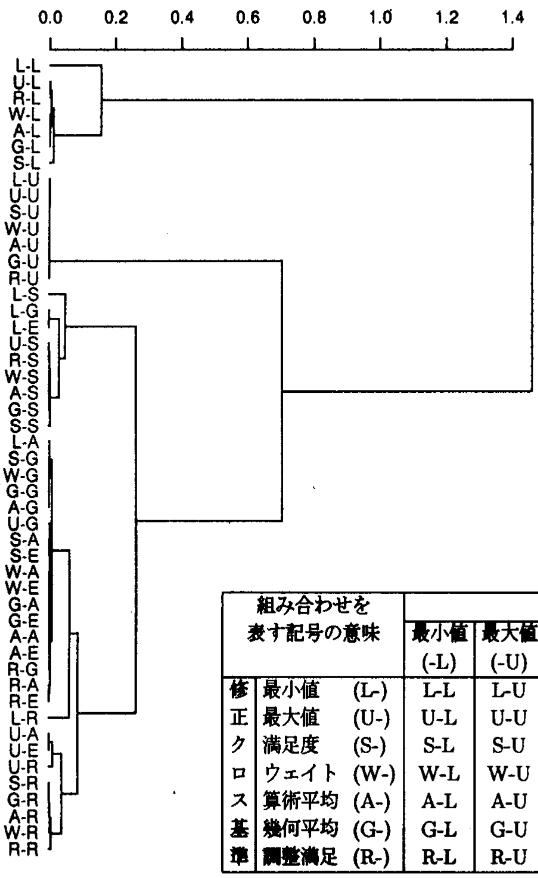
最小値 η_j^L **は** (4.18) **式で示すことができる。**

$$\eta_j^L = \min_{a} \ \eta_{ja} \, , \, (j = 1, \ldots, n) \tag{4.18}$$

この評価方法は、他の DMU **からの評価の中で最も悪く評価する** DMU **の評価を用いる場合に有効である。**

4.4. クロス効率値を用いた評価法の特徴

修正クロス効率値を一つに決める 7 **種類の基準とクロス効率値の** 7 **種類の評価法の組み合わせによる** 49 **種類の評価法に対して、クラスター分析** (**ウォード法**) **を行った結果のデンドログラム** (**樹系図**) **を図**3**に示す** [13] 。**非類似度を表す値として、**1 **から相関係数を引いた値を用いる。**



組み合わせを表す記号の意味		クロス効率値の評価方法						
		最小値 (-L)	最大値 (-U)	満足度 (-S)	算術平均 (-A)	幾何平均 (-G)	条件平均 (-E)	調整満足 (-R)
修	最小値 (L-)	L-L	L-U	L-S	L-A	L-G	L-E	L-R
正	最大値 (U-)	U-L	U-U	U-S	U-A	U-G	U-E	U-R
ク	満足度 (S-)	S-L	S-U	S-S	S-A	S-G	S-E	S-R
ロ	ウェイト (W-)	W-L	W-U	W-S	W-A	W-G	W-E	W-R
ス	算術平均 (A-)	A-L	A-U	A-S	A-A	A-G	A-E	A-R
基	幾何平均 (G-)	G-L	G-U	G-S	G-A	G-G	G-E	G-R
準	調整満足 (R-)	R-L	R-U	R-S	R-A	R-G	R-E	R-R

図 3: **クラスター分析** (**ウォード法**) **による各方法の分類**

これらから分かる特徴をまとめる。ここで、クラスター分析は相関係数によって分類されているため、評価値そのものではなく、各種方法の変動の仕方によって分類されていることを確認しておく。

[13] **入出力データなどは、**3.3**節と同じである。**

1. クロス効率値の評価法として、最小値 (-L)、最大値 (-U) を用いると (D 効率的な DMU が全体の約 27%であるため)、どの基準を使って修正クロス効率値を一つに決めてもほとんど変わらない。また、満足度 (-S)、調整済満足度 (-R) もそれぞれ 0.5 の場合には、一部を除きほとんど変わらないことが分かる。これは、修正クロス効率値を決める基準は D 効率的な DMU に対してのみ影響するからである。
2. 修正クロス効率値を決める基準として最小値、最大値を使うと、クロス効率値による評価法として、算術平均値、幾何平均値、条件付き等加重平均値という平均値をとるものはほとんど変わらない。また、調整済満足度も 0.5 のときは中央値になるので、同様の結果になる。
3. クロス効率値の評価法として、算術平均値と条件付き等加重平均値が似た変動をしている。

これらの特徴から、次のように評価方法を選択することができる。

(a) 極端な値を重視したい場合には、最小値または最大値を選択する。
(b) とり得る範囲を重視したい場合には、満足度による値を選択する。
(c) 普通に平均的な値を重視したい場合には、算術平均値、条件付き等加重平均値を選択する。
(d) 平均的な値とともに各値のばらつきも考慮したい場合には、幾何平均値を選択する。
(e) とり得る各値を重視したい場合には、調整済満足度による値を選択する。
(f) 平均的な値を重視したいが、満足度や調整済満足度のような基準も含みたい場合には、満足度や調整済満足度が 0.5 になる値を選択する (調整済満足度は中央値になる)。

大きく分けると、(a) の極端な値と、それ以外の中間的な値を用いる方法があるが、状況 (評価方法) を考えて選択することにより、得られる評価結果を有効に用いることができると考えられる。また、すべての評価方法による結果を比べることによって、DMU を特徴づけることもできる。

他のケースでも、全体的に見れば、ほぼ同じように特徴付けられると思われるが、各ケース毎に考察は必要である。

5. おわりに

DEA において他の DMU からの評価値であるクロス効率値における任意性の問題と不公平性の問題に対し、提案した修正クロス効率値を用いることによって、これらの問題点が解決できることを示した。クロス効率値を範囲で求めた後に、何らかの適切な基準を用いて一つの値に決めることによって、これらの問題を解決しようというのが基本的な考え方である。それと同時に、範囲の大きさを直接、DMU の特徴付けに利用することもできる。

ところで、範囲を求めるという考え方は DEA における他の問題へも広く応用できる。Boussofiane *et al.* [1] は、仮想入出力値 [14] を用いた DMU の特徴付けを提案している。しかし、DMU が D 効率的な場合、これらの仮想入出力値もウェイトやクロス効率値と同様に、一意に決まるとは限らず、特徴付けを適切にすることができない可能性があるという問題点がある。そこで、福川ら [7] は仮想入出力値の最大値と最小値をそれぞれ求めることによってこの問題点を解決し、適切な特徴付けの方法を示している。これは、範囲を求めるという考え方に基づく応用研究の一つである。

[14] 仮想入力 (出力) 値とは、入力 (出力) 値にウェイトを掛けたもので、$X_{ij} \cdot v_{ia}$ ($Y_{rj} \cdot u_{ra}$) のことである。

次に、D 効率的な DMU の修正クロス効率値は範囲を持つことになるが、その中で一つの値に決める 7 種類の基準を示した。修正クロス効率値の持つ範囲の中から一つの値を決める基準 (方法) については、最大値、最小値以外の方法として、満足度や最適ウェイトとしてとり得るすべての端点を列挙し、それらの情報を用いた基準を示した。修正クロス効率値はウェイトのすべての組み合わせを決めることは難しいということから提案されたものである。もちろん、ウェイトの組み合わせは無数に存在するが、その端点として求められる最適基底解 (ウェイト) を修正クロス効率値に利用することは、その有用性を一層高めるものとして期待できる。実際に端点解として得られるウェイトを簡単に (手軽に) すべて求めることは難しいと考えていたが、Fukuda [5, 6] のプログラム (`cdd.c`) を利用すれば、容易に可能である。ところで、一つに決める様々な基準を示したが、その中から何を選択するかは、3 節で議論したように、その特徴に合わせて決めることになる。

さらに、クロス効率値を用いた評価法についても考察した。平均クロス効率値 (算術平均値) 以外のクロス効率値による評価法として、加重平均クロス効率値、満足度、調整済満足度、幾何平均値、最大値、最小値による方法を示した。特に、条件付き等加重平均クロス効率値による DMU の評価方法が杉山ら [14] が提案している固有ベクトルから DMU の重要度を計算する方法と等価であることを示し、杉山らの方法の意味付けを与えることもできた。そして、クラスター分析などにより、各方法の特徴について比較・検討した。各方法の中から何を選択するかは、4節で議論したように、その特徴に合わせて決めることになる。

3節の修正クロス効率値を一つに決める方法はクロス効率性行列の作成方法のため、4節のクロス効率値を用いた評価法はクロス効率値を一つの評価データ行列と見なした (他の DMU による評価基準を使った多基準決定問題と考えた) 評価法のための方法論である。方法論として柔軟になればなるほど (自由度が増えれば増えるほど)、その使い方を考えなければならなくなる。そのためにも、様々な数値例に対して分析することによって、本論文で示した修正クロス効率値を一つに決める基準やクロス効率値による評価法の有用性をより明らかにすることが今後取り組むべき課題である。

また、DMU を評価する場合の解の候補が DMU の効率値に関する詳しい情報を与える可能性があることの研究も行われている [15]。刀根 [15] のデータを用いた数値例では、D 効率的な 3 DMU を含む 11 DMU に対して解の候補は 30 個であったが、クロス効率値に比べて、解の候補が膨大になる可能性が生じるデメリットもある。そのため、解の候補が少ない場合には、DMU の特徴をより詳しく分かるというメリットを簡単に享受できるが、解の候補数が膨大な場合には、DMU の評価においてクロス効率値を用いる意味は十分に大きい [16]。評価に対する解の候補の利用可能性についても、今後詳しく議論する必要がある。

【 謝辞 】

本研究を行うのに際し、Double Description 法のプログラム (`cdd.c`) を利用させていただいた福田公明先生に感謝いたします。

[15] 解の候補とは、どれか一つの DMU が D 効率的と判定される (端点解として求められる) ウェイトの組み合わせによって計算された (クロス) 効率値のことである。ある DMU を対象にしたときのクロス効率値はこの中に必ず含まれるため、解の候補と呼ぶ。

[16] 23 区全部のデータを用いる場合でも、D 効率的な DMU は 7 個であり、解の候補は 62 個で済む。DMU の数が多くなれば、D 効率的な DMU が多くなり、それにつれて、解の候補も多くなると予想できる。通常の場合は、D 効率的な DMU は D 非効率的な DMU に比べて少ないので、この程度の DMU の数では膨大になる可能性はかなり少ないと考えられる。この数値例を用いた基礎的な研究が枇々木 [11] によって行われている。

References

[1] A.Boussofiane, R.G.Dyson and E.Thanassoulis : Applied data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, **52** (1991) 1-15.

[2] A.Charnes, W.W.Cooper, A.Y.Lewin and L.M.Seiford : *Data Envelopment Analysis : Theory, Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[3] A.Charnes, W.W.Cooper and E.Rhodes : Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, **2** (1978) 429-444.

[4] J.Doyle and R.Green : Data Envelopment Analysis and Multiple Criteria Decision Making. *OMEGA*, **21** (1993) 713-715.

[5] K.Fukuda : cdd.c : C-implementation of the Double Description Method for Computing All Vertices and Extremal Rays of a Convex Polyhedron given by a System of Linear Inequalities. *Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology*, Lausanne, Switzerland, 1993.

[6] K.Fukuda : cdd User Manual, 1994.

[7] 福川忠昭, 梁瀬航太郎, 枇々木規雄, 河村二郎 : 包絡分析法 (DEA) における仮想入出力値を用いた事業体の経営効率の特徴づけと順序づけ. 慶應経営論集, **12** (1995) 205-213.

[8] 枇々木規雄 : 2 段階 DEA を用いた修正クロス効率値による評価法. 慶應義塾大学理工学部管理工学科 テクニカルレポート, **93015** (1993).

[9] 枇々木規雄 : DEA における修正クロス効率値による評価法. 日本 OR 学会「評価の OR」研究部会・配布資料 [1994 年 11 月 12 日].

[10] 枇々木規雄 : DEA における修正クロス効率値を一つに決める方法. 慶應義塾大学理工学部管理工学科 テクニカルレポート, **95004** (1995).

[11] 枇々木規雄 : DEA におけるクロス効率値を用いた評価法. 慶應義塾大学理工学部管理工学科 テクニカルレポート, **95005** (1995).

[12] M.Oral, O.Kettani and P.Lang : A Methodology for Collective Evaluation and Selection of Industrial R & D Projects. *Management Science*, **37** (1991) 871-885.

[13] T.R.Sexton, R.H.Silkman and A.J.Hogan : Data Envelopment Analysis : Critique and Extensions. In R.H.Silkman(eds.) : *Measuring Efficiency : An Assessment of Data Envelopment Analysis* (Jossey Bass, San Francisco, 1986), 73-105.

[14] 杉山学, 山田善靖 : 事業体間の相互評価情報を用いた調和的な効率性評価法. *Journal of Operations Research Society of Japan*, **39** (1996) 159-175.

[15] 刀根薫 : 企業体の効率的分析手法 –DEA 入門– (1)–(5). オペレーションズ・リサーチ, **32**(1987)-**33**(1988).

[16] 刀根薫 : 経営効率性の測定と改善 —包絡分析法DEA による—, 日科技連, 1993.

枇々木 規雄

〒 223-8522 **横浜市港北区日吉** 3–14–1

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

E-mail : `hibiki@ae.keio.ac.jp`