

新しい公的年金積立金運用の基本ポートフォリオ

枇々木 規雄

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

2014年12月1日

1. はじめに

2006年4月に公的年金積立金運用独立行政法人(以降、GPIF)は、年金資金運用基金の年金資金管理運用事業を引き継ぎ発足された。そのときの基本ポートフォリオは2008年3月末に実現するという前提で策定された。その後、2013年6月17日に「年金積立金管理運用独立行政法人 中期計画の変更について」[3]で中期計画(基本ポートフォリオ)の変更を公表した。さらに、2014年10月31日に「公的年金積立金運用 中期計画の変更について」[4]を公表し、基本ポートフォリオを再変更した。上記の経緯を含めて、基本ポートフォリオを表1に示す。

表 1: 公的年金積立金運用における基本ポートフォリオと乖離許容幅

公的年金積立金運用への移行時(2008年3月31日)

資産クラス	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産
基本ポートフォリオ	67%	11%	8%	9%	5%
乖離許容幅	±8%	±6%	±5%	±5%	なし

中期計画(基本ポートフォリオ)の変更(2013年6月7日)

資産クラス	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産
基本ポートフォリオ	60%	12%	11%	12%	5%
乖離許容幅	±8%	±6%	±5%	±5%	なし

中期計画(第2期)の再変更(2014年10月31日)

資産クラス	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
基本ポートフォリオ	35%	25%	15%	25%
乖離許容幅	±10%	±9%	±4%	±8%

再変更後の基本ポートフォリオでは短期資産は設けず、4資産で100%となるように設定されている。実際の運用では短期資産を保有する分、他の4資産のウェイトが小さくなるが、この分も含めて各資産の乖離許容幅の範囲で管理するとしている。具体的には運用目標は短期資産を2%保有するとみなして確保することが必要であると記述されているが、98%を100%と見なして基本ポートフォリオが設定している。

公表資料[4]には様々な分析を行ったと書かれているが、すべての資産配分割合が5%刻みとなっている点が気になる点である。もちろん、わかりやすいということは重要であるが、「最適な」基本ポートフォリオになっているのかは確認する必要がある。そこで、本

稿では公表資料 [4] に記述されているパラメータや前提条件をもとに、策定された基本ポートフォリオが最適かどうかをできる限り確認するとともに、追加的な分析結果も示す。

本論文の構成は以下の通りである。2節では GPIF により策定された基本ポートフォリオの導出を試みる。3節では1期間最適化モデルを構築し、最適解を求めるとともに、様々な条件のもとで感度分析も行う。4節ではまとめと今後の課題を述べる。

2. 基本ポートフォリオの導出

2.1. 設定条件

2014年10月31日に公表された「公的年金積立金運用 中期計画の変更について」[4]によると、基本ポートフォリオは4資産のリターン、リスク等に基づき、多数のポートフォリオ(5%刻み)について推計したと述べている。用いるパラメータを表2に示す。

表 2: パラメータ

	ケース	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産	賃金上昇率
期待リターン	経済中位	2.6%	6.0%	3.7%	6.4%	1.1%	2.8
	市場基準	2.0%	5.2%	3.5%	6.2%	1.0%	2.1
標準偏差		4.7%	25.1%	12.6%	27.3%	0.5%	1.9
相関係数	国内債券	1.00	-0.16	0.25	0.09	0.12	0.18
	国内株式	-0.16	1.00	0.04	0.64	-0.10	0.12
	外国債券	0.25	0.04	1.00	0.57	-0.15	0.07
	外国株式	0.09	0.64	0.57	1.00	-0.14	0.10
	短期資産	0.12	-0.10	-0.15	-0.14	1.00	0.35
	賃金上昇率	0.18	0.12	0.07	0.10	0.35	1.00

† 短期資産の収益率は市場で一般に観察される収益率ではなく、キャッシュアウトへの対応など実際の運用を想定した場合に想定される収益率

厚生労働省 [2] が 2014年6月3日に公表した財政検証でいずれの経済シナリオでも必要な運用利回りが確保できるため運用目標の元となった「経済中位ケース」(財政検証のケース E) と、現在の市場に織り込まれた将来の金利水準を前提とする「市場基準ケース」(財政検証のケース G) の2ケースに対する期待リターン、名目賃金上昇率を用いる。期待リターンは名目リターンで、「実質的なリターン + 名目賃金上昇率」としている。リスク(標準偏差)と相関係数は4資産とも過去20年のデータ等を用いて推計している。国内債券のリスクの計算においては、将来のデュレーションの長期化を考慮している。

2.2. 基本ポートフォリオの構築

以下の制約条件のもとで最もリスク(条件付平均不足率: 名目賃金上昇率を下回るときの平均不足率)の小さいポートフォリオを選定する。

- ① 運用目標(名目賃金上昇率 + 1.7%)を満たすこと(実質リターンベースの運用目標 $\bar{r}_R = 1.7\%$)
- ② ただし、短期資産を2%保有することを前提に運用目標を設定する

③ ポートフォリオの下方確率 (名目賃金上昇率を下回る確率) が全額国内債券運用の場合の下方確率を下回ること

④ 外国株式 \geq 外国債券

公表資料 [4] に掲載されている基本ポートフォリオの統計量を表 3 に示す。

表 3: 基本ポートフォリオ (4 資産) の統計量

ケース	実質的な リターン	名目 リターン	標準 偏差	下方 確率	条件付 平均不足率 (正規分布)	条件付 平均不足率 (経験分布)
経済中位	1.77%	4.57%	12.8%	44.4%	9.45%	11.2%
市場基準	1.98%	4.08%	12.8%	43.8%	9.38%	11.2%

実質リターンベースの運用目標は 1.7% であるが、短期資産を 2% 保有するとみなし、そのリターン減少分を逆算すると、経済中位ケースで 1.77%、市場基準ケースで 1.76% を確保することが必要であると記載されている¹。表 2 を見ると短期資産、賃金上昇率ともに確率変数として設定しているため、基本ポートフォリオ (4 資産) の下方確率、条件付平均不足率がどのように計算されているか不明である²。そこで本稿では基本ポートフォリオだけでなく、短期資産と賃金上昇率も含めた統計量を以下の方法で計算する。ただし、下方確率、条件付平均不足率とともに各資産と賃金上昇率が正規分布に従う場合の計算式である³。条件付平均不足率 (正規分布) の計算方法は付録 A を参照されたい。

$$\text{実質リターン} : \bar{r}_p^c = \sum_{j \in A} \bar{r}_j^c x_j - \bar{r}_w^c \quad (2.1)$$

$$\text{標準偏差} : \sigma_p = \sqrt{\sum_{j \in A} \sum_{k \in A} \sigma_{jk} x_j x_k - 2 \sum_{k \in A} \sigma_{j,w} x_j + \sigma_w^2} \quad (2.2)$$

¹基本ポートフォリオ (4 資産) の実質リターンベースの運用目標は以下のように計算される。

$$\text{経済中位} : \{(1.7 - (1.1 - 2.8) \times 0.02) / (1 - 0.02) = 1.7694 \approx 1.77(\%)\}$$

$$\text{市場基準} : \{(1.7 - (1.0 - 2.1) \times 0.02) / (1 - 0.02) = 1.7551 \approx 1.76(\%)\}$$

²短期資産を含めずに表 3 に相当する基本ポートフォリオ (4 資産) の統計量を計算すると以下のようになる。賃金上昇率を期待値で一定と考える場合と確率変数とする場合の 2 ケースを以下に示す。

賃金 上昇率	ケース	実質的な リターン	名目 リターン	標準 偏差	下方 確率	条件付 平均不足率
期待値 で一定	経済中位	1.765%	4.565%	12.766%	44.50%	9.571%
	市場基準	1.975%	4.075%	12.766%	43.85%	9.501%
確率 変数	経済中位	1.765%	4.565%	12.630%	44.44%	9.462%
	市場基準	1.975%	4.075%	12.630%	43.79%	9.392%

表 3 の標準偏差は賃金上昇率を期待値で一定とした場合の数値に近く、下方確率、条件付平均不足率は賃金上昇率を確率変数として扱う場合の数値に近い。

³条件付平均不足率 (経験分布) は「株式等は想定よりも下振れ確率が大きい場合 (いわゆる「テイルリスク」) もあることを考慮し、正規分布に替えて、過去 20 年のデータ (経験分布) から一定の仮定を置いて乱数を発生させ計算したものです」と記載されているが、「一定の仮定を置いて乱数を発生させて計算した」方法が具体的に書かれていないため、条件付平均不足率 (正規分布) のみを用いて基本ポートフォリオを導出する。

$$\text{下方確率} : N(R_w^c), \text{ただし、} R_w^c = -\frac{\bar{r}_p^c}{\sigma_p}, (c \in C) \quad (2.3)$$

$$\text{条件付平均不足率} : CSF^c = -\bar{r}_p^c + \left(\frac{h(R_w^c)}{N(R_w^c)} \right) \sigma_p, (c \in C) \quad (2.4)$$

用いた記号は以下の通りである。

A : リスク資産の集合 $A = \{DB, DS, FB, FS, SA\}$ (DB : 国内債券, DS : 国内株式, FB : 外国債券, FS : 外国株式, SA : 短期資産)

C : ケースの集合 $C = \{e, m\}$ (e : 経済中位ケース, m : 市場基準ケース)

σ_{jk} : 資産 j と資産 k の共分散

$\sigma_{j,w}$: 資産 j と賃金上昇率の共分散

σ_w^2 : 賃金上昇率の分散

\bar{r}_j^c : 資産 (証券) j の期待収益率 (名目期待リターン) ($j \in A$)

\bar{r}_w^c : ケース c の名目賃金上昇率 ($c \in C$)

x_j : 資産 j の投資比率 ($j \in A$)

この方法で計算された統計量を表4に示す。

表 4: 短期資産と賃金上昇率も含めた統計量

ケース	実質的な リターン	名目 リターン	標準 偏差	下方 確率	条件付 平均不足率
経済中位	1.696%	4.496%	12.38%	44.55%	9.283%
市場基準	1.914%	4.014%	12.38%	43.86%	9.210%

経済中位ケースの名目リターンの運用目標は4.5%であるが、表4を見ると4.496%となっている。表1で示された数値の有効数字によって目標値が達成されていない可能性がある。そこで次節では有効数字を考慮して、パーセント表示で小数点第3位を四捨五入して制約条件を満たすかどうかを判定し、ポートフォリオを選択することにする。

2.3. 基本ポートフォリオの選択

各資産と賃金上昇率が正規分布に従うと想定し、5%刻みの全組み合わせ(1,771通り)の中から制約条件を満たすポートフォリオの中で、条件付平均不足率のベスト5を表5に示す。基本ポートフォリオの記載は合計100%で示しているが、以降、期待リターン、条件付平均不足率ともに短期資産(2%保有)と賃金上昇率を含めた統計量である。

5%刻みであれば、GPIFの推奨する基本ポートフォリオの条件付平均不足率が最小であることが分かる。GPIFの資料を見ると、「±2%の範囲で1%刻みのポートフォリオについても同様の推計を行い、当初のポートフォリオが最も効率的であることを確認しました」と記述してあるので、確認のため同様の分析を行った結果(ベスト5)を表6に示す。

GPIFの推奨する基本ポートフォリオは2番目になっている。前述のように、GPIFの分析では「条件付平均不足率(経験分布)」を推計しているため、この影響で表6の1番目のポートフォリオが選択されていないかもしれないが、「条件付平均不足率(経験分布)」の推計方法が書かれていないため、確かめることができなかった。

表 5: 基本ポートフォリオ (5%刻み)

	No	基本ポートフォリオ				期待リターン		標準偏差	条件付平均不足率		
		国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	経済中位	市場基準		経済中位	市場基準	合計
5%刻み	1	35%	25%	15%	25%	4.496	4.014	12.375	9.2826	9.2101	18.4927
	2	30%	30%	20%	20%	4.530	4.038	12.430	9.3144	9.2452	18.5596
	3	30%	25%	20%	25%	4.550	4.087	12.670	9.4988	9.4199	18.9186
	4	35%	20%	15%	30%	4.515	4.063	12.682	9.5200	9.4377	18.9577
	5	45%	30%	0%	25%	4.501	3.950	12.669	9.5149	9.4651	18.9800

表 6: 基本ポートフォリオ ±2%(1%刻み)

	No	基本ポートフォリオ				期待リターン		標準偏差	条件付平均不足率		
		国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	経済中位	市場基準		経済中位	市場基準	合計
基本ポート ±2% (1%刻み)	1	34%	27%	16%	23%	4.499	4.009	12.333	9.2479	9.1781	18.4260
	2	35%	25%	15%	25%	4.496	4.014	12.375	9.2826	9.2101	18.4927
	3	34%	26%	16%	24%	4.503	4.018	12.381	9.2847	9.2129	18.4976
	4	33%	27%	17%	23%	4.509	4.023	12.389	9.2890	9.2178	18.5068
	5	36%	27%	13%	24%	4.504	4.006	12.414	9.3109	9.2436	18.5545

ところで、GPIF は5%刻みで制約条件を満たすポートフォリオを探しているが、もう少し厳密に行うために、1%刻みの全組み合わせ (176,851 通り) について調べてみよう。ベスト5を表7に示す。

表 7: 基本ポートフォリオ (1%刻み)

	No	基本ポートフォリオ				期待リターン		条件付平均不足率		
		国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	経済中位	市場基準	経済中位	市場基準	合計
1%刻み	1	31%	29%	20%	20%	4.497	4.007	9.1645	9.0947	18.2592
	2	32%	32%	18%	18%	4.501	3.989	9.1835	9.1208	18.3043
	3	33%	30%	17%	20%	4.498	3.994	9.1940	9.1288	18.3228
	4	31%	28%	20%	21%	4.501	4.016	9.1975	9.1257	18.3232
	5	32%	31%	18%	19%	4.505	3.999	9.2069	9.1423	18.3493

さらに条件付平均不足率の小さいポートフォリオを見つけることができた。掲載していないが、GPIF の推奨する基本ポートフォリオは34番目であった。5%刻みでポートフォリオを求めたあとで、「±2%の範囲で1%刻みのポートフォリオについても同様の推計を行う」ということをするのであれば、最初から1%刻みで分析を行い、基本ポートフォリオを求めの方が理にかなっていると思われる⁴。

ところで、資産への投資比率の制約条件として「外国株式 ≥ 外国債券」を課しているが、投資比率に差を付けなければいけない場合の1%刻みの最適ポートフォリオを表8に示す。

外国株式と外国債券の差を5%とする場合も、GPIF が推奨する基本ポートフォリオよりも条件付平均不足率の小さいポートフォリオを得ることができている。

⁴ 「条件付平均不足率 (経験分布)」の推計をするために乱数を発生させて (モンテカルロ・シミュレーションで) 計算する場合、計算量はいくつかかもしれないが、行っていることに一貫性がないように思える。

表 8: 外国資産比率に差を付ける場合の最適ポートフォリオ (1%刻み)

		基本ポートフォリオ				期待リターン		条件付平均不足率		
		国内 債券	国内 株式	外国 債券	外国 株式	経済 中位	市場 基準	経済 中位	市場 基準	合計
FS-FB=	0%	31%	29%	20%	20%	4.497	4.007	9.1645	9.0947	18.2592
	1%	31%	28%	20%	21%	4.501	4.016	9.1975	9.1257	18.3232
	2%	34%	34%	15%	17%	4.498	3.966	9.2141	9.1579	18.3720
	3%	33%	30%	17%	20%	4.498	3.994	9.1940	9.1288	18.3228
	4%	33%	29%	17%	21%	4.502	4.004	9.2227	9.1555	18.3782
	5%	33%	28%	17%	22%	4.506	4.014	9.2544	9.1852	18.4395

3. 最適ポートフォリオの導出

GPIFは5%刻みのポートフォリオを推奨しているが、2節での分析でも示したように5%刻みというのは制約ではない。そこで、最適化モデルを構築し、最適な基本ポートフォリオを導出する。

3.1. 定式化

用いる記号は以下の通りである⁵。

(1) 集合

A : リスク資産の集合 $A = \{DB, DS, FB, FS, SA\}$ (DB : 国内債券, DS : 国内株式, FB : 外国債券, FS : 外国株式, SA : 短期資産)

C : ケースの集合 $C = \{e, m\}$ (e : 経済中位ケース, m : 市場基準ケース)

(2) パラメータ

σ_{jk} : 資産 j と資産 k の共分散

$\sigma_{j,w}$: 資産 j と賃金上昇率の共分散

σ_w^2 : 賃金上昇率の分散

w_{SA} : 短期資産の保有比率

\bar{r}_j^c : 資産 (証券) j の期待収益率 (名目期待リターン) ($j \in A$)

\bar{r}_R : 運用目標 (実質リターン)

\bar{r}_w^c : ケース c の名目賃金上昇率 ($c \in C$)

(3) 決定変数, 中間変数

x_j : 資産 j の投資比率 ($j \in A$)

d_F : 外国株式と外国債券の差の下限

\bar{r}_p^c : ケース c の「ポートフォリオ収益率 - 賃金上昇率」の期待値 ($c \in C$)

σ_p : 「ポートフォリオ収益率 - 賃金上昇率」の標準偏差

R_w^c : ケース c の「ポートフォリオ収益率 - 賃金上昇率」の期待値をその標準偏差を使って基準化された値 ($c \in C$)

⁵2.2節で用いた記号と一部重複する。

2 ケースの条件付平均不足率の和を目的関数として最小化するモデルを以下に示す。

$$\text{Minimize } \sum_{c \in C} CSF^c \quad (3.1)$$

$$\text{subject to } \bar{r}_p^c = \sum_{j \in A} \bar{r}_j^c x_j - \bar{r}_w^c \quad (3.2)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{j \in A} \sum_{k \in A} \sigma_{jk} x_j x_k - 2 \sum_{k \in A} \sigma_{j,w} x_j + \sigma_w^2} \quad (3.3)$$

$$R_w^c = -\frac{\bar{r}_p^c}{\sigma_p}, \quad (c \in C) \quad (3.4)$$

$$\bar{r}_p^c \geq \bar{r}_R, \quad (c \in C) \quad (3.5)$$

$$CSF^c = -\bar{r}_p^c + \left(\frac{h(R_w^c)}{N(R_w^c)} \right) \sigma_p, \quad (c \in C) \quad (3.6)$$

$$\sum_{j \in A} x_j = 1 \quad (3.7)$$

$$x_{SA} = w_{SA} \quad (3.8)$$

$$x_{FS} \geq x_{FB} + d_F \quad (3.9)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j \in A) \quad (3.10)$$

2.2 節に示した条件の①は (3.5) 式に、②は (3.8) 式に、④は (3.9) 式に示されている⁶。ただし、(3.9) 式には外国株式と外国債券の差も与えることができるように、 d_F を加えている。④の条件の場合、 $d_F = 0$ と設定すればよい。また、③の条件は表 2 の設定値では不要である。そのことを以下に示す。

③の条件は以下のように記述できる。

$$N\left(\frac{\bar{r}_w^c - \bar{r}_{DB}^c}{\sigma_{DB}}\right) \geq N\left(\frac{-\bar{r}_p^c}{\sigma_p}\right) \quad (3.12)$$

ここで、 $N(\cdot)$ は正規分布の累積分布関数であるが、単調増加関数なので、

$$\frac{\bar{r}_w^c - \bar{r}_{DB}^c}{\sigma_{DB}} \geq \frac{-\bar{r}_p^c}{\sigma_p} \quad (3.13)$$

である。したがって、以下の制約条件として記述できる。

$$\bar{r}_p^c \geq -\left(\frac{\bar{r}_w^c - \bar{r}_{DB}^c}{\sigma_{DB}}\right) \sigma_p \quad (3.14)$$

表 2 の設定値では $\bar{r}_w^c - \bar{r}_{DB}^c > 0$ のため、(3.14) 式の右辺は負である。 $\bar{r}_R = 1.7\%$ であるので、①の制約条件 ((3.5) 式) の方がきついため、(3.14) 式は不要である。

⁶(3.5) 式に対する双対解を λ^{c*} とする。(3.5) 式を除いて、目的関数を

$$\sum_{c \in C} CSF^c - \sum_{c \in C} \lambda^{c*} \bar{r}_p^c \quad (3.11)$$

としても同じ最適解を得ることができる。

3.2. 結果

いくつかの最適化問題を解くことにする。数値分析に用いた計算機は、Lenovo ThinkPad T530(Windows 7, 2.8GHz, 4GB), 数理計画ソフトウェアは(株)NTT データ数理システム社の数理計画法パッケージ Numerical Optimizer Ver.16.1 である。計算時間はすべて0.1秒以下である。GPIF が要求している制約は $d_F = 0$ であるが、暗黙のうちに外国株式は外国債券よりも大きくなる制約を置いていると考えられる。そこで、 $d_F = 0\%$ を含めて $d_F = 0.98\%, 1.96\% \dots, 4.9\%$ の6種類(4資産で100%となる場合に1%刻み)について最適解を求めると、表9が得られる。

表 9: 最適ポートフォリオ

制約 FS-FB	基本ポートフォリオ				短期 資産	期待リターン		標準 偏差	条件付平均不足率		
	国内 債券	国内 株式	外国 債券	外国 株式		経済 中位	市場 基準		経済 中位	市場 基準	合計
0%	30.54%	29.19%	19.13%	19.13%	2.00%	4.500	4.005	12.244	9.1768	9.1087	18.2855
1%	31.01%	29.00%	18.50%	19.48%	2.00%	4.500	4.004	12.256	9.1861	9.1182	18.3043
2%	31.48%	28.82%	17.87%	19.83%	2.00%	4.500	4.003	12.268	9.1956	9.1280	18.3236
3%	31.95%	28.63%	17.24%	20.18%	2.00%	4.500	4.002	12.280	9.2053	9.1380	18.3433
4%	32.41%	28.45%	16.61%	20.53%	2.00%	4.500	4.002	12.293	9.2153	9.1482	18.3635
5%	32.88%	28.26%	15.98%	20.88%	2.00%	4.500	4.001	12.305	9.2256	9.1587	18.3843

GPIF は短期資産を除く4資産で100%となるように基本ポートフォリオを設定している。しかし、最適化モデルでは短期資産を含んで最適解を求め、各種統計量も計算しているので、誤解を避けるために基本ポートフォリオの合計は98%(短期資産は2%)となる最適解をそのまま掲載している。短期資産を除く4資産の基本ポートフォリオで100%となるようにしたい場合、各比率を0.98で割った値が投資比率となる。

条件付平均不足率を見て分かるように、GPIF が推奨する基本ポートフォリオ(表4)よりもよい解が得られている。しかし、1%刻みで求めた表8と比べると、 $FS - FB = 0\%$ と3%の解が悪くなっている。これは何故であろうか。よく調べてみると、表8における経済中位ケースの期待リターンがそれぞれ4.49668%、4.49766%と、4.5%を下回っている⁷。そこで、表8と同じ条件で比較するために、経済中位ケースの期待リターンの制約値として4.5%の代わりに表8のポートフォリオに対する期待リターンを用いて最適解を求めると表10が得られた。

表 10: 最適ポートフォリオ

制約 FS-FB	基本ポートフォリオ				短期 資産	期待リターン		標準 偏差	条件付平均不足率		
	国内 債券	国内 株式	外国 債券	外国 株式		経済 中位	市場 基準		経済 中位	市場 基準	合計
0%	30.66%	29.15%	19.10%	19.10%	2.00%	4.497	4.001	12.224	9.1616	9.0936	18.2553
1%	30.99%	29.01%	18.51%	19.49%	2.00%	4.501	4.005	12.259	9.1888	9.1210	18.3097
2%	31.56%	28.79%	17.84%	19.80%	2.00%	4.498	4.001	12.253	9.1849	9.1174	18.3023
3%	32.03%	28.60%	17.21%	20.15%	2.00%	4.498	4.000	12.266	9.1947	9.1274	18.3220
4%	32.36%	28.47%	16.63%	20.55%	2.00%	4.502	4.003	12.302	9.2225	9.1554	18.3779
5%	32.69%	28.33%	16.04%	20.94%	2.00%	4.506	4.007	12.339	9.2506	9.1836	18.4342

⁷2節で示したように、GPIF が推奨している基本ポートフォリオが制約条件を満たすために、パーセント表示で小数点第3位を四捨五入して制約条件を満たすかどうかを判定している。

すべてのケースで表8よりもよい解が得られたことが分かる。ただし、最終的に得たい基本ポートフォリオは分かりやすさの点から考えると、1%刻みである必要があるかもしれない。そこで、GPIFの方法と同様に、最適解から±2%の範囲で1%刻みのポートフォリオについて、 $d_F = 0.98\%$ と $d_F = 4.9\%$ に対する1%刻みの基本ポートフォリオ(4資産)で条件付平均不足率が小さい5種類のポートフォリオをそれぞれ表11, 表12に示す。

表 11: 外国資産の差1%に対する最適解の1%刻みのポートフォリオ

制約 FS-FB>=1%	No	基本ポートフォリオ				期待リターン		標準 偏差	条件付平均不足率		
		国内 債券	国内 株式	外国 債券	外国 株式	経済 中位	市場 基準		経済 中位	市場 基準	合計
最適解 ±2% (1%刻み)	1	31%	29%	20%	20%	4.497	4.007	12.227	9.1645	9.0947	18.2592
	2	32%	32%	18%	18%	4.501	3.989	12.253	9.1835	9.1208	18.3043
	3	33%	30%	17%	20%	4.498	3.994	12.265	9.1940	9.1288	18.3228
	4	31%	28%	20%	21%	4.501	4.016	12.270	9.1975	9.1257	18.3232
	5	32%	31%	18%	19%	4.505	3.999	12.284	9.2069	9.1423	18.3493

表 12: 外国資産の差5%に対する最適解の1%刻みのポートフォリオ

制約 FS-FB>=5%	No	基本ポートフォリオ				期待リターン		標準 偏差	条件付平均不足率		
		国内 債券	国内 株式	外国 債券	外国 株式	経済 中位	市場 基準		経済 中位	市場 基準	合計
最適解 ±2% (1%刻み)	1	33%	30%	17%	20%	4.498	3.994	12.265	9.1940	9.1288	18.3228
	2	32%	31%	18%	19%	4.505	3.999	12.284	9.2069	9.1423	18.3493
	3	33%	29%	17%	21%	4.502	4.004	12.303	9.2227	9.1555	18.3782
	4	32%	30%	18%	20%	4.508	4.009	12.319	9.2334	9.1668	18.4002
	5	35%	31%	14%	20%	4.499	3.981	12.316	9.2348	9.1740	18.4088

表11のNo.1ポートフォリオは表7の1%刻みのNo.1ポートフォリオであり、1%刻みの全組み合わせ(176,851通り)について調べなくても最適化モデルの近似解としても求められることが分かる。一方、表12はGPIFが推奨する基本ポートフォリオのように外国資産の差を5%とした場合の結果である。差は3%のポートフォリオが選ばれたが、表11のNo.3ポートフォリオがNo.1ポートフォリオになっている。

4. おわりに

本稿では、各資産の収益率と賃金上昇率が正規分布と仮定して、公的年金積立金運用が再変更した基本ポートフォリオの構築方法について検討した。5%刻みのポートフォリオとしては、GPIFが選定したポートフォリオが最適となるが、1%刻みでは異なるポートフォリオが選定されることを明らかにした。ただし、GPIFでは経験分布を用いた条件付平均不足率も選定基準として用いられており、本稿ではその点を考慮できていないため、結果の解釈には注意が必要である。また、公表資料[4]には乖離許容幅の導出方法について何も記述されていない。Hibiki and Yamamoto[1]を参考にして導出方法を検討したい。

参考文献

- [1] N. Hibiki and R. Yamamoto, Optimal Symmetric No-trade Ranges in Asset Rebalancing Strategy with Transaction Costs, -An application to the Government Pension Invest-

ment Fund in Japan-, *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, Vol.8, No.2(July 2014), pp.293-327.

- [2] 厚生労働省, 国民年金及び厚生年金に係る財政の現況及び見通し ー平成 26 年財政検証結果一, 平成 26 年 6 月 3 日. http://www.mhlw.go.jp/topics/bukyoku/nenkin/nenkin/zaisei-kensyo/dl/h26_kensyo.pdf
- [3] 年金積立金管理運用独立行政法人, 中期計画の変更について, 2013 年 6 月 7 日 http://www.gpif.go.jp/topics/2013/pdf/midterm_plan_02_henko.pdf
- [4] 年金積立金管理運用独立行政法人, 中期計画の変更について, 2014 年 10 月 31 日 http://www.gpif.go.jp/topics/2014/pdf/1031_midterm_plan_henkou.pdf

付録

A. 収益率の条件付平均不足率 CSF と標準偏差の関係

収益率 r が平均 \bar{r} 、標準偏差 σ の正規分布に従うならば、収益率が目標 r_G を下回る条件付平均不足率 CSF と標準偏差 σ は以下の関係で表すことができる。

$$CSF(r) = \frac{1}{N(G)} E[|r - r_G|^-] = r_G - \bar{r} + \left(\frac{h(G)}{N(G)} \right) \sigma$$

ただし、 $|a|^- = \max(-a, 0)$ 、 $G = \frac{r_G - \bar{r}}{\sigma}$ とする。 $N(x)$ は x の累積分布関数、 $h(x)$ は x は確率密度関数である。

(導出) 収益率 r が期待値 \bar{r} 、標準偏差 σ の正規分布に従うとき、確率密度関数は以下のよう表すことができる。

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-\bar{r})^2}{2\sigma^2}}$$

$u = \frac{r - \bar{r}}{\sigma}$ とすると、 u は以下に示す標準正規分布に従う。

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

目標を下回る平均不足率 $E[(r - r_G)^-]$ は以下のように展開される。

$$\begin{aligned} E[(r - r_G)^-] &= \int_{-\infty}^{r_G} (r_G - r) f(r) dr \\ &= \int_{-\infty}^G (r_G - \bar{r} - \sigma u) h(u) du = (r_G - \bar{r}) \int_{-\infty}^G h(u) du - \sigma \int_{-\infty}^G u h(u) du \\ &= (r_G - \bar{r}) N(G) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^G u e^{-\frac{u^2}{2}} du = (r_G - \bar{r}) N(G) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{-\infty}^G \\ &= (r_G - \bar{r}) N(G) + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{G^2}{2}} \right) \sigma \\ &= (r_G - \bar{r}) N(G) + h(G) \sigma \end{aligned}$$

ただし、 $N(G) = \int_{-\infty}^G f(u) du$ である。