積立金額が可変の場合に活用できる積立投資の法則 (ルール)

枇々木 規雄
慶應義塾大学 理工学部

2023 年 3 月 31 日

1. はじめに

枇々木 [1] は積立投資に活用できる法則 (ルール) として、「126 の法則」を提案している[1]。これは、積立貯蓄・投資を定額で行うという前提のもとで、元本の 2 倍になるにはおおよそ「年数 $\times$ 利率 $= 126$」(利率はパーセント表示) が成り立つという法則である[2]。この法則のポイントは、離散複利・離散積立の場合、元本に対する倍率に対応して「年数 $\times$ 利率」(ルール数) が年数と利率の組み合わせにかかわらず、「ほぼ」一定値になることを明らかにしたことである。また、枇々木 [2] は、連続複利・連続積立の場合には「ほぼ」ではなく、一定値になることも示している。一方で、積立を行う場合、若いときの積立金額は少ないが、徐々に積立金額を増加させる計画を立てるなど、積立金額を変更させていくことも考えられる。たとえば、40 年間月初に投資をする場合、図 1 のように、最初の 10 年間は毎月 1 万円、それから 10 年ごとに、2 万円、3 万円と増やしていき、最後の 10 年間は 4 万円を積み立てる場合が考えられる[3]。

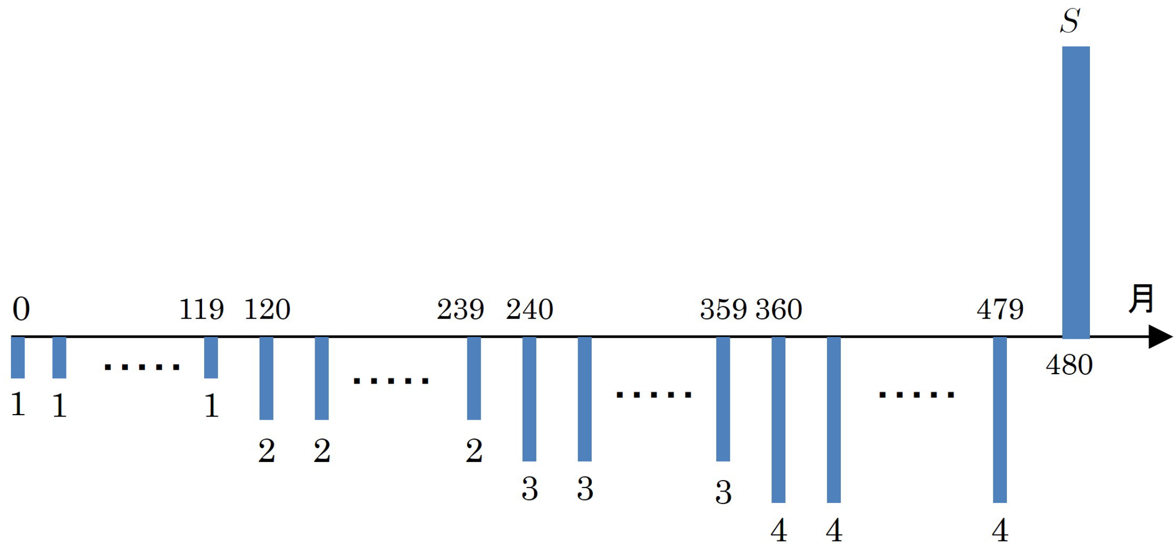

図 1: 積立金額が可変の場合 (例)

本稿では、積立金額が可変の (定額でない) 場合でも、この法則が成り立つ、つまり任意の倍率と積立金額のパターンに対応して、一意にルール数が決まることを示す。また、積立元本の合計が同じでも積立金額のパターンが異なれば、2 倍になるルール数も異なる。たとえば、初期の積立金額が多い方が少ない場合よりも、より低い利率で 2 倍を達成できるので、ルール数は小さくなるからである。そこで、積立金額のパターン (時系列的な特徴) を表す尺度として、マコーレー・デュレーショ

[1] 枇々木 [1, 2] では 126 ルールと呼んでいるが、一括投資に対する 72 の法則に合わせて、「126 の法則」と呼ぶ。
[2] この法則は利率が確定的な場合、もしくは事後的に計算された内部収益率を利率として用いた場合に成り立つ。
[3] 投資信託協会 [4] は、20 代で 1 万円、30 代で 1.5 万円、40 代で 2 万円、50 代で 3 万円というように、年代別に積立金額を増やしていく前提で積立モデルケースシミュレーションを行っている。

ン (以降、デュレーションと呼ぶ) を計算し、それを年数で割った基準化済みデュレーションを定義し、ルール数との関係も示す。

2. 積立金額が可変の場合

一般に、積立投資は一般に毎月一定額を積み立てていくが、時間が経つにつれて、金額を変更して積み立てることもできる。積立年数を n、年内の積立回数を m 回として、n 年間を K 個の期間に分けて積立金額を更新し、mn 回にわたり積立投資して、満期に S が得られる場合のキャッシュフローを想定しよう。月初に積み立てる場合には、$m = 12$ となる。ここで、r を利率 (年率)、N_k を k 分割期間の年数、M_k を k 分割期間の毎期の積立金額とする。また、$W_1 = n, W_k = W_{k-1} - N_{k-1}\ (k = 2, \ldots, K+1)$ とする[4]。満期額 S は毎期の投資額の満期価値の合計なので、満期額 S は積立金額 M_k と次のように関係づけることができる。

$$S = \sum_{k=1}^{K} \left\{ \sum_{t=1}^{mN_k} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^t \right\} M_k \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mW_{k+1}} \tag{2.1}$$

この数式では展開しにくいので、積立金額の増分を満期まで投資をすると考えることにしよう。

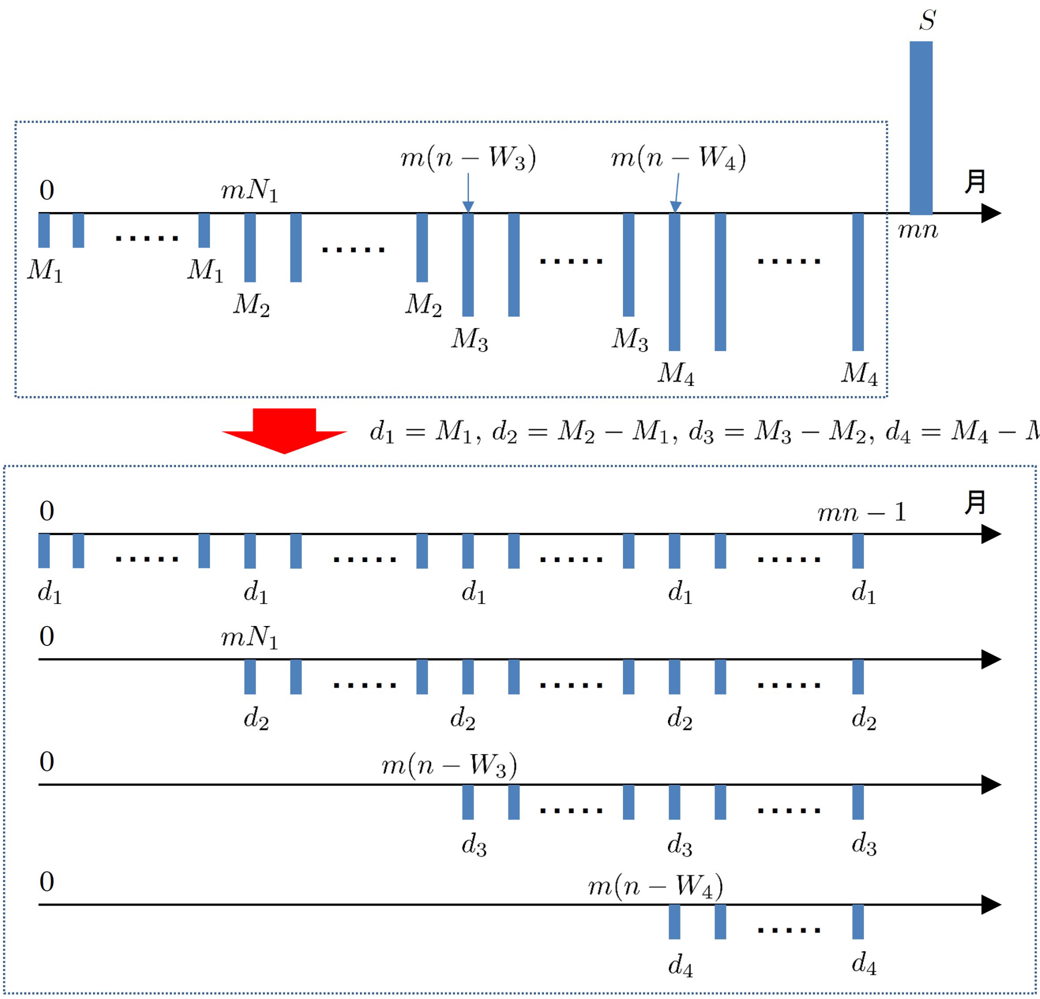

図 2: 積立金額が可変の場合のキャッシュ・フローの分解

$k-1$ 分割期間から k 分割期間への積立金額の増分を d_k とすると、$d_1 = M_1, d_k = M_k - M_{k-1}\ (k = 2, \ldots, K)$ となる。図 1 を一般化したキャッシュ・フローと、それを 4 つに分解したものを図 2 に示

[4]図 1 の場合、$K = 4,\ N_k = 10\ (k = 1, 2, 3, 4),\ W_1 = 40,\ W_2 = 30,\ W_3 = 20,\ W_4 = 10,\ W_5 = 0,\ W_5 = 0,\ M_1 = 1,\ M_2 = 2,\ M_3 = 3,\ M_4 = 4$ である。

す。このように考えると、満期までの投資金額の価値を簡単に計算できるのが分かるだろう。

また、k 分割期間の積立金額の増分を投資する年数の全体の年数に占める割合を w_k とすると、$w_k = \frac{W_k}{n}\ (k=1,\ldots,K)$ となる。そのとき、満期額 S は次のように記述することができる。

$$S = \sum_{k=1}^{K} \left\{ \sum_{t=1}^{w_k nm} \left(1+\frac{r}{m}\right)^t \right\} d_k = \sum_{k=1}^{K} \left[\frac{\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{w_k nm} - 1\right\}\left(1+\frac{r}{m}\right)}{\frac{r}{m}} \right] d_k \tag{2.2}$$

一方、積立金額の合計 P は以下のように記述できる。

$$P = nm \sum_{k=1}^{K} w_k d_k \tag{2.3}$$

したがって、積立元本額 (合計) P に対する満期額 S の倍率 y は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{S}{P} = \frac{1}{nm\sum_{u=1}^{K} w_u d_u} \sum_{k=1}^{K} \left[\frac{\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{w_k nm} - 1\right\}\left(1+\frac{r}{m}\right)}{\frac{r}{m}} \right] d_k \\ &= \frac{1}{a}\left(1+\frac{a}{nm}\right) \sum_{k=1}^{K} v_k \left\{ \left(1+\frac{a}{nm}\right)^{w_k nm} - 1 \right\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

と書くことができる。ただし、$v_k = \frac{d_k}{\sum_{u=1}^{K} w_u d_u}$, $a = nr$ である[5]。a はルール数 (rule number) を 100 で割った値で、ルール値 (rule value) と呼ぶ。また、枇々木 [2] を参考にして、$m \to \infty$ とすると、以下のように書き直すことができる。

$$y = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{K} v_k \left(e^{w_k a} - 1\right) \tag{2.5}$$

積立金額が可変の場合でも、連続複利・連続積立の場合には、倍率 y に対して、ルール値 a は一意に決まることが分かる。離散積立の場合には、n や m に依存するが、(2.5) 式で得られるルール値 a の値にほぼ近い値が得られると期待できる。

ところで、一括投資も投資開始時点のみキャッシュ・フローがあると想定できるので、$K=2$, $M_1=1$, $M_2=0$, $w_1=1$, $w_2 = 1-\frac{1}{nm}$ と設定することができる。積立金額の増分は、$d_1=1$, $d_2=-1$ となる。これを (2.4) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\frac{a}{nm}}\left(1+\frac{a}{nm}\right)\left[\left\{\left(1+\frac{a}{nm}\right)^{nm} - 1\right\} - \left\{\left(1+\frac{a}{nm}\right)^{nm-1} - 1\right\}\right] \\ &= \left(1+\frac{a}{nm}\right)^{nm} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm} \end{aligned} \tag{2.6}$$

となり、一括投資の場合の算出式が得られる。

[5]毎月定額積立の場合、$K=1$, $w_1=1$, $v_1=1$ なので、(2.4) 式は以下のように記述できる。

$$y = \frac{1}{a}\left(1+\frac{a}{nm}\right)\left\{\left(1+\frac{a}{nm}\right)^{nm} - 1\right\}$$

3. デュレーション

金額を変更して積み立てる場合、その積立金額の合計が同じでも、積立金額の時系列的な違いは将来価値に影響を与える。たとえば、積立期間を 40 年間として、前半の 20 年間を毎月 1 万円、後半の 20 年間を毎月 2 万円を積み立てる場合、積立金額の合計は $1 \times 12 \times 20 + 2 \times 12 \times 20 = 720$ 万円となる。前半を 2 万円、後半を 1 万円としても積立金額の合計は同様に 720 万円であるが、利率が一定の場合、将来価値は後者の方が高くなる。このような積立金額の時系列的な特徴を表すために、デュレーションを用いる。デュレーションは、各時点のキャッシュ・フローの現在価値の時間加重平均であり、時間価値を考慮したキャッシュ・フローの重心と考えられるからである。一般にデュレーションを計算する際には、キャッシュ・フローの現在価値を用いて計算するが、以降では将来価値を用いて計算する。デュレーションは、分母も分子も現在価値で計算するため、将来価値を用いても現在価値への割引を相殺することができるからである。

年あたり積立回数を m とし、u 年間にわたって期末に 1 を積立する場合の将来価値を $F_0(u)$、期初に 1 を積立する場合の将来価値を $F_1(u)$ とすると、

$$F_0(u) = \sum_{t=0}^{um-1} \left(1+\frac{r}{m}\right)^t = \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{um}-1}{\frac{r}{m}} \tag{3.1}$$

$$F_1(u) = \left(1+\frac{r}{m}\right) F_0(u) \tag{3.2}$$

となる。一方、u 年間期初に 1 を積立する場合の将来価値の時間加重和 $S(u)$ は、以下のように求めることができる[6]。

$$S(u) = \sum_{k=1}^{um-1} \frac{k}{m} \left(1+\frac{r}{m}\right)^{um-k} = \frac{1}{r}\left(1+\frac{r}{m}\right)(F_0(u)-um) \tag{3.3}$$

したがって、n 年間にわたって、期初に毎月一定額を積み立てる場合のデュレーション $D(n)$ は以下のように求めることができる。

$$D(n) = \frac{S(n)}{F_1(n)} = \frac{1}{r}\left(1-\frac{nm}{F_0(n)}\right) = \frac{1}{r}\left(1-\frac{nr}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}-1}\right) \tag{3.4}$$

デュレーション $D(n)$ は積立年数が長くなればなるほど大きくなる[7]。そこで、積立年数にかかわらず、積立期間のどこに重心があるかを計算するために n で割って基準化すると、以下のように求めることができる。以降、基準化済みデュレーションと呼ぶことにする。

$$D_w = \frac{D(n)}{n} = \frac{1}{nr}\left(1-\frac{nr}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}-1}\right) = \frac{1}{a}\left(1-\frac{a}{\left(1+\frac{a}{nm}\right)^{nm}-1}\right) \tag{3.5}$$

積立元本合計に対する将来価値の割合 (倍率) y は

$$y = \frac{\left\{\left(1+\frac{a}{nm}\right)^{nm}-1\right\}\left(1+\frac{a}{nm}\right)}{a} \tag{3.6}$$

と表すことができるので、D_w は以下のように簡単に表すこともできる。

$$D_w = \frac{1}{a}\left(1-\frac{1+\frac{a}{nm}}{y}\right) \tag{3.7}$$

連続複利・連続積立を想定すると、積立元本合計に対する将来価値の割合 (倍率) $y(a) = \frac{e^a-1}{a}$ は a の関数なので (枇々木 [2])、以下のように ルール値 a で記述することができる。

$$D_w^a = \lim_{m\to\infty} D_w = \frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{y(a)}\right) \tag{3.8}$$

[6]導出は付録 A.1 を見よ。
[7]詳しくは付録 A.2 を見よ。

したがって、基準化済みデュレーションもルール値 a に関係することを示すことができる。また、基準化済みデュレーションはルール値 a の単調減少関数となる[8]。積立で 2 倍になるのは 40 年間で毎月積立を想定した場合には $a = 1.2559$、 20 年間の場合には $a = 1.2554$、連続複利・連続積立の場合には $a = 1.2564$ である。それぞれの基準化済みデュレーションは以下のように求めることができる。

$$n = 40,\ m = 12\ :\ D_w = \frac{1}{1.2559}\left(1 - \frac{1 + \frac{1.2559}{40\times 12}}{2}\right) = 0.39708$$

$$n = 20,\ m = 12\ :\ D_w = \frac{1}{1.2554}\left(1 - \frac{1 + \frac{1.2554}{20\times 12}}{2}\right) = 0.39620$$

$$\text{連続複利・積立}\ :\ D_w^a = \frac{1}{1.2564}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0.39796$$

基準化済みデュレーションも年数や利率に関係なく、ほぼ同じ値となる。

次に、2 節の記号を用いて、積立金額が可変な場合の基準化済みデュレーションを計算する。$(1-w_k)n$ 年後から $w_k n$ 年間期初に 1 を積立する場合の将来価値の時間加重和 S_k は

$$S_1 = S(w_1 n) = \frac{1}{r}\left(F_0(w_1 n) - w_1 nm\right) \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{j=0}^{w_k nm-1}\left\{(1-w_k)n + \frac{j}{m}\right\}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{w_k nm - j} \\ &= \left(1 + \frac{r}{m}\right)\left\{(1-w_k)nF_0(w_k n) + \frac{1}{r}\left(F_0(w_k n) - w_k nm\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

基準化済みデュレーションは以下のように求めることができる[9]。

$$\begin{aligned} D_w &= \frac{\sum_{k=1}^{K} d_k S_k}{n\sum_{k=1}^{K} d_k F_1(w_k n)} \\ &= \frac{1}{nr} - \frac{1 - \sum_{k=2}^{K} v_k(1-w_k)\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{w_k nm} - 1\right\}}{\sum_{k=1}^{K} v_k\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{w_k nm} - 1\right\}} \qquad (3.11) \\ &= \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1+\frac{a}{nm}}{y}\right)\left\{1 - \sum_{k=2}^{K} v_k(1-w_k)\left\{\left(1+\frac{a}{nm}\right)^{w_k nm} - 1\right\}\right\}\right] \qquad (3.12) \end{aligned}$$

となる。$K = 1$ のとき、(3.12) 式は (3.7) 式になる。

連続複利･連続積立を想定すると、積立元本合計に対する将来価値の割合 (倍率) $y(a) = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{K}(e^{w_k a} - 1)$ は a の関数なので、以下のように a で記述することができる。

$$D_w^a = \lim_{m\to\infty} D_w = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{1}{y(a)}\left\{1 - \sum_{k=2}^{K} v_k(1-w_k)\left(e^{w_k a} - 1\right)\right\}\right] \tag{3.13}$$

---

[8]詳しくは付録 A.3 を見よ。

[9]導出は付録 A.4 を見よ。

4. 数値例

$n=40, m=12$ (40 年毎月積立), $K=4$ (4 分割: 10 年ごと) の場合について、以下に 3 つの数値例を示す。$\boldsymbol{N}=(N_1,N_2,N_3,N_4)$, $\boldsymbol{M}=(M_1,M_2,M_3,M_4)$, $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,w_3,w_4)$, $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,d_3,d_4)$ とする。

(例 1) $\boldsymbol{N}=(10,10,10,10)$, $\boldsymbol{M}=(1,2,3,4)$ の場合

$\boldsymbol{w}=(1,0.75,0.5,0.25)$, $\boldsymbol{d}=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{d}=2.5$, $\boldsymbol{v}=(0.4,0.4,0.4,0.4)$

(例 2) $\boldsymbol{N}=(10,10,10,10)$, $\boldsymbol{M}=(4,3,2,1)$ の場合

$\boldsymbol{w}=(1,0.75,0.5,0.25)$, $\boldsymbol{d}=(4,-1,-1,-1)$, $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{d}=2.5$, $\boldsymbol{v}=(1.6,-0.4,-0.4,-0.4)$

(例 3) $\boldsymbol{N}=(16,12,8,4)$, $\boldsymbol{M}=(1,1.5,2,3)$ の場合

$\boldsymbol{w}=(1,0.6,0.3,0.1)$, $\boldsymbol{d}=(1,0.5,0.5,1)$, $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{d}=1.55$, $\boldsymbol{v}=(\frac{20}{31},\frac{10}{31},\frac{10}{31},\frac{20}{31})$

(2.4) 式を用いて $K=4$, $m=12$ の場合の $y=2$ および $y=1.5$ に対する ルール値 a (ルール数の 1/100) を求め、$r=a/n$ として (2.2) 式で満期額 S および基準化済みデュレーションを計算した結果を表 1 に示す。上記の例 1〜3 がケース a1〜a3 に相当する。

表 1: 数値例

ケース a : $n=40$				$y=2$				$y=1.5$			
	N_k	M_k	元本	a	r	満期額	D_w	a	r	満期額	D_w
ケース a1	(10, 10, 10, 10)	(1, 2, 3, 4)	1,200	1.6017	4.00%	2,400	0.5066	0.9880	2.47%	1,800	0.5532
ケース a2	(10, 10, 10, 10)	(4, 3, 2, 1)	1,200	1.0518	2.63%	2,400	0.3085	0.6275	1.57%	1,800	0.3335
ケース a3	(16, 12, 8, 4)	(1, 1.5, 2, 3)	744	1.4963	3.74%	1,488	0.4700	0.9248	2.31%	1,116	0.5208
ケース b : $n=20$				$y=2$				$y=1.5$			
	N_k	M_k	元本	a	r	満期額	D_w	a	r	満期額	D_w
ケース b1	(5, 5, 5, 5)	(2, 4, 6, 8)	1,200	1.6010	8.00%	2,400	0.5058	0.9867	4.93%	1,800	0.5523
ケース b2	(5, 5, 5, 5)	(8, 6, 4, 2)	1,200	1.0513	5.26%	2,400	0.3075	0.6269	3.13%	1,800	0.3325
ケース b3	(8, 6, 4, 2)	(2, 3, 4, 6)	744	1.4957	7.48%	1,488	0.4692	0.9237	4.62%	1,116	0.5199

まずはじめに、満期額を見てみよう。表 1 の $y=2$ のケース a とケース b を見ると、どのような積立パターンに対しても、満期額は元本の 2 倍になることが確認できる。ここで、ケース b1〜b3 は、ケース a1〜a3 の N_k は 0.5 倍、M_k は 2 倍のケースを示している。同様に、$y=1.5$ を見ると、満期額は元本の 1.5 倍になる。ケース a1, a2 は 10 年ごと、ケース b1, b2 は 5 年ごと積立金額を変更するパターンである一方、ケース a3, b3 は積立金額を変更する期間が可変の場合である。いずれにしても、特徴は変わらない。紙面の都合上省略するが、様々な y や n などに対しても、同様の結果が得られている。

次に、基準化済みデュレーションを見てみよう。年数は異なるが、積立パターンが同じであるケース a、ケース b ともに各倍率に対するルール値 a はほぼ同じであり、基準化済みデュレーションもほぼ同じ値を取ることが確認できる。また、倍率が大きくなると、ルール値 a が大きくなるため、ある n に対して利率 r が大きくなり、基準化済みデュレーションは小さくなる。この特徴は積立金額が一定の場合と同じである。積立金額が一定の場合の基準化済みデュレーションは約 0.4 であったが、後半の積立金額が大きいケース a1, b1 の基準化済みデュレーションは一定の場合と比べて約 0.5 と大きくなり、前半の積立金額が大きいケース a2, b2 の場合は約 0.3 と小さくなる。また、基準化済みデュレーションが大きくなるほど、ルール値 a も大きくなる。これらをまとめると、積立金額のパターンが固定されたもとでは、倍率を大きくすると、ルール値 a も大きくなり、基準化済みデュレーションは小さくなる。一方で、倍率が固定されたもとでは、積立金額のパターンによって利率が変化する。前半 (後半) の積立金額が大きいほど、基準化済みデュレーションは小さく (大きく) なるとともに、利率も小さく (大きく) なる。n を固定すると、$a=nr$ であるので、ルール値 a も同様に小さく (大きく) なる。

これらのことを確かめるために、表 1 のケース a1 と a2 の間の積立パターンを図 3 の左図に示し、それに対応する基準化済みデュレーションとルール値 a の組み合わせを右図に示す ($n = 40$, $m = 12$ でルール値 a を求めている)。積立投資額の合計はいずれの積立パターンの場合も 1,200 万円である (左図の括弧内の合計が 10 となる)。

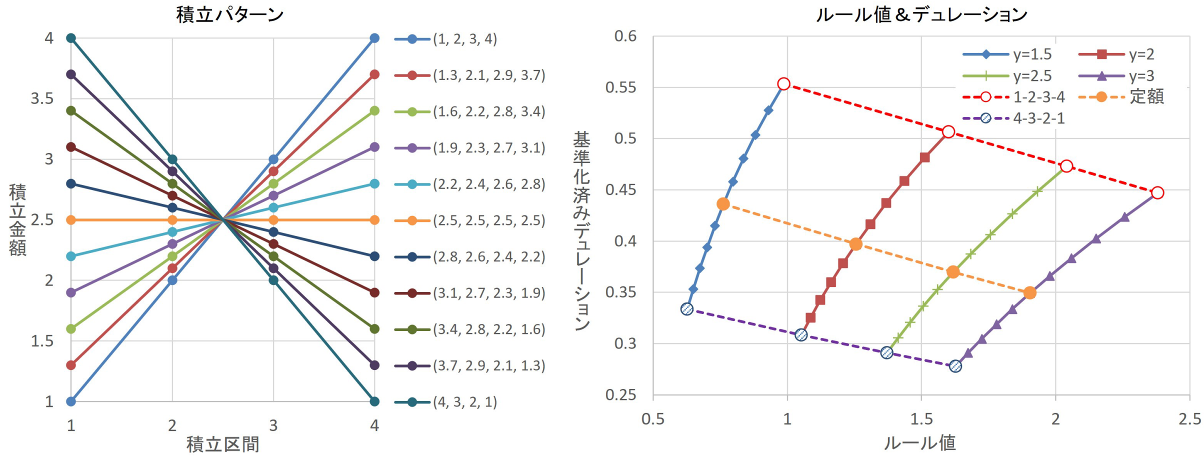

図 3: さまざまな積立パターンに対する基準化済みデュレーションとルール値 a の関係

右図の実線は、4 通りの $y\,(= 1.5, 2, 2.5, 3)$ に対して、左図の 10 パターンに対応する点とそれをつないだ曲線を示している。倍率 y を固定すると、基準化済みデュレーションが大きくなるとルール数は増加することがわかる。一方で、右図の点線は、左図の中の 3 つの積立パターン ((1,2,3,4), (2.5,2.5,2.5,2.5)[定額], (4,3,2,1)) に対応する点とそれをつないだ曲線を示している。積立パターンを固定すると、倍率 y を大きくするにつれて、ルール数は増加するが、基準化済みデュレーションは小さくなることが確認できる。

参考のため、図 3 の右図のルール数 (ルール値を 100 倍した値) を表 2 に示す。倍率 y と定額の交点に対するルール数が $y = 2$ は 126、$y = 3$ は 190 となっていることも確認できるだろう。

表 2: 積立パターンとルール数

積立パターン				ルール数			
M_1	M_2	M_3	M_4	$y = 1.5$	$y = 2$	$y = 2.5$	$y = 3$
1.0	2.0	3.0	4.0	98.80	160.17	204.07	237.99
1.3	2.1	2.9	3.7	93.05	151.28	193.15	225.62
1.6	2.2	2.8	3.4	88.04	143.62	183.78	215.05
1.9	2.3	2.7	3.1	83.64	136.90	175.61	205.86
2.2	2.4	2.6	2.8	79.71	130.94	168.37	197.73
2.5	2.5	2.5	2.5	76.19	125.59	161.88	190.45
2.8	2.6	2.4	2.2	73.00	120.76	156.02	183.88
3.1	2.7	2.3	1.9	70.10	116.36	150.69	177.90
3.4	2.8	2.2	1.6	67.44	112.32	145.80	172.41
3.7	2.9	2.1	1.3	65.00	108.61	141.29	167.36
4.0	3.0	2.0	1.0	62.75	105.18	137.12	162.67

5. まとめ

本稿では、積立金額が可変の (定額でない) 場合でも、任意の倍率と積立金額のパターンに対応して、一意にルール数が決まるという法則が成り立つことを示した。これは枇々木 [1] が提案した「126 の法則」が成り立つ理論だけでなく、「72 の法則」も含めてルール数に関する理論を一般化したものである。本稿で提案した法則も顧客の積立金額も含めた計画について、わかりやすく支援するのに役立つだろう。積立投資を身近な存在にするためにも、この法則もぜひ、多くの FP の方々に活用していただきたい。

参考文献

[1] 枇々木 規雄 (2021), 126 ルール：積立投資の複利効果を概算する簡単な計算ルール, 日本 FP 学会ニュースレター, Vol.4, No.2. `https://www.jasfp.jp/newsletter04-2_0001.pdf`

[2] 枇々木 規雄 (2022), 126 ルール: 連続複利・連続積立投資版.
`https://lab.ae.keio.ac.jp/~hibiki_lab/profile_2/Hibiki_126Rule_2.pdf`

[3] D. Luenberger (2014), Investment Science, 2nd Edition, Oxford University Press.
（今野浩，鈴木賢一，枇々木規雄 訳 (2015),『金融工学入門 第 2 版』，日本経済新聞出版社.）

[4] 投資信託協会 広報部調査広報室 (2021), 積立投資モデルケース “二十歳 (はたち) になったら 1 万円”, すべての人に世界の成長を届ける研究会, つみけん 2020 年報告書「2041 年、資産形成をすべての人に ～5 つのターゲットと 15 のアイデア～」, 104-106.
`https://www.toushin.or.jp/statistics/Tsumiken/hokokusyo/`

付録

A. 数式の導出および関係性の証明

A.1. (3.3) 式の導出

u 年間期初に 1 を積立する場合の将来価値の時間加重和 $S(u)$ は

$$\begin{aligned} S(u) &= \sum_{k=1}^{um-1} \frac{k}{m}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{um-k} \\ &= \frac{1}{m}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{um-1} + \frac{2}{m}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{um-2} + \cdots + \left(u-\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{r}{m}\right) \end{aligned} \tag{A.1}$$

と記述できるので、以下のように展開して、求めることができる。

$$\left(\frac{1}{1+\frac{r}{m}}\right) S(u) = \sum_{k=2}^{um} \frac{k-1}{m}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{um-k} \tag{A.2}$$

$$\left(1-\frac{1}{1+\frac{r}{m}}\right) S(u) = \sum_{k=0}^{um-1} \frac{1}{m}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{k} - u = \frac{1}{m}\cdot F_0(u) - u \tag{A.3}$$

$$S(u) = \frac{1}{r}\left(1+\frac{r}{m}\right)\left(F_0(u) - um\right) \tag{A.4}$$

A.2. デュレーション $D(n)$ と積立年数の関係

デュレーション $D(n)$ は積立年数が長くなればなるほど大きくなる。以下でそのことを証明する。

(3.4) 式の第 2 項を $f(n)$ とすると、$f(n) = \frac{n}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}-1}$ となる。$D(n)$ が n の単調増加関数となることを示すためには、$f(n)$ が単調減少関数となることを示せばよい。$g(n) = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm} - 1$ とす

ると、

$$\frac{df(n)}{dn} = \frac{d}{dn}\frac{n}{g(n)} = \frac{g(n)-ng'(n)}{g(n)^2} = \frac{1}{g(n)^2}\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm} - 1 - nm\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{g(n)^2}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}\left\{1-\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}\right\}-1\right]$$

となる。ここで、$x=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}$ とすると、$r>0$ のとき、$x>1$ である。$r=0$ のとき、(3.4) 式は使えないが、$D(n)=\frac{n-1/m}{2}$ であり、$D(n)$ は n の単調増加関数である。上記のカギ括弧内の式を $h(x)$ とすると、

$$h(x) = x(1-\ln x)-1$$

と記述でき、$h(1)=0$ である。

$$\frac{dh(x)}{dx} = 1-(1+\ln x) = -\ln x < 0 \text{ for } x>1$$

であり、$h(x)$ は $x>1$ で負である。$h(x)$ が負であれば、$f(n)$ は単調減少関数となる。

A.3.　基準化済みデュレーションとルール値 a の関係

基準化済みデュレーションはルール値 a の単調減少関数となる。以下でそのことを証明する。D_w^a を a で微分すると、

$$\frac{dD_w^a}{da} = -\frac{1}{a^2}+\frac{e^a}{(e^a-1)^2} = \frac{a^2e^a-(e^a-1)^2}{a^2(e^a-1)^2}$$

となる。分子を $f(a)=a^2e^a-(e^a-1)^2$ とおくと、$f(0)=0$ であり、a で微分すると、

$$f'(a) = 2ae^a+a^2e^a-2e^a(e^a-1) = e^a(2a+a^2-2e^a+2)$$

となる。さらに、$f'(a)=e^a g(a)$ とし、$g(a)$ を a で微分すると、

$$g'(a) = 2(1+a-e^a) < 0 \text{ for } a>0$$

となり、$g(0)=0$ より、$g(a)$ は $a>0$ でマイナスである。したがって、$f'(a)<0$ となり、$f(0)=0$ より、$f(a)$ は $a>0$ でマイナスとなるので、D_w^a は a の単調減少関数となる。

A.4.　(3.12) 式の導出

基準化済みデュレーションは以下のように導出することができる。

$$D_w = \frac{\sum_{k=1}^K d_kS_k}{n\sum_{k=1}^K d_kF_1(w_kn)} = \frac{\frac{1}{r}\sum_{k=1}^K d_k\left(F_0(w_kn)-w_knm\right)+\sum_{k=2}^K d_k(1-w_k)nF_0(w_kn)}{n\sum_{k=2}^K d_kF_0(w_kn)}$$
$$= \frac{1}{nr}-\frac{\sum_{k=1}^K d_kw_km/r-\sum_{k=2}^K d_k(1-w_k)F_0(w_kn)}{\sum_{k=1}^K d_kF_0(w_kn)}$$
$$= \frac{1}{nr}-\frac{\sum_{k=1}^K d_kw_k-\sum_{k=2}^K d_k(1-w_k)\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{w_knm}-1\right\}}{\sum_{k=1}^K d_k\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{w_knm}-1\right\}}$$
$$= \frac{1}{nr}-\frac{1-\sum_{k=2}^K v_k(1-w_k)\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{w_knm}-1\right\}}{\sum_{k=1}^K v_k\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{w_knm}-1\right\}} \tag{A.5}$$
$$= \frac{1}{a}-\left[1-\sum_{k=2}^K v_k(1-w_k)\left\{\left(1+\frac{a}{nm}\right)^{w_knm}-1\right\}\right]\left(1+\frac{a}{nm}\right)\frac{1}{ay}$$
$$= \frac{1}{a}\left[1-\left(\frac{1+\frac{a}{nm}}{y}\right)\left\{1-\sum_{k=2}^K v_k(1-w_k)\left\{\left(1+\frac{a}{nm}\right)^{w_knm}-1\right\}\right\}\right] \tag{A.6}$$