研究ノート： 積立投資に対する平均・分散アプローチ

枇々木 規雄
慶應義塾大学 理工学部

2025 年 5 月 21 日

和文概要　積立投資は個人の資産運用において大きな役割を果たしている。積立投資を行うとドルコスト平均法 (以降、DCA) で投資を行うことになる。DCA の研究は多く行われている一方で、資金制約のある積立投資そのものに焦点をあてた学術的な研究は限られている。本稿では、DCA の研究を参考にして、積立投資の理論を議論する。はじめに、収益率が正規分布に従うと仮定し、収益倍率 (積立元本に対する収益の比率) の平均と分散を明示的に求める。積立投資に対する平均・分散アプローチの枠組みで整理し、リスク資産と無リスク資産に対する最適積立投資モデルを構築する。さらに、コンスタント・リバランス戦略による 2 資産配分戦略の結果を示し、買い持ち戦略 (通常の積立戦略) と比較を行う。

キーワード: 積立投資, 平均・分散アプローチ, 最適化モデル

1.　はじめに

金融庁は 2014 年 1 月から NISA、2018 年 1 月からつみたて NISA をスタートした。そして、NISA の抜本的拡充・恒久化を図るために、2024 年 1 月から新しい NISA が導入され、我が国の家計における資産形成を促進している。非課税保有期間が無期限化されただけでなく、つみたて投資枠と成長投資枠合計で非課税保有限度額は 1,800 万円まで拡充された。金融庁 [5] によると、2024 年 9 月末時点で NISA 口座数は約 2,508 万口座、買付額は約 13 兆 7 千億円で、成長投資枠で約 10 兆 2 千億円、つみたて投資枠で約 3 兆 5 千億円である[1]。つみたて投資枠が約 26%を占めており、成長投資枠でも積立がされていることを考えると、積立投資が資産運用において大きな役割を果たしている[2]。

このように積立投資の重要性が増している一方で、積立投資に焦点をあてた学術的な研究は限られているが、ドルコスト平均法 (以降、DCA) の研究は多く行われている。定額で積立投資を行うと、DCA を行うことになるので、この 2 つは非常に関連している。その一方、DCA は必ずしも積立投資を意味しない。一般に、投資開始時点で投資元本すべてが手元にない場合に行う投資方法が「積立投資」であるのに対し、DCA は、投資元本すべてが手元に存在するか否かにかかわらず、全期間を通じて、投資資金を分割して、リスク資産に定額を毎期投資する手法である。そこで、本稿では収益率が正規分布に従うと想定して、平均・分散アプローチの枠組みで積立投資を議論する。

DCA に対する平均・分散アプローチの先行研究を紹介する。Cho and Kuvvet[1] は、2 期間平均・分散モデルで、DCA による収益の平均と分散を計算している。Smith and Artigueher[9] は平均・分散アプローチの枠組みで、各期の投資額の満期時点の収益に対する平均・分散・共分散を計算し、接点ポートフォリオの最適投資比率を導出した。DCA は最適ではないが、よい近似になっていることを示している。Kirkby *et al.*[6] は、指数型 Levy 過程の価格変動のもとで、平均・分散を解析的に計算し、平均・分散アプローチで最適投資戦略を求める定式化を示している。また、2 資産（S&P500、FF レート）を用いて、DCA と一括投資を比較している。Panyagometh and Zhu[8] は、リスク資産と無リスク資産の資産配分（コンスタント・リバランス戦略）と DCA を対象として、様々な期待収

[1] 2023 年 12 月末時点 (金融庁 [4]) での NISA 口座数は約 2,124 万口座、買付額は約 35 兆 3 千億円で、そのうち、つみたて NISA は約 4 兆 5 千億円である。新しい NISA 導入後の 9 カ月間で、口座数は約 384 口座 (18%) 増加した。買付額は旧 NISA 制度の 39%であり、急激に運用額も増加している。

[2] NISA だけでなく、年金拠出が積立で行われる iDeCo(個人型確定拠出年金) も加入要件の緩和、手続きの簡素化などの制度改正により加入者が増加している。2020 年 3 月末に約 158 万人であった加入者は 2024 年 3 月末には約 328 万人と倍増している。

益率や無リスク金利、投資期間における最終時点の価値の平均、標準偏差、シャープレシオをシミュレーションを用いて計算し、比較している。

金利がゼロの場合には、積立投資と DCA の収益の平均と分散は等しくなる[3]。そこで、まずはじめに、これらの文献を参考にして、積立投資の平均と分散を明示的に示す。さらに、DCA との違いを確認するために、初期時点に資金がないこと (資金制約) を考慮して、最適積立金額を導出する最適化モデルを提案する。さらに、リスク資産と無リスク資産の 2 資産への最適な積立投資戦略として、コンスタント・リバランス戦略と買い持ち戦略 (通常の積立戦略) を数値分析によって比較する。

本論文の構成は以下の通りである。2 節で積立投資のキャッシュ・フローおよび収益倍率の平均・分散の計算式を示す。3 節で平均・分散アプローチの枠組みで、各積立金額の平均・分散および各積立金額間の共分散を計算する。また、収益倍率分布をモンテカルロ・シミュレーションによって算出し、対数正規分布と比較する。4 節で積立投資の最適化モデルを示し、数値分析を行う。5 節でコンスタント・リバランス戦略と買い持ち戦略の比較を行う。6 節で結論を述べる。

2.　積立投資・貯蓄

2.1.　キャッシュ・フロー

図 1 に示すように、年数を n、年内の積立回数を m 回として、期初に M を mn 回にわたり積立投資して、満期に FV が得られる場合のキャッシュフローを想定しよう。

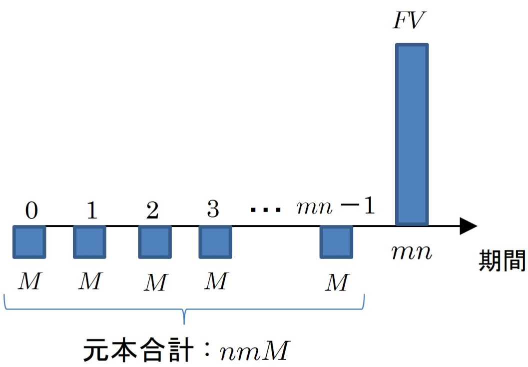


図 1: 積立投資のキャッシュ・フロー

月初に積み立てる場合には、$m = 12$ となる。図 1 においては、期は、$m = 12$ ならば月、$m = 1$ ならば年になる。ここで利率 (年率) を r とする。満期額 FV は毎期の投資額 M の満期価値の合計なので、次のように関係づけることができる。

$$FV = \left\{ \sum_{t=1}^{mn} \left(1+\frac{r}{m}\right)^t \right\} M = \left[\frac{\left\{ \left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} - 1 \right\} \left(1+\frac{r}{m}\right)}{\frac{r}{m}} \right] M \tag{2.1}$$

積み立てた元本の合計は Mmn (積立額 × 年内積立回数 × 年数) なので、積立元本額 (合計) に対する満期額 FV の倍率 (収益倍率) y は、

$$y = \frac{FV}{Mmn} = \frac{\left\{ \left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} - 1 \right\} \left(1+\frac{r}{m}\right)}{nr} = \frac{\left\{ \left(1+\frac{a}{mn}\right)^{mn} - 1 \right\} \left(1+\frac{a}{mn}\right)}{a} \tag{2.2}$$

と書くことができる。ここで、$a = nr$ である。

[3]資金制約が異なるので、積立投資の場合には内部収益率、DCA の場合には幾何平均収益率を使う必要があり、その結果、収益率の平均と分散は異なる。

2.2. 積立投資における収益倍率の平均・分散の計算

無リスク資産への積立 (積立貯蓄) の場合には、利率 r は固定なので、収益倍率 y も固定である。しかし、リスク資産への積立投資の場合には収益倍率 y は変動する。各期間の収益率 (年率換算) を $\tilde{r}_t\,(t=1,\ldots,mn)$、各期間の収益を $\tilde{R}_t$ とする。各期間の収益率 $\tilde{r}_t$ は独立で、期待値 μ、分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定する。各期間の収益の期待値 $\mathrm{E}[\tilde{R}_t]$ と分散 $\mathrm{Var}[\tilde{R}_t]$ はそれぞれ、

$$\mathrm{E}[\tilde{R}_t]=\alpha=1+\frac{\mu}{m},\quad \mathrm{Var}[\tilde{R}_t]=\frac{\sigma^2}{m}\quad (t=1,\ldots,mn)$$

となる。k 時点の積立金額 M の満期時点 (n 年後) mn での価値 $\tilde{A}_{k,mn}\,(k=0,\ldots,mn-1)$ は

$$\tilde{A}_{k,mn}=M\prod_{t=k+1}^{mn}\left(1+\frac{\tilde{r}_t}{m}\right)=M\prod_{t=k+1}^{mn}\tilde{R}_t\quad (k=0,\ldots,mn-1) \tag{2.3}$$

となり、n 年後の合計価値 $\tilde{FV}$ は以下のように計算される。

$$\tilde{FV}=\sum_{k=0}^{mn-1}\tilde{A}_{k,mn}=M\sum_{t=1}^{mn}\prod_{k=t}^{mn}\tilde{R}_k \tag{2.4}$$

したがって、積立元本の合計 mnM に対する倍率 $\tilde{y}$ は以下のように求められる。

$$\tilde{y}=\frac{\tilde{FV}}{mnM}=\frac{1}{mn}\sum_{t=1}^{mn}\prod_{k=t}^{mn}\tilde{R}_k \tag{2.5}$$

積立元本の合計に対する倍率の期待値と分散を以下で計算する。

(1) 期待値

(2.5) 式より、収益倍率の期待値は

$$\begin{aligned}\overline{y}\ &=\ \mathrm{E}[\tilde{y}]=\frac{1}{mn}\sum_{t=1}^{mn}\mathrm{E}\left[\prod_{k=t}^{mn}\tilde{R}_k\right]=\frac{1}{mn}\sum_{t=1}^{mn}\alpha^{mn-t+1}=\frac{1}{mn}\sum_{t=1}^{mn}\alpha^t=\frac{1}{mn}\cdot\frac{\alpha(\alpha^{mn}-1)}{\alpha-1}\\ &=\ \frac{\alpha(\alpha^{mn}-1)}{n\mu}\end{aligned} \tag{2.6}$$

となる。(2.6) 式はリスクのない場合と同じ形式 ((2.2) 式) になり、収益率が正規分布に従う場合には、126 の法則 (枇々木 [2, 3]) が成り立つことが分かる[4]。

(2) 分散

倍率の二乗の期待値は[5]

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\tilde{y}^2]\ &=\ \frac{1}{(mn)^2}\mathrm{E}\left[\left(\sum_{t=1}^{mn}\prod_{k=t}^{mn}\tilde{R}_k\right)^2\right]=\frac{1}{(mn)^2}\sum_{t=1}^{mn}\sum_{u=1}^{mn}\mathrm{E}\left[\prod_{k=t}^{mn}\tilde{R}_k\prod_{v=u}^{mn}\tilde{R}_v\right]\\ &=\ \frac{1}{(mn)^2}\left\{\sum_{t=1}^{mn}\mathrm{E}\left[\prod_{k=t}^{mn}\tilde{R}_k^2\right]+2\sum_{t=1}^{mn-1}\sum_{u=t+1}^{mn}\mathrm{E}\left[\prod_{k=t}^{u-1}\tilde{R}_k\prod_{v=u}^{mn}\tilde{R}_v^2\right]\right\}\\ &=\ \frac{1}{(mn)^2}\left\{\sum_{t=1}^{mn}\beta^{mn-t+1}+2\sum_{t=1}^{mn-1}\sum_{u=t+1}^{mn}\alpha^{u-t}\beta^{mn-u+1}\right\}\end{aligned} \tag{2.7}$$

[4] 126 の法則とは、(2.2) 式において、厳密には m や n の値に依存するが、$y=2$ を満たす a の値はほぼ $a=nr=1.26$ (利率をパーセント表示すると、$100a=126$) となる法則である。

[5] 導出の詳細は付録 A に示す。

と求められる。ここで、$\beta = \frac{\sigma^2}{m} + \alpha^2$ である。したがって、収益倍率の分散は以下のように計算される。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\tilde{y}] &= \mathrm{E}[\tilde{y}^2] - \{\mathrm{E}[\tilde{y}]\}^2 \\
&= \frac{1}{(mn)^2}\left[\frac{\beta(\beta^{mn}-1)}{\beta-1} + \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(\frac{\beta^{mn}-1}{\beta-1} - \frac{\alpha^{mn}-1}{\alpha-1}\right) - \left\{\frac{\alpha(\alpha^{mn}-1)}{\alpha-1}\right\}^2\right]
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

3. 平均・分散アプローチ

3.1. 積立投資の 2 つの見方

積立投資は DCA で投資することになるため、DCA での議論を積立投資において利用する。DCA において金利がゼロであれば、その期待値と分散は積立投資と同じになる。DCA の利点としてよく言われていることは、投資タイミングを分散し、高値つかみのリスクを低減できることである。マルキール [7] は「間違ったタイミングで株式や債券に有り金すべてをつぎ込む愚から身を守る投資法」として、その効果を述べている。DCA は毎回、同じ金額を投資 (購入) する方法であるが、同単位数で購入する場合に比べて、平均価格は安く、それも積立投資における DCA の有利さを示す一つの根拠になっている[6] 。

積立投資のキャッシュ・フローを考えるとき、ある一つのリスク資産もしくはポートフォリオを対象とするため、資産分散の枠組みで議論できない。そのため、平均・分散アプローチではほとんど研究されてこなかったが、近年、図 2 に示すように、各積立金額を別々の投資対象と考えることによって、タイミングリスクの分散効果をポートフォリオの分散効果に置き換えて議論する研究が DCA に対して行われている。そこで、各積立金額の平均・分散・共分散を計算してみよう。

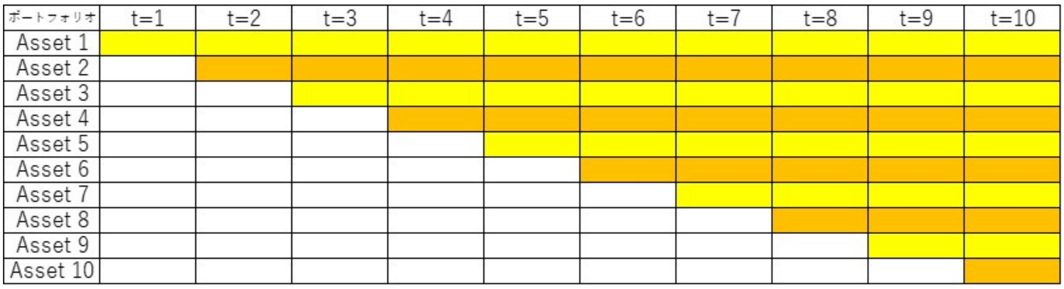


図 2: 積立ポートフォリオ

3.2. 各積立金額の平均・分散・共分散の計算

k 時点の積立金額に対する満期時点 (n 年後) mn での収益倍率を $\tilde{Y}_{k,mn}$ $(k = 0, \ldots, mn-1)$ とすると、

$$
\tilde{Y}_{k,mn} = \prod_{t=k+1}^{mn} \tilde{R}_t \quad (k = 0, \ldots, mn-1) \tag{3.1}
$$

と求められる。各収益倍率 $\tilde{Y}_{k,mn}$ の期待値、分散、および異なる 2 つの期間の共分散は以下のように計算される。

[6]以下に示すように、調和平均が算術平均よりも低くなる (Kirkby *et al.*[6]) ため、1 株当たりの平均コストが平均価格よりも低くなる。

$$
\frac{1}{\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\frac{1}{P_t}} \leq \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} P_t
$$

ここで、P_t は時点 t のリスク資産価格、T は期間数を表す。ただし、この 2 つの方法は投資金額が異なるので、厳密には優劣を比較できない。

(1) 期待値

$$\overline{y}_k = \mathrm{E}[\tilde{Y}_{k,mn}] = \alpha^{mn-k} \tag{3.2}$$

(2) 分散

$$\sigma_k^2 = \mathrm{Var}[\tilde{Y}_{k,mn}] = \mathrm{E}\left[\prod_{v=k+1}^{mn} \tilde{R}_v^2\right] - \overline{y}_k^2 = \beta^{mn-k} - \alpha^{2(mn-k)} \tag{3.3}$$

(3) 共分散

$$\begin{aligned}
\sigma_{tk} &= \mathrm{cov}(\tilde{Y}_{t,mn}, \tilde{Y}_{k,mn}) = \mathrm{E}\left[\prod_{u=t+1}^{mn} \tilde{R}_u \prod_{v=k+1}^{mn} \tilde{R}_v\right] - \mathrm{E}\left[\prod_{u=t+1}^{mn} \tilde{R}_u\right] \mathrm{E}\left[\prod_{v=k+1}^{mn} \tilde{R}_v\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\prod_{u=t+1}^{k} \tilde{R}_u\right] \mathrm{E}\left[\prod_{v=k+1}^{mn} \tilde{R}_v^2\right] - \overline{y}_k \overline{y}_v = \alpha^{k-t}\beta^{mn-k} - \alpha^{2mn-(t+k)} \\
&= \alpha^{k-t}\left(\beta^{mn-k} - \alpha^{2(mn-k)}\right) = \alpha^{k-t}\sigma_k^2,\ (k \geq t)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

相関係数は以下のように求められる。

$$\rho_{tk} = \frac{\sigma_{tk}}{\sigma_t \sigma_k} = \frac{\alpha^{k-t}\sigma_k}{\sigma_t} = \frac{\alpha^k \sigma_k}{\alpha^t \sigma_t} = \sqrt{\frac{\theta^{mn-k} - 1}{\theta^{mn-t} - 1}},\ (k \geq t) \tag{3.5}$$

$$\text{ただし、}\theta = \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2/m + \alpha^2}{\alpha^2} = 1 + \left(\frac{\sigma/\sqrt{m}}{1 + \mu/m}\right)^2$$

例として、期待収益率 5%($\mu = 0.05$), 標準偏差 20%($\sigma = 0.2$) のリスク資産に 10 年間 ($n = 10$) , 年 1 回積立 ($m = 1$) する場合の各積立資産の相関係数を図 3 に示す。時点 $t-1$ (期間 t) における積立を Asset t としている。投資時点が離れるほど、相関係数は小さくなる。

相関係数	Asset 1	Asset 2	Asset 3	Asset 4	Asset 5	Asset 6	Asset 7	Asset 8	Asset 9	Asset 10
Asset 1	1	0.940	0.878	0.813	0.746	0.675	0.598	0.513	0.415	0.291
Asset 2		1	0.934	0.866	0.794	0.718	0.637	0.546	0.442	0.310
Asset 3			1	0.927	0.850	0.769	0.681	0.585	0.473	0.332
Asset 4				1	0.917	0.830	0.735	0.631	0.511	0.358
Asset 5					1	0.905	0.802	0.688	0.557	0.390
Asset 6						1	0.886	0.761	0.615	0.431
Asset 7							1	0.858	0.694	0.487
Asset 8								1	0.809	0.567
Asset 9									1	0.701
Asset 10										1

図 3: 相関係数 (例: $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $n = 10$, $m = 1$)

収益倍率の期待値と分散は以下で計算することができる。

(1) 期待値

(3.2) 式より、以下のように (2.6) 式と同じ式が導出できる。

$$\overline{y} = \frac{1}{mn}\sum_{k=0}^{mn-1} \overline{y}_k = \frac{1}{mn}\sum_{k=0}^{mn-1} \alpha^{mn-k} = \frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{mn} \alpha^k = \frac{1}{mn} \cdot \frac{\alpha(\alpha^{mn} - 1)}{\alpha - 1} \tag{3.6}$$

(2) 分散

(3.4) 式より、以下のように (2.8) 式と同じ式が導出できる[7]。

$$
\begin{aligned}
(mn)^2\sigma_y^2 &= \sum_{k=0}^{mn-1}\sigma_k^2 + 2\sum_{t=0}^{mn-2}\sum_{k=t+1}^{mn-1}\sigma_{tk} \qquad (3.7)\\
&= \sum_{k=0}^{mn-1}\left(\beta^{mn-k}-\alpha^{2(mn-k)}\right) + 2\sum_{t=0}^{mn-2}\sum_{k=t+1}^{mn-1}\alpha^{k-t}\left(\beta^{mn-k}-\alpha^{2(mn-k)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{mn}\left(\beta^{k}-\alpha^{2k}\right) + 2\sum_{t=1}^{mn-1}\sum_{k=t+1}^{mn}\alpha^{k-t}\left(\beta^{mn-k+1}-\alpha^{2(mn-k+1)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{mn}\beta^{k} + 2\sum_{t=1}^{mn-1}\sum_{k=t+1}^{mn}\alpha^{k-t}\beta^{mn-k+1} - \left\{\sum_{k=1}^{mn}\alpha^{2k} + 2\sum_{t=1}^{mn-1}\sum_{k=t+1}^{mn}\alpha^{k-t}\alpha^{2(mn-k+1)}\right\} \qquad (3.8)\\
\sigma_y^2 &= \frac{1}{(mn)^2}\left[\frac{\beta(\beta^{mn}-1)}{\beta-1} + \frac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(\frac{\beta^{mn}-1}{\beta-1}-\frac{\alpha^{mn}-1}{\alpha-1}\right) - \left\{\frac{\alpha(\alpha^{mn}-1)}{\alpha-1}\right\}^2\right] \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

3.3. 積立投資の収益倍率分布と対数正規分布の比較

各期間の収益率が正規分布に従う場合、その累積収益は期間幅が短くなるほど、対数正規分布に近似できる。一方で、一般に対数正規分布の和は対数正規分布にならないため、積立投資額の和も対数正規分布に従わない。ただし、対数正規分布に近い分布となることは期待されると想定し、モンテカルロ・シミュレーションを用いて得られた累積収益の経験分布と対数正規分布を比較する。

収益倍率 $\tilde{y}$ が対数正規分布 $\Lambda(\mu_L, \sigma_L^2)$ に従うと仮定すると、以下の式を満たす。

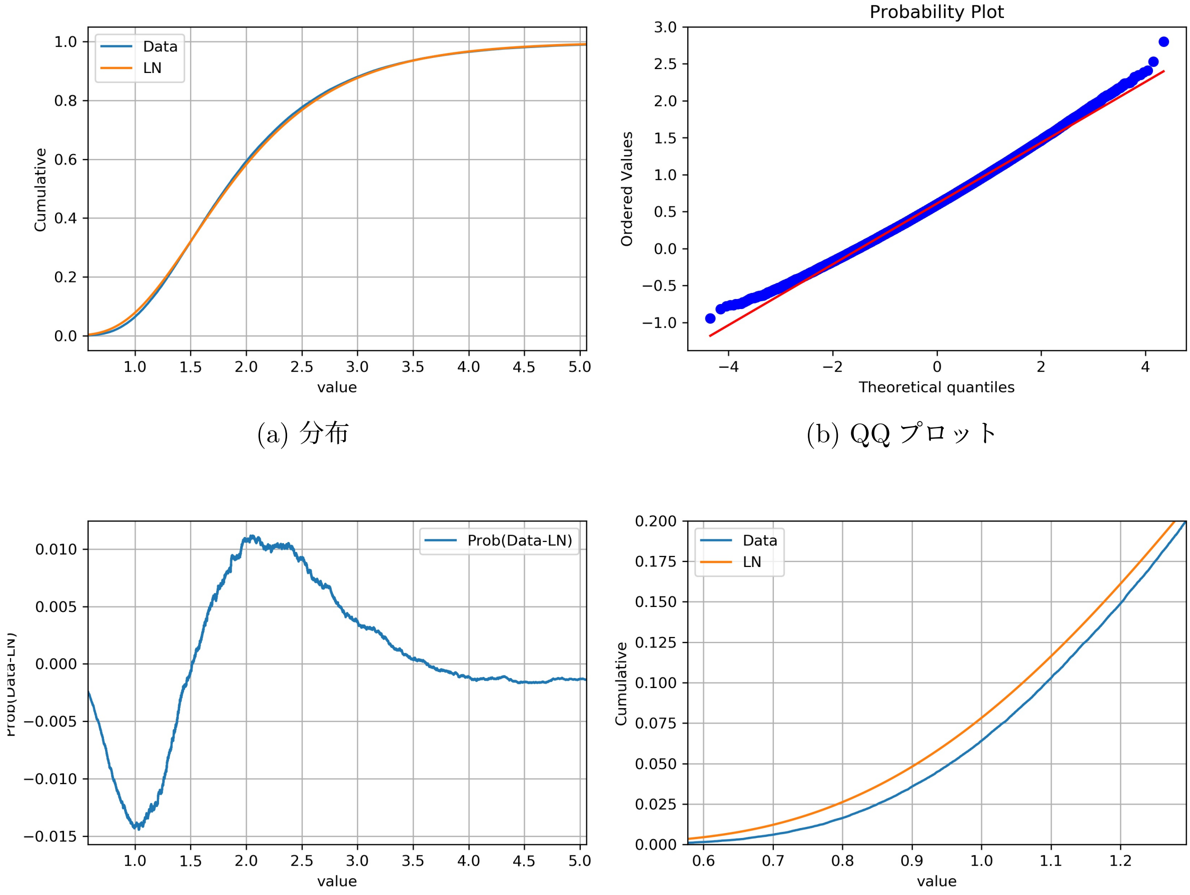
$$
\begin{aligned}
\overline{y} &= e^{\mu_L+\sigma_L^2/2} \qquad (3.10)\\
\sigma_y^2 &= e^{2\mu_L+\sigma_L^2}\left(e^{\sigma_L^2}-1\right) = \overline{y}^2\left(e^{\sigma_L^2}-1\right) \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

したがって、パラメータ μ_L と σ_L^2 は以下のように推定される。

$$
\begin{aligned}
\sigma_L^2 &= \ln\left(\frac{\sigma_y^2}{\overline{y}^2}+1\right) \qquad (3.12)\\
\mu_L &= \ln(\overline{y}) - \frac{\sigma_L^2}{2} \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

期待収益率 3.15%($\mu = 0.0315$), 標準偏差 10%($\sigma = 0.1$) のリスク資産に 40 年間 ($n = 40$) , 年 12 回積立 ($m = 12$) する場合の収益倍率の分布を図 4 に示す。図で用いる凡例は、経験分布は Data、対数正規分布は LN とする。図 4(左上) に収益倍率の累積分布を示す。横軸は収益倍率、縦軸は累積確率を表す。経験分布の平均は $\overline{y} = 2.0054$, 標準偏差は $\sigma_y = 0.8994$、対数正規分布の平均は $\overline{y} = 2.0049$, 標準偏差は $\sigma_y = 0.8960$ である。平均と分散はほぼ同じ値になっており、全体的にもほぼ重なっているように見える。しかし、右上図のように経験分布の対数をとって QQ プロットを描画すると、裾野部分が離れている。コルモゴロフ・スミルノフ検定でも p 値はほぼゼロで、正規分布であることが棄却される。左下図に経験分布から対数正規分布の累積確率の差を示す。収益倍率が 1.5 以下のとき、経験分布の累積確率の方が対数正規分布よりも小さい値を取っている。左上図の累積確率 20% 以下の累積分布を表す右下図を見ても差の違いを確認することができる。これは積立投資の分布は対数正規分布に比べてダウンサイドリスクが小さいことを表している。キャッシュ・フロー (資金制約) が異なるので一括投資と比較することはできないが、下方リスク、特に元本割れリスクに敏感な投資家にとって、積立投資の相対的な優位性を表す特徴と言える。

[7](3.8) 式 第 1 項、第 2 項はそれぞれ (2.7) 式 第 1 項、第 2 項と同じである。(3.8) 式第 3 項の導出方法も含めて、付録 A に示す。



(a) 分布　(b) QQ プロット

(c) 分布の差 (Data−LN)　(d) 分布 (下位 20%)

図 4: 経験分布と対数正規分布の比較

表 1 に 4 つの下方リスク尺度の比較を示す[8]。ここで、LPM(1) は元本を下回る値の期待値、不達成確率は元本を下回る確率、VaR と CVaR は元本からの差の値に対する信頼水準 95%VaR および CVaR を示す。

表 1: 下方リスク尺度の比較

下方リスク尺度	経験分布	対数正規分布
1 次下方部分積率 (LPM(1))	0.00890	0.01285
不達成確率	0.06414	0.07826
バリュー・アット・リスク (VaR)	0.04535	0.09270
条件付きバリュー・アット・リスク (CVaR)	0.17176	0.23197

すべての下方リスク尺度において、経験分布の方が同じ平均と分散を持つ対数正規分布よりも小さい下方リスクを取ることが確認できる。

[8]対数正規分布における各下方リスク尺度の計算方法を付録 B に示す。

4. 最適化モデル

4.1. 設定

3 節では定額積立投資を前提にして、平均・分散アプローチを議論した。本節では、リスク資産への投資だけでなく、貯蓄 (無リスク資産への投資) も含めて、平均・分散アプローチによる最適な積立方法 (各資産への最適投資金額) を考えてみよう。そこで、以下の条件の下で、n 年間にわたり、年当たり m 回、キャッシュ・インフローがある場合の最適化モデルを構築する。

1) mn 期間、時点 t $(t=0,\dots,mn-1)$ に d_t のキャッシュインフローがある
2) 時点 t でリスク資産へ x_t を投資し、残りを無リスク資産で保有する
3) キャッシュインフローと無リスク資産をリスク資産へ投資できる
4) 積み立てたリスク資産は売却しない
5) 設定した目標収益を満たす条件のもとで収益の分散を最小化する

期間 t の収益を $\tilde{R}_t$ とすると、累積収益 $\tilde{Y}$ は以下のようになる。ここで、無リスク金利を $r_f(R_f=1+r_f/m)$ とする。

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= \sum_{t=0}^{mn-1}\left(\prod_{k=t+1}^{mn}\tilde{R}_k\right)x_t+\sum_{t=0}^{mn-1}(d_t-x_t)\,R_f^{mn-t}\\ &= \sum_{t=0}^{mn-1}\left\{\left(\prod_{k=t+1}^{mn}\tilde{R}_k\right)-R_f^{mn-t}\right\}x_t+\sum_{t=0}^{mn-1}R_f^{mn-t}d_t \end{aligned} \tag{4.1}$$

これを図で示すと、図 5 のように表すことができる。

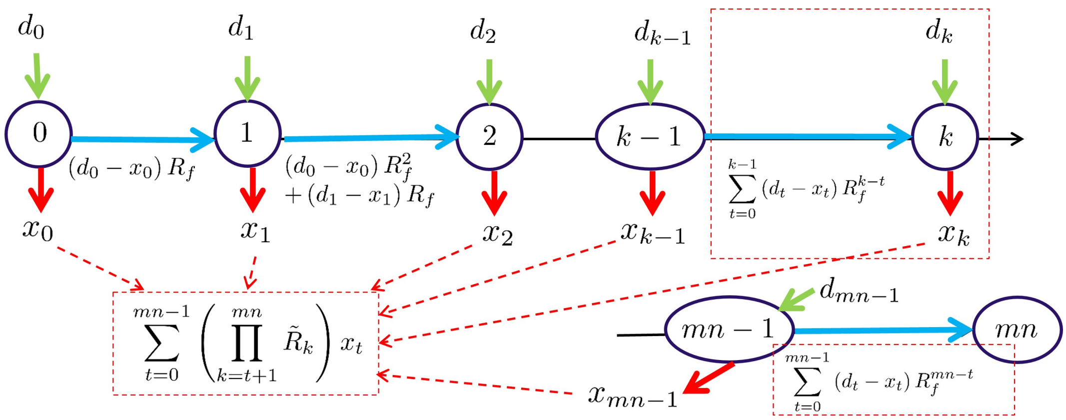


図 5: キャッシュ・フロー

したがって、累積収益の平均と分散は以下のように計算される。

$$\bar{y}_{mv} = \sum_{t=0}^{mn-1}\alpha^{mn-t}x_t+\sum_{t=0}^{mn-1}R_f^{mn-t}d_t \tag{4.2}$$

$$\sigma_{mv}^2 = \sum_{t=0}^{mn-1}\sum_{k=0}^{mn-1}\sigma_{tk}x_tx_k \tag{4.3}$$

4.2. 定式化

(目標) 期待倍率を y_E とすると、最適積立投資モデルは以下のように定式化することができる。

$$\text{最小化} \quad \sum_{t=0}^{mn-1} \sum_{k=0}^{mn-1} \sigma_{tk} x_t x_k \tag{4.4}$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{t=0}^{mn-1} \left(\alpha^{mn-t} - R_f^{mn-t}\right) x_t + \sum_{t=0}^{mn-1} R_f^{mn-t} d_t \geq y_E \tag{4.5}$$

$$\sum_{t=0}^{k-1} R_f^{k-t} x_t \leq \sum_{t=0}^{k-1} R_f^{k-t} d_t \ (k = 1, \ldots, mn) \tag{4.6}$$

$$x_t \geq 0 \ (t = 0, \ldots, mn-1) \tag{4.7}$$

(4.5) 式は (4.1) 式の期待価値が y_E 以上となることを表す制約式、(4.6) 式は $k-1$ 時点において投資をせずに k 時点に持ち越す無リスク資産の非負条件 (図 5 参照) を表す。(4.6) 式は、0 時点における投資額の上限制約 ($x_0 \leq d_0$) も含んでいる。(4.7) 式はリスク資産の非負条件を表す。

定額積立の場合、積立元本合計を 1 とすると、$d_t = \frac{1}{mn}$ となり、上記の定式化は以下のように簡単に書くことができる。

$$\text{最小化} \quad \sum_{t=0}^{mn-1} \sum_{k=0}^{mn-1} \sigma_{tk} x_t x_k \tag{4.8}$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{t=0}^{mn-1} \left(\alpha^{mn-t} - R_f^{mn-t}\right) x_t + A_{mn} \geq y_E \tag{4.9}$$

$$\sum_{t=0}^{k-1} R_f^{k-t} x_t \leq A_k \ (k = 1, \ldots, mn) \tag{4.10}$$

$$x_t \geq 0 \ (t = 0, \ldots, mn-1) \tag{4.11}$$

$$\text{ただし、} A_k = \begin{cases} \frac{R_f\left(R_f^k - 1\right)}{nr_f} & : \ r_f \neq 0 \\ \frac{t}{mn} & : \ r_f = 0 \end{cases} \quad (k = 1, \ldots, mn)$$

以降では、定額積立を想定して数値分析を行う。

4.3. 数値分析

リスク資産と無リスク資産に 20 年間 ($n = 20$), 年 1 回積立 ($m = 1$) する場合の最適積立投資戦略の結果を示す。リスク資産の期待収益率 6.3%($\mu = 0.063$), 標準偏差 15%($\sigma = 0.15$) と想定する。無リスク資産の金利を 0%と 1%、それぞれにおける効率的フロンティアを図 6 に示す。金利 1%の場合のまた、いくつかの収益倍率に対する最適積立投資戦略を図 7 に示す。

図 6 の効率的フロンティアはほぼ直線に見えるが、標準偏差が大きくなると、その傾きは徐々に小さくなっている (凹型になる)。効率的フロンティアの右端は金利に関係なく、リスク資産へ全額積み立てること (定額積立投資) が最適積立投資戦略になる。DCA は一括投資との比較において効率的にはならないが、資金制約がある場合には定額積立投資は最適戦略になる。図 7 の最適積立戦略を見ると、期待価値 (倍率) が大きくなるほど、前半時点からなるべくリスク資産に投資することがわかる。期待価値を最大化するには全額をリスク資産へ投資、リスクを最小化するには全額を無リスク資産へ投資する (リスク資産に投資しない) ことが最適戦略となる。

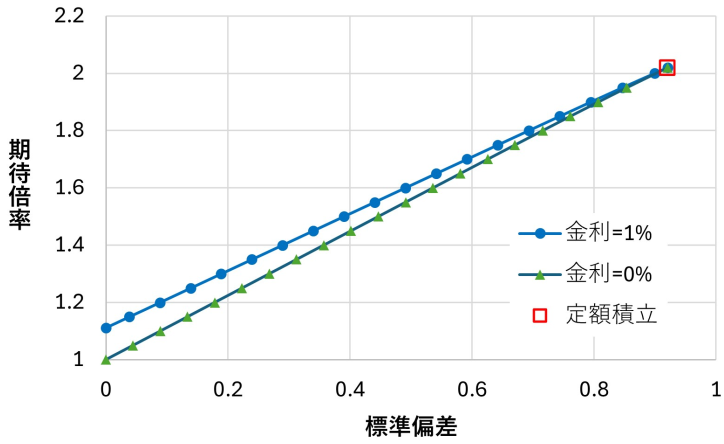
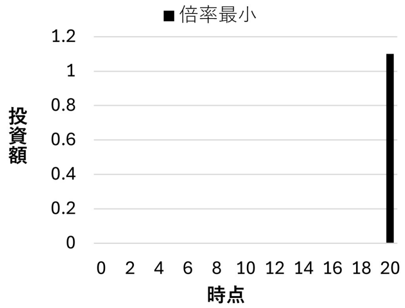
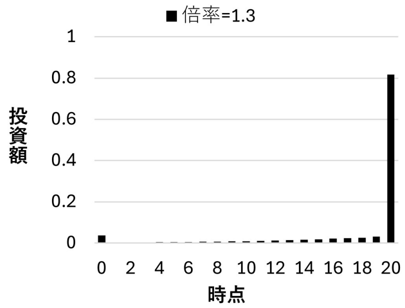


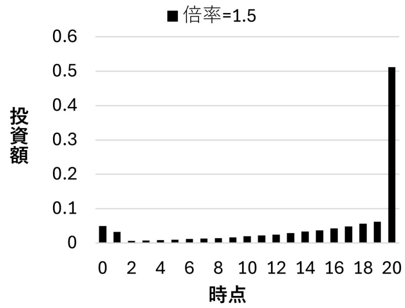
図 6: 効率的フロンティア



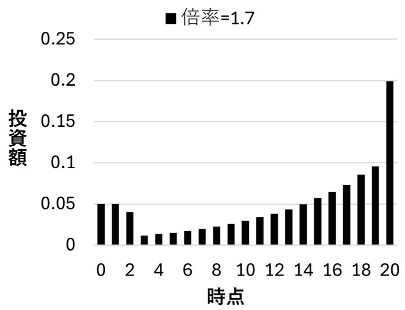
(a) $y_E = 1.11$(最小倍率)



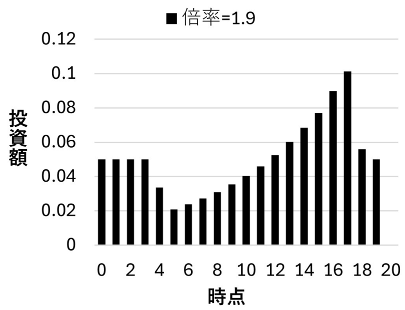
(b) $y_E = 1.3$



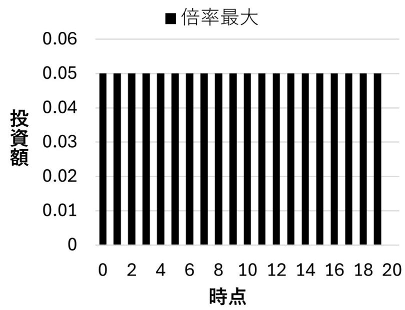
(c) $y_E = 1.5$



(d) $y_E = 1.7$



(e) $y_E = 1.9$



(f) $y_E = 2.02$(最大倍率)

図 7: 最適積立投資戦略

5. コンスタント・リバランス戦略

Panyagometh and Zhu[8] は、リスク資産と無リスク資産の資産配分と DCA を対象として、最終時点の価値の平均、標準偏差、シャープレシオをシミュレーションを用いて計算し、比較している。平均・分散基準およびシャープレシオ基準で、資産配分が DCA を優越していることを示している。本稿では、積立投資においてリスク資産と無リスク資産の資産配分を行う 2 つの戦略として、コンスタント・リバランス戦略 (以降、CR 戦略) と買い持ち戦略 (以降、BH 戦略) を比較する[9]。シミュレーションではなく、2.2 節で得られた計算式を用いて、CR 戦略と BH 戦略の収益倍率 (積立元本が 1 のときの最終時点の価値) の平均と分散を計算することによって、同様の分析を行い、比較する。

[9] 具体的な投資対象で考えるならば、資金のある割合をリスク資産として米国株式のみに投資し、残りを銀行預金 (無リスク金利) で持つことを想定すればよい。

以降、定額積立 (毎期の追加資金は一定) を想定する。CR 戦略と BH 戦略のリスク資産への配分は以下の通りである。

◇ CR 戦略: すでに投資している資金と積み立てられた追加資金を合わせて、毎期、リスク資産と無リスク資産を一定割合にリバランスする (各時点で積み立てた資金をリスク資産と無リスク資産のポートフォリオで運用する)

◇ BH 戦略: 積み立てられた追加資金のみ、一定割合をリスク資産、残りを無リスク資産に投資する（リスク資産と無リスク資産を別々に積み立てて運用する）

各戦略の収益倍率の平均と分散を計算するために、(2.6), (2.8) 式の α を a、β を b と書き換えた式として、以下の関数を用いる。

$$f(a) = \left(\frac{1}{mn}\right)\frac{(a^{mn}-1)\,a}{a-1} \tag{5.1}$$

$$g(a,b) = \left(\frac{1}{mn}\right)^2\left[\frac{b(b^{mn}-1)}{b-1}+\frac{2ab}{b-a}\left(\frac{b^{mn}-1}{b-1}-\frac{a^{mn}-1}{a-1}\right)\right]-\{f(a)\}^2 \tag{5.2}$$

年数は n、年当たりの積立回数は m、リスク資産の期待収益率は μ、収益率の分散は σ^2、無リスク金利は r_f とする。これらを用いて、以下の値を設定する。

$$\alpha = 1+\frac{\mu}{m},\quad \beta = \frac{\sigma^2}{m}+\alpha^2,\quad R_f = 1+\frac{r_f}{m}$$

CR 戦略および BH 戦略の収益倍率の平均と分散を以下に示す。

CR 戦略

$$\text{平均}\ :\ \overline{V}_{CR} = f(\alpha_{CR}) \tag{5.3}$$

$$\text{分散}\ :\ \sigma^2_{CR} = g(\alpha_{CR},\beta_{CR}) \tag{5.4}$$

ここで、w_{CR} をリスク資産への投資割合とすると、α_{CR}, β_{CR} は以下のように計算される。

$$\alpha_{CR} = R_f + (\alpha - R_f)w_{CR},\quad \beta_{CR} = \frac{w_{CR}^2\sigma^2}{m}+\alpha_{CR}^2$$

BH 戦略

$$\text{平均}\ :\ \overline{V}_{BH} = w_{BH}f(\alpha)+(1-w_{BH})f(R_f) \tag{5.5}$$

$$\text{分散}\ :\ \sigma^2_{BH} = w^2_{BH}g(\alpha,\beta) \tag{5.6}$$

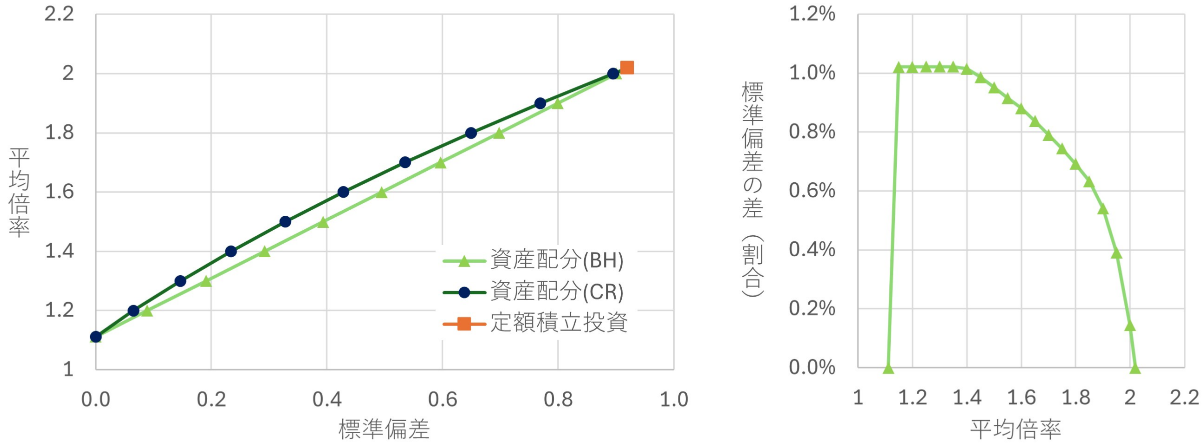
ここで、w_{BH} をリスク資産への投資割合とする。

平均収益倍率が等しくなる CR 戦略と BH 戦略の収益倍率の分散を比較することによって、同様の分析を行う。平均収益倍率を $\overline{V}$ としよう。BH 戦略の投資割合 w_{BH} は以下のように求めることができる。

$$w_{BH} = \frac{\overline{V}-f(R_f)}{f(\alpha)-f(R_f)} \tag{5.7}$$

この値を (5.6) 式に代入し、分散を求めることができる。一方で、CR 戦略の投資割合 w_{CR} は (5.3) 式より、ニュートン法を用いて求める。その値を (5.4) 式に代入し、分散を求める。一般に、$w_{CR} \geq w_{BH}$ である[10]。4.3 節の例で、$\overline{V} = 1.6$ の場合を計算すると、$w_{CR} = 0.620$, $w_{BH} = 0.538$ と求められる。それぞれ (5.4), (5.6) 式に代入すると、$\sigma_{BH} = 0.495$, $\sigma_{CR} = 0.428$ と求められる。両戦略に対する様々な期待倍率と標準偏差の関係を図 8(左) に示す。

[10]導出を付録 C に示す。



(a) 効率的フロンティアの比較　　(b) 最適戦略と BH 戦略の比較

図 8: CR 戦略、BH 戦略、最適戦略の比較

$w_{CR} = w_{BH} = 100\%$ はどちらの戦略でもリスク資産への定額積立投資となり、$w_{CR} = w_{BH} = 0\%$ は定額貯蓄に相当する。図 8(左) を見ても分かるように、CR 戦略が BH 戦略を優越していることが分かる。また、4 節で示した最適積立投資戦略の効率的フロンティア (図 7, 金利 1%) は、資産配分 (BH) より少しだけ上に位置する (CR 戦略よりも下に位置する)。最適戦略に対する BH 戦略の収益倍率の標準偏差の差の割合を図 8(右) に示す。最適戦略と BH 戦略はほぼ同じであることがわかる。CR 戦略の方が途中でリバランスをしない買い持ちによる最適戦略を優越しており、リスク資産と無リスク資産の 2 資産ポートフォリオにおいてはリバランスが有効であることを示している。

以上の結果を考察してみよう。BH 戦略の方がリスク資産による複利効果で平均収益倍率は大きくなりやすいため、最終時点での平均収益倍率が同じであれば、リスク資産への投資割合が少なくてよいが、分散も大きくなりやすい。一方で、CR 戦略はリスク資産へのウェイトが高くなる分、ばらつきも大きくなるが、無リスク資産とのリバランスによってポートフォリオのリスクは小さくなると考えられる。

6.　おわりに

本稿では、収益率が正規分布に従うと想定して、平均・分散アプローチの枠組みで数理的に積立投資の評価を行う方法について議論した。積立投資と DCA の違いを明示し、初期時点にすべての資金がないという資金制約のもとで理論を展開した。まず、はじめに、定額積立投資の平均と分散の計算式を示した。そして、投資タイミングの分散効果とポートフォリオの分散効果の 2 つの見方によって、積立投資のリスク分散効果を説明した。また、モンテカルロ・シミュレーションを用いて、積立投資の収益分布を対数正規分布と比較し、その特徴を明らかにした。さらに、最適積立投資モデルを構築し、数値分析を用いて、最適積立戦略の特徴を示した。また、コンスタント・リバランス戦略と買い持ち戦略 (通常の積立戦略) を比較し、コンスタント・リバランス戦略が買い持ち戦略に比べて優越していることを示した。

参考文献

[1] Cho, D. D. and Kuvvet, E.(2015), Dollar-Cost Averaging: The Trade-Off Between Risk and Return, *Journal of Financial Planning*, Vol. 28, No.10, pp. 52-58.

[2] 枇々木 規雄 (2021), 126 ルール：積立投資の複利効果を概算する簡単な計算ルール, 日本 FP 学会ニュースレター、Vol.4, No.2. `https://www.jasfp.jp/newsletter04-2_0001.pdf`

[3] 枇々木 規雄 (2023), 一括投資と積立投資に活用できる法則（ルール）, ファイナンシャル・プラ

ンニング研究, No.23, pp.2-20. `https://www.jasfp.jp/hibiki23.pdf`

[4] 金融庁 (2024), NISA・ジュニア NISA 口座の利用状況調査に関する調査結果（2023 年 12 月末時点） `https://www.fsa.go.jp/policy/nisa/20240628.html` (最終アクセス: 2025 年 3 月 4 日)

[5] 金融庁 (2024), NISA・ジュニア NISA 口座の利用状況調査に関する調査結果（2024 年 9 月末時点） `https://www.fsa.go.jp/policy/nisa/20241220.html` (最終アクセス: 2025 年 3 月 4 日)

[6] Kirkby, J. L., Mitra, S., and Nguyen, D. (2020), An Analysis of Dollar Cost Averaging and Market Timing Investment Strategies, *European Journal of Operational Research*, Vol.286, pp.1168-1186.

[7] マルキール著, 井手正介 訳, ウォール街のランダム・ウォーカー (原著第 12 版), 日本経済新聞出版, 2019.

[8] Panyagometh, K. and Zhu, K. X.(2016), Dollar-Cost Averaging, Asset Allocation, and Lump Sum Investing, *Journal of Wealth Management*, Vol.18, No.4, pp.75-89.

[9] Smith, G. and Artigueher, H. (2018), Another Look at Dollar Cost Averaging, *The Journal of Investing*, Vol. 27, No. 2, pp. 66-75.

付録

A. 数式・導出

(2.7) 式 第 1 項

$$\sum_{t=1}^{mn} \beta^{mn-t+1} = \sum_{t=1}^{mn} \beta^t = \frac{\beta(\beta^{mn}-1)}{\beta-1} \tag{A.1}$$

(2.7) 式 第 2 項

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{mn-1} \sum_{u=t+1}^{mn} \alpha^{u-t}\beta^{mn-u+1} &= \sum_{t=1}^{mn-1} \sum_{v=1}^{mn-t} \alpha^v \beta^{mn-(v+t)+1} = \sum_{t=1}^{mn-1} \beta^{mn-t+1} \sum_{u=1}^{mn-t} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v \\
&= \sum_{t=1}^{mn-1} \beta^{mn-t+1} \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta}\left\{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{mn-t}\right\}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} \sum_{t=0}^{mn-1} \left(\beta^t - \alpha^t\right) \\
&= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(\frac{\beta^{mn}-1}{\beta-1} - \frac{\alpha^{mn}-1}{\alpha-1}\right)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

(3.8) 式 第 3 項

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{mn} \alpha^{2k} + 2\sum_{t=1}^{mn-1} \sum_{k=t+1}^{mn} \alpha^{k-t}\alpha^{2(mn-k+1)} \\
&= \frac{\alpha^2(\alpha^{2mn}-1)}{\alpha^2-1} + \frac{2\alpha^2}{\alpha-1}\left(\frac{\alpha^{2mn}-1}{\alpha^2-1} - \frac{\alpha^{mn}-1}{\alpha-1}\right) \\
&= \frac{\alpha^2(\alpha^{2mn}-1)}{\alpha^2-1}\left(\frac{2}{\alpha-1}+1\right) - \frac{2\alpha^2(\alpha^{mn}-1)}{(\alpha-1)^2} \\
&= \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}\left\{\alpha^{2mn}-1-2(\alpha^{mn}-1)\right\} = \left\{\frac{\alpha(\alpha^{mn}-1)}{\alpha-1}\right\}^2
\end{aligned} \tag{A.3}$$

B. 積立投資の収益倍率分布と対数正規分布の比較: 下方リスク尺度を用いた場合

対数正規分布の累積分布関数 $F(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(\cdot)$ によって、以下のように表すことができる。

$$F(x;\mu,\sigma)=\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)$$

対数正規分布における各リスク尺度の計算方法を以下に示す。

(1) 下方部分積率

y_G を目標倍率、$r_G=\ln y_G$ とすると、1 次下方部分積率は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}\mathrm{LPM}(1)(y_G) &= \mathrm{E}\left[|y-y_G|_-\right]=\int_0^{y_G}(y_G-y)g(y)dr=\int_{-\infty}^{r_G}(e^{r_G}-e^r)f(r)dr\\ &= e^{r_G}\int_{-\infty}^{r_G}f(r)dr-\int_{-\infty}^{r_G}e^rf(r)dr=y_G\Phi(G_0)-H_1\Phi(G_1)\end{aligned}\tag{B.1}$$

ここで、$f(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ は正規分布、$g(y)$ は対数正規分布の確率密度関数である。また、$H_1=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)$, $G_k=\frac{r_G-(\mu+k\sigma^2)}{\sigma}$ である[11]。元本を目標とする (元本を下回ることをリスクと考える) と、目標倍率は $y_G=1$ ($r_G=0$) である。

(2) 不達成確率

目標倍率 y_G を下回る確率は以下のように表せる

$$F(y_G;\mu,\sigma)=\Phi\left(-\frac{\mu-\ln y_G}{\sigma}\right)\tag{B.2}$$

元本を下回る確率の場合は $y_G=1$、無リスク運用 (金利 r_f) を下回る確率の場合は $y_G=e^{r_f}$ とする。

(3) バリュー・アット・リスク (VaR)

目標倍率 y_G からの差の値に対する信頼水準 β の VaR は以下のように示される。

$$\mathrm{VaR}(y_G,\beta)=y_G-y_v=y_G-e^{-\mu+K_\beta\sigma}\tag{B.3}$$

ここで、y_v は収益倍率において VaR に相当する値、K_β は信頼水準 β における標準正規分布の累積分布関数の逆関数の値を表す。例えば、$\beta=0.95$ のとき、$K_\beta=1.65$ である。元本からの差の値に対する VaR を求めたいときは、$y_G=1$ とする。

(4) 条件付きバリュー・アット・リスク (CVaR)

目標倍率 y_G からの差の値に対する信頼水準 β の CVaR は以下のように示される。

$$\begin{aligned}\mathrm{CVaR}(y_G,\beta) &= y_G-\frac{1}{1-\beta}\int_0^{y_v}yg(y)dy=y_G-\frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{-\alpha}e^rf(r)dr\\ &= y_G-\frac{1}{1-\beta}e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\Phi\left(-(K_\beta+\sigma)\right)\end{aligned}\tag{B.4}$$

ここで、α は収益率において VaR に相当する値で、$\frac{-\alpha-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}=-(K_\beta+\sigma)$ である。元本からの差の値に対する CVaR を求めたいときは、$y_G=1$ とする。

---

[11] (B.1) 式第 2 項 ($k=1$) は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{r_G}e^{kr}f(r)dr=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{r_G}\exp\left(-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}+kr\right)dr\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{r_G}\exp\left(-\frac{(r-(\mu+k\sigma^2))^2-2k\mu\sigma^2-\sigma^4}{2\sigma^2}\right)dr\\ &= \exp\left(k\mu+\frac{k^2\sigma^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{r_G}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(r-(\mu+k\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right)dr\end{aligned}$$

C.　2資産ポートフォリオの CR 戦略と BH 戦略のウェイトの関係

積立投資において平均収益倍率が等しくなる CR 戦略と BH 戦略のウェイトの関係を導出する。CR 戦略のウェイトを w_{CR}、BH 戦略のウェイトを w_{BH} とすると、$w_{CR} \geq w_{BH}$ の関係が得られる。この関係が得られることを以下で示す。積立投資金額の合計は、各時点の積立額を満期まで一括投資した金額の和であり、平均投資金額も同様に計算できる。そこで、まずはじめに、CR 戦略および BH 戦略の $mn-t$ 時点における (一括投資の) 平均収益倍率を以下に示す。ここで、w_{CR}, w_{BH} をリスク資産への投資割合とする。また、α, R_f, α_{CR} は 5 節を参照されたい。

$$CR\text{ 戦略 }:\ \overline{V}_{CR,t} = \alpha_{CR}^t = \{R_f + w_{CR}(\alpha - R_f)\}^t \tag{C.1}$$

$$BH\text{ 戦略 }:\ \overline{V}_{BH,t} = w_{BH}\alpha^t + (1-w_{BH})R_f^t \tag{C.2}$$

$mn-t$ 時点での投資に対する最終時点 (mn 時点) の平均収益倍率が等しくなる CR 戦略と BH 戦略のウェイトを求める。平均収益倍率を $\overline{V}_t$、各戦略のウェイトを $w_{CR,t}, w_{BH,t}$ とする。(C.1), (C.2) 式を参考にすると、それらは以下のように計算される。

$$CR\text{ 戦略 }:\ w_{CR,t} = \frac{\sqrt[t]{\overline{V}_t} - R_f}{\alpha - R_f} \tag{C.3}$$

$$BH\text{ 戦略 }:\ w_{BH,t} = \frac{\overline{V}_t - R_f^t}{\alpha^t - R_f^t} \tag{C.4}$$

各時点におけるウェイトの差を計算すると、

$$\begin{aligned} w_{CR,t} - w_{BH,t} &= \frac{\sqrt[t]{\overline{V}_t} - R_f}{\alpha - R_f} - \frac{\overline{V}_t - R_f^t}{\alpha^t - R_f^t} = \frac{\left(\sqrt[t]{\overline{V}_t} - R_f\right)\left(\frac{\alpha^t - R_f^t}{\alpha - R_f} - \frac{V - R_f^t}{\sqrt[t]{\overline{V}_t} - R_f}\right)}{\alpha^t - R_f^t} \\ &= \frac{\left(\sqrt[t]{\overline{V}_t} - R_f\right)\left[\sum_{k=0}^{t-1}\left\{\alpha^k - \left(\sqrt[t]{\overline{V}_t}\right)^k\right\} R_f^{t-k}\right]}{\alpha^t - R_f^t} \geq 0 \quad (\because\ R_f^t \leq \overline{V}_t \leq \alpha^t) \end{aligned} \tag{C.5}$$

となる。したがって、一括投資においては、CR 戦略のウェイトは BH 戦略のウェイトよりも大きくなることがわかる。BH 戦略の方が時間経過とともにリスク資産比率が相対的に高まりやすいので、CR 戦略の投資割合よりも各時点の投資割合は低く設定される。積立投資は、各時点の積立の和なので、投資割合も同様の関係が得られることを以下に示す。

BH 戦略のウェイトを w_{BH} とすると、$mn-t$ 時点の積立額に対する最終時点の収益倍率は以下のように計算できる。前述した $\overline{V}_t$ とは異なる値なので、$\overline{V}_t^1$ とする。

$$\overline{V}_t^1 = w_{BH}\alpha^t + (1-w_{BH})R_f^t$$

ここで、(C.3) 式の $\overline{V}_t$ の代わりに $\overline{V}_t^1$ を代入したときのウェイトを $w_{CR,t}^1$ とする。この場合も $w_{CR,t}^1 \geq w_{BH}$ は成り立つので、$w_{CR,t}^1 = w_{BH} + e_t,\ (e_t \geq 0)$ とする。一方、積立投資の最終時点の収益倍率を $\overline{V}$ として、それを満たす CR 戦略を示す。

$$\overline{V} = \sum_{t=1}^{mn}\overline{V}_t^1 = \sum_{t=1}^{mn}\left\{R_f + w_{CR,t}^1(\alpha - R_f)\right\}^t = \sum_{t=1}^{mn}\{R_f + (w_{BH} + e_t)(\alpha - R_f)\}^t \tag{C.6}$$

一方で、積立投資における CR 戦略のウェイトを w_{CR} とすると、

$$\overline{V} = \sum_{t=1}^{mn}\{R_f + w_{CR}(\alpha - R_f)\}^t \tag{C.7}$$

と記述できる。ここで、(C.6) 式と (C.7) 式が等価であることを満たすためには、$w_{CR} \geq w_{BH}$ である必要がある。したがって、積立投資においても、$w_{CR} \geq w_{BH}$ の関係が得られる。