126 ルール：連続複利・連続積立投資版

枇々木 規雄
慶應義塾大学 理工学部

2022 年 11 月 20 日

1. はじめに

枇々木 [1] は、一括投資に対する 72 ルールに対応する積立投資に対するルールとして、「126 ルール」を提案している[1]。これは、積立投資を行うという前提のもとで、元本の 2 倍になるには「年数 $\times$ 利率 $= 126$」(利率はパーセント表示) が成り立つというルールである。ただし、「年数 $\times$ 利率」がほぼ一定になることを数値的に発見し、ルール数を近似的に求めている。本稿では、このルールに対する理論的な補強をするために、連続複利のもとで、連続的に積立投資を行うことを想定すると、「年数 $\times$ 利率」(ルール数) が一定値になることを示す。また、一括投資における複利部分と単利部分の比を与えるルールとしての意味づけも与える。

2. 連続複利・連続積立投資の場合のルール数の導出

年数を n、利率 (年率) を r とする。一括投資を連続複利のもとで計算する場合、倍率を y とすると、以下のようにルール数 a は計算できる[2]。ルール数は利率をパーセント表示で記述するために、利率を 100 倍している。

$$y = e^{nr} \tag{2.1}$$

$$a = 100nr = 100\ln(y) \tag{2.2}$$

したがって、一括投資で元本が 2 倍になる場合のルールは、$y = 2$ を代入すると、$\ln(2) = 0.693$ より、69 ルールになる。72 ルールは離散複利で考えて、n 年後の金額が元本に対してちょうど 2 倍になるルールで、$(1+r)^2 = (1+0.72/n)^n = 2$ とすると、$n = 9.1756$ $(r = 0.0785)$ のときに、この関係式が成り立つ。

次に、積立投資の場合を考えてみよう。枇々木 [1] の (3.1) 式を参考にして、積立投資を年 m 回行い、連続複利のもとで計算すると、以下のように計算できる。ここで、満期額は S、毎期の投資額は M とする。

$$\begin{aligned}
S &= \underbrace{e^{rn}M}_{0\text{ 時点の } M \text{ の満期価値}} + \underbrace{e^{r(n-1/m)}M}_{1\text{ 時点の } M \text{ の満期価値}} + \cdots \underbrace{e^{r(2/m)}M}_{mn-2\text{ 時点の } M \text{ の満期価値}} + \underbrace{e^{(r/m)}M}_{mn-1\text{ 時点の } M \text{ の満期価値}} \\
&= \left\{\sum_{t=1}^{mn} e^{(r/m)t}\right\} M
\end{aligned} \tag{2.3}$$

したがって、$y = \frac{S}{Mmn}$ とすると、

$$y = \frac{1}{mn}\sum_{t=1}^{mn} e^{(r/m)t} \tag{2.4}$$

---

[1] 72 の法則、126 の法則とも呼ばれている。

[2] 枇々木 [1] では、満期額 (積立元本 + 運用益) に占める積立元本の「割合」(倍率の逆数) を用いて議論していたが、本稿では倍率を使うことにする。

となる。ここで、離散的に積立投資をするのではなく、連続的に積立投資をすると考え、合計する代わりに、積分を行う。そうすると、

$$y = \frac{1}{mn}\int_0^{mn} e^{(r/m)t}dt = \frac{1}{mn}\cdot\frac{1}{r/m}\left[e^{(r/m)t}\right]_0^{mn} = \frac{1}{nr}\left(e^{nr}-1\right) = \frac{1}{a'}\left(e^{a'}-1\right) \tag{2.5}$$

となる[3] 。ここで、$a' = nr = \frac{a}{100}$ である。したがって、「年数 × 利率」(ルール数) は一定値になる。

具体的に、$y = 1.5, 2, 3$ の場合について、ルール数 (a) を求めると、表 1 のようになる[4]。

表 1: ルール数

倍率	$y = 1.5$	$y = 2$	$y = 3$
連続積立投資・連続複利	76.27	125.64	190.38
枇々木 [1]($n = 40$, $m = 12$) ［離散積立投資・離散複利］	76.19 (76 ルール)	125.59 (126 ルール)	190.45 (190 ルール)

連続複利・連続積立投資の場合のルール数も整数にするというもとでは、同じルールになることが分かる。

3.　一括投資との関係

利率 r のもとで n 年間、一括投資をしたと想定すると、(2.6) 式の分母は単利における金利部分、分子は連続複利での金利部分である。したがって、一括投資においても連続複利であれば、複利部分と単利部分の比を与えるルールとしての意味づけも与えることができる。年あたりの期間数を m とすると、離散複利で一括投資すると、$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}$ になる。ここで、離散複利の場合の倍率を確認してみよう。

表 2: 一括投資における「複利での金利部分/単利での金利部分」(倍率)

倍率 $(m \to \infty)$	$y = 1.5$	$y = 2$	$y = 3$
	76 ルール	126 ルール	190 ルール
$m = 1$, $n = 20$	1.458　$(r = 3.80\%)$	1.900　$(r = 6.30\%)$	2.706　$(r = 9.50\%)$
$m = 1$, $n = 40$	1.478　$(r = 1.90\%)$	1.950　$(r = 3.15\%)$	2.842　$(r = 4.75\%)$
$m = 12$, $n = 20$	1.494　$(r = 3.80\%)$	1.995　$(r = 6.30\%)$	2.966　$(r = 9.50\%)$
$m = 12$, $n = 40$	1.496　$(r = 1.90\%)$	2.000　$(r = 3.15\%)$	2.979　$(r = 4.75\%)$

$m = 12$(月次複利) の場合には、ほぼ一致するが、$m = 1$(年複利) の場合には連続複利と差が大きくなり、誤差が生じるので注意が必要である。

[3] わかりやすさを考えて 2 段階で求めたが、離散複利の間隔 $(1/m)$ と年当たりの積立回数 (m) は逆数の関係にあるので、m を無限大 (連続複利・連続積立投資) にすることによって、枇々木 [1] の (3.1) 式からも直接、求めることもできる。

$$y = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{a'}\left\{\left(1+\frac{a'}{mn}\right)^{mn}-1\right\}\left(1+\frac{a'}{mn}\right) = \frac{1}{a'}\left(e^{a'}-1\right) \tag{2.6}$$

[4] Excel の What-if 分析 (「データ」タブ) のゴールシークを使うと、簡単に求めることができる。

4.　まとめ

本稿では、連続複利・連続積立投資の場合、ルール数が年数と利率の組み合わせに関係なく決まることを示し、126 ルールに対する理論を補強することができた。また、通常想定される、離散的な積立投資で離散複利のルール数とほぼ近い値になることを示した。さらに、連続複利のもとでは、一括投資における複利部分と単利部分の比 (複利での金利部分/単利での金利部分) も表すルールにもなっている。離散複利においてもほぼ近い倍率を表しており、一括投資においても意味づけることができた。積立投資を身近な存在にするためにも、このルール (法則) をぜひ、多くの FP の方々に活用していただきたい。

参考文献

[1] 枇々木 規雄 (2021), 126 ルール：積立投資の複利効果を概算する簡単な計算ルール, 日本 FP 学会ニュースレター、Vol.4, No.2.
https://www.jasfp.jp/newsletter04-2_0001.pdf

[2] D. Luenberger (2014), Investment Science, 2nd Edition, Oxford University Press.
（今野浩，鈴木賢一，枇々木規雄 訳 (2015),『金融工学入門 第 2 版』，日本経済新聞出版社.）