125 ルール: 「積立投資版」の新ルール

枇々木 規雄
慶應義塾大学 理工学部

2016 年 12 月 12 日

1. はじめに

元本の 2 倍になる期間数と利率の組み合わせを簡単に求めるルールとして、72 ルールがよく知られている [1]。これは「期間数 $\times$ 利率 $= 72$」(利率はパーセント表示) が成り立つというルールである。例えば、利率が 3%であれば、おおよそ 2 倍になる期間数は 24 である。

$$1.03^{24} = 2.033$$

一般的に書くならば、

$$\left(1 + \frac{72}{100n}\right)^n = 2 \tag{1.1}$$

となり、1 期間を 1 年として、(1.1) 式の左辺を図に書くと、図 1 となる。

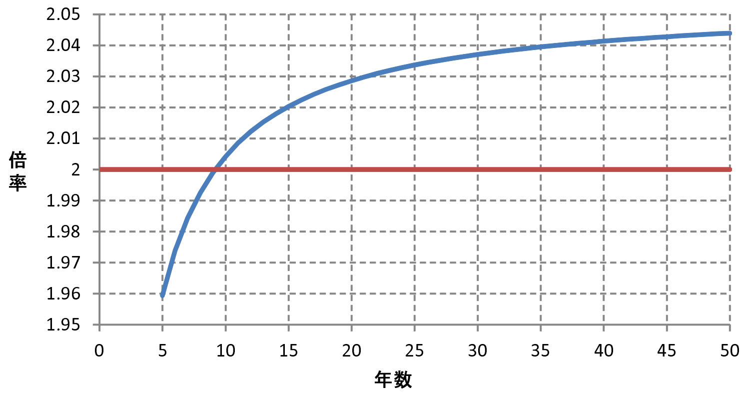

図 1: 72 ルール

次に、72 ルールを導出してみよう。期間数を n、1 期間の利率を r、倍率を x とすると、

$$(1 + r)^n = x \tag{1.2}$$

と記述できる。したがって、

$$n = \frac{\ln x}{\ln(1 + r)} \approx \frac{\ln x}{r - \frac{r^2}{2}} \tag{1.3}$$

$$nr = \frac{\ln x}{1 - \frac{r}{2}} \tag{1.4}$$

を得る。$x = 2$ とすると、$\ln(2) = 0.693$ を (1.4) 式の右辺に分子に代入できるが、分母には r が含まれているので、nr は定数にならない。しかし、ここで、右辺に $r = 0.075$ を代入すると左辺は $nr = 0.72$ となり、72 ルールが得られる。

72 ルールはとてもわかりやすいルールとして知られているが、一括して投資できる元本に対するルールである。一方、著者の知る限りであるが、積立投資に対するこのようなルールは存在しない。そこで本稿では、満期に得られる金額に対して積み立てた元本の割合に関するルールを導出する。

2. 「積立投資版」の新ルール

利率 r で期初に M を n 期間投資して満期に S が得られる場合を考える。キャッシュフロー図 2 のように描くことができる。

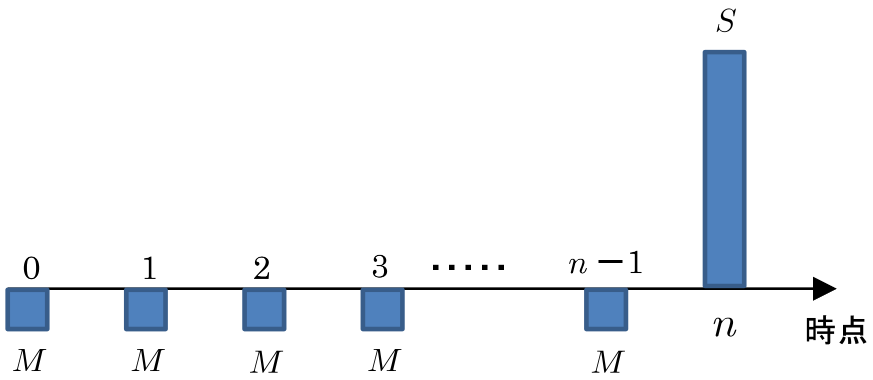

図 2: 積立投資のキャッシュ・フロー

満期額 S は毎期の投資額 M と (2.1) 式のように関係づけることができる。

$$S = M\left\{\sum_{t=1}^{n}(1+r)^t\right\} = \left[\frac{\{(1+r)^n - 1\}(1+r)}{r}\right]M \tag{2.1}$$

したがって、満期に得られる金額に対して積み立てた元本の割合は

$$\frac{Mn}{S} = \frac{n}{\sum_{t=0}^{n}(1+r)^t} = \frac{nr}{\{(1+r)^n - 1\}(1+r)} \tag{2.2}$$

と得られる。$a = 100nr$ とすると、(2.2) 式は

$$\frac{Mn}{S} = \frac{\frac{a}{100}}{\left\{\left(1+\frac{a}{100n}\right)^n - 1\right\}\left(1+\frac{a}{100n}\right)} \tag{2.3}$$

のように書き直すことができる。5 種類の a に対する n と $\frac{Mn}{S}$ の関係を図 3 に示す。

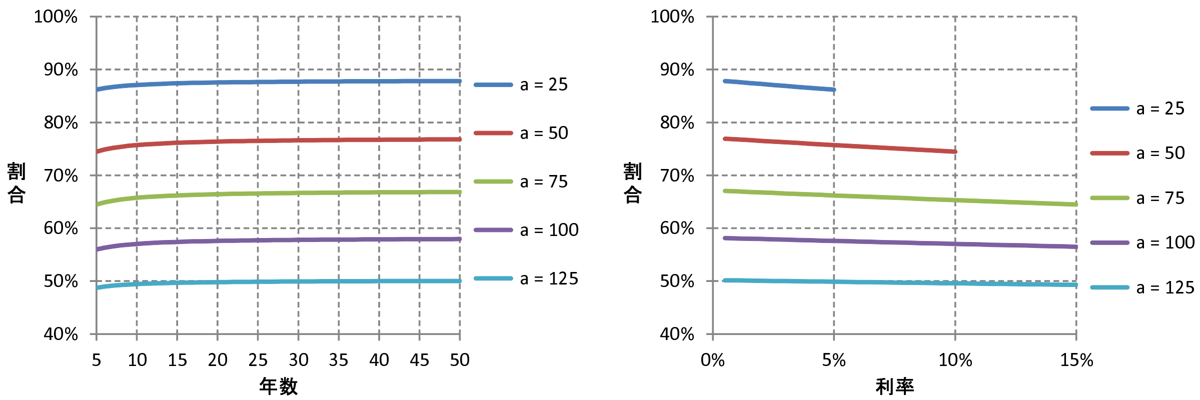

図 3: 一定の「年数 × 利率」に対する年数・利率と割合の関係 (1 期間 =1 年)

図 3 の左図を見ると、$\frac{Mn}{S}$ の値は一定の a の値に対して、いかなる年数と利率の組み合わせに対してもほぼ一定であるが、短い年数に対しては相対的に変化しやすいことが分かる。ただし、a が大きくなるにつれて、その感度は相対的に小さくなる。一方、右図は 5 年以上の投資期間のもとで横軸を利率としたときの割合の変化を示している。年数よりも利率の方が割合に対する感度は高いが、

それでもほぼ一定であることが分かる。これは、72 ルールと同じように、積立投資の場合にもルールを求めることができることを表している。

満期に得られる金額に対する積み立てた元本の割合を z としよう。元本に対する運用益の比率を $1/\alpha$ とするならば、

$$z = \frac{1}{1+1/\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

である。例えば、運用益が元本の半分 $(\alpha = 2)$ ならば、$z = 2/3 = 0.667$ となる。

次に、z から a の値を求める方法を考えよう。n を所与として、

$$f(a;n) \equiv \frac{\frac{a}{100}}{\left\{\left(1+\frac{a}{100n}\right)^n - 1\right\}\left(1+\frac{a}{100n}\right)} = z \tag{2.4}$$

とすると、

$$a^*(z;n) = f^{-1}(z;n) \tag{2.5}$$

と求めることができる。いくつかの n, z に対する $a^*(z;n)$ の値は表 1 のように求められる。

表 1: n, z に対する a^* の値

α	z	$n=10$	$n=15$	$n=20$	$n=25$	$n=30$
1	0.500	123.04	123.92	124.36	124.62	124.79
2	0.667	72.57	73.77	74.38	74.75	75.00
3	0.750	51.70	52.76	53.31	53.64	53.87
4	0.800	40.20	41.40	41.59	41.88	42.08

表 1 を見ると、様々な n に対する a を計算することによって、z に対する a の範囲をある程度、決められることが分かる。ルールを決めるためには a の値は整数である必要があるので、z ごとに 3 種類の a に対する割合の違いを見てみよう。左図の横軸には年数、右図の横軸には利率を用いて、割合を描き、その関係を示す。

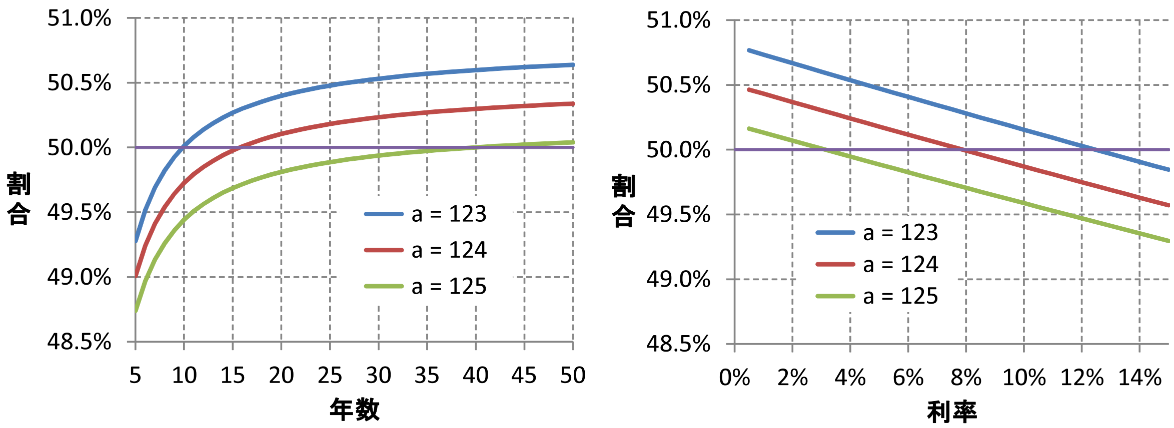

図 4: 3 種類の a に対する割合の違い $(z = 0.5)$

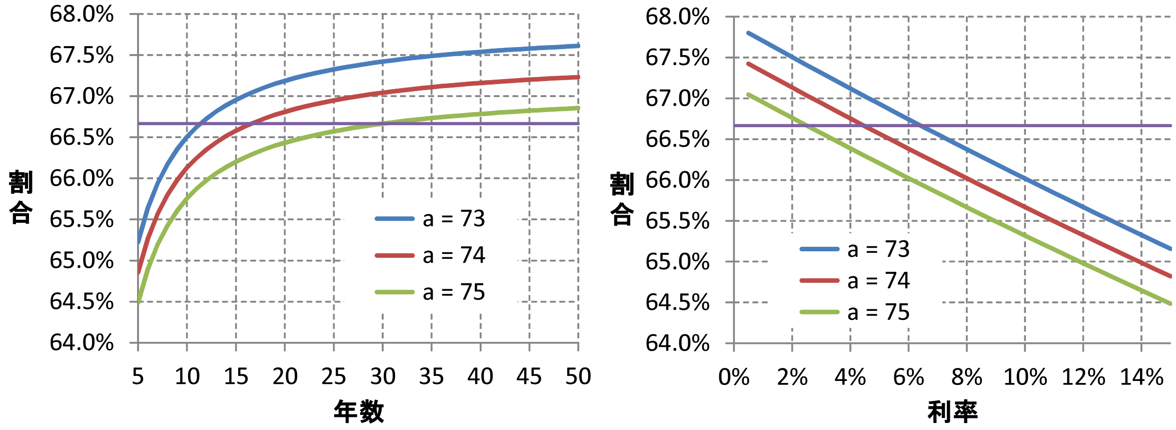

図 5: 3 種類の a に対する割合の違い ($z = 0.667$)

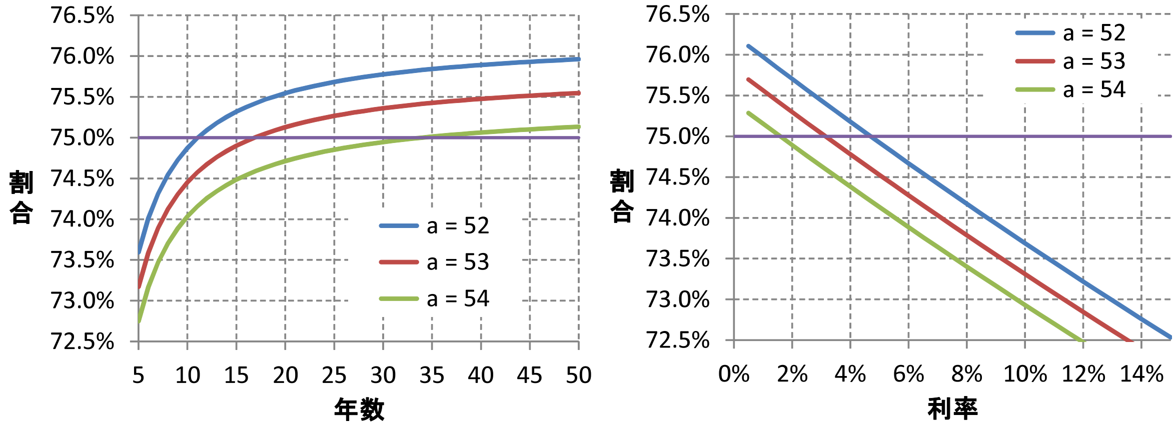

図 6: 3 種類の a に対する割合の違い ($z = 0.75$)

図 4〜7 を見ると、期間や利率に対する z との誤差をどのように見るかによって、どの a の値を選択すべきか変わってくる。そこで、積立投資期間の最小期間 n_1 を 5, 10 年、最大期間 n_2 を 40, 50 年と考えて、各期間ごとに割合の z に対する平均二乗誤差を計算する。同様に、利率の最大値を 5%, 10%, 15%と考えたときの平均二乗誤差も計算する。また、割合が $z(\frac{Mn}{S} = z)$ となる期間数 n^* と利率 r^* の値も求め、まとめて表 2 に示す。

誤差、n^*、r^* の値によって、a を選択することにしよう。誤差はできる小さい a の値を選択したいが、期間の 4 ケース、利率の 3 ケースに対してすべて誤差が小さい a の値は存在しない。そこで、できるだけ多くのケースで誤差が小さいケースを選択することにしよう。また、n^* の値が対象範囲の端にあると、多くの年数に対しても割合が大きい、もしくは小さくなりやすいなどのバイアスが掛かりやすい。r^* の値についても同様である。これらの点を考慮し、本稿ではそれぞれの z(もしくは α) に対して、表 3 のようなルールを設定する。

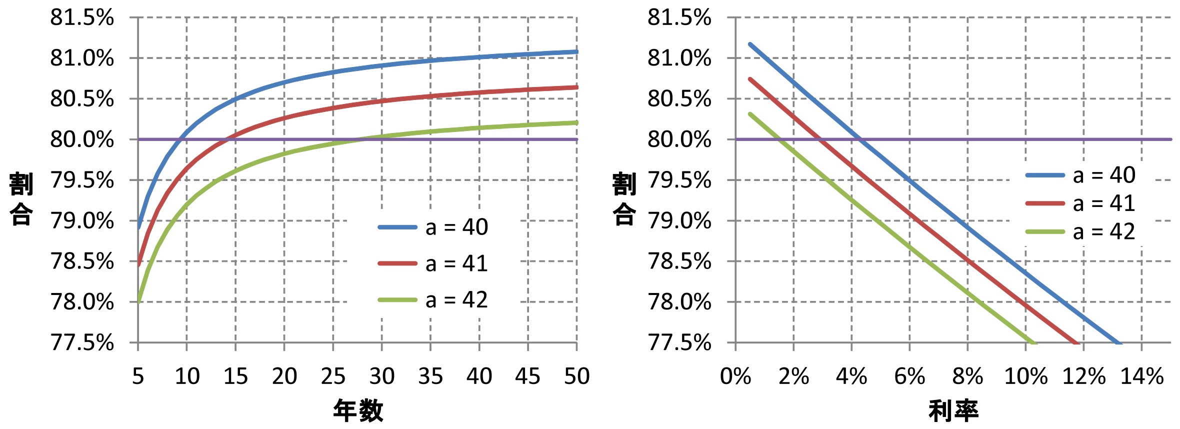

図 7: 3 種類の a に対する割合の違い ($z = 0.8$)

表 2: 誤差評価

期間	$z = 0.5$			$z = 0.667$			$z = 0.75$			$z = 0.8$		
n_1 n_2	$a = 123$	$a = 124$	$a = 125$	$a = 73$	$a = 74$	$a = 75$	$a = 52$	$a = 53$	$a = 54$	$a = 40$	$a = 41$	$a = 42$
5 50	3.34%	<u>2.13%</u>	2.43%	4.98%	<u>3.76%</u>	4.06%	5.06%	<u>3.72%</u>	4.24%	5.65%	3.71%	<u>3.66%</u>
5 40	2.70%	<u>1.88%</u>	2.43%	4.06%	<u>3.35%</u>	4.03%	4.11%	<u>3.34%</u>	4.23%	4.57%	<u>3.16%</u>	3.62%
10 50	3.20%	1.52%	<u>1.24%</u>	4.56%	2.54%	<u>1.94%</u>	4.68%	2.45%	<u>2.07%</u>	5.48%	2.93%	<u>1.71%</u>
10 40	2.53%	<u>1.13%</u>	1.24%	3.53%	1.88%	<u>1.87%</u>	3.63%	<u>1.83%</u>	2.05%	4.36%	2.19%	<u>1.61%</u>
利率	$a = 123$	$a = 124$	$a = 125$	$a = 73$	$a = 74$	$a = 75$	$a = 52$	$a = 53$	$a = 54$	$a = 40$	$a = 41$	$a = 42$
〜5%	1.98%	1.06%	<u>0.29%</u>	2.37%	1.34%	<u>0.86%</u>	2.01%	<u>1.23%</u>	1.49%	2.04%	<u>1.39%</u>	1.80%
〜10%	2.21%	1.09%	<u>0.96%</u>	2.62%	<u>2.46%</u>	3.24%	<u>3.33%</u>	3.99%	5.19%	<u>4.01%</u>	4.85%	6.15%
〜15%	2.23%	<u>1.46%</u>	2.07%	<u>4.49%</u>	5.31%	6.62%	<u>7.09%</u>	8.42%	10.02%	<u>8.64%</u>	10.11%	11.81%
n^*(年)	9.85	15.72	39.80	11.38	16.60	30.03	11.07	16.85	33.98	9.32	14.13	27.82
r^*	12.49%	7.89%	3.14%	6.41%	4.46%	2.50%	4.70%	3.15%	1.59%	4.29%	2.90%	1.51%

※ 下線は最小誤差を表す。

ルールを決定した理由は以下の通りである [1]。

(1) $z = 0.5$: 125 ルール

候補としては $a = 124$ か $a = 125$ のどちらである。投資期間における誤差を考えると $a = 124$ の方がよいが、現在のような低利率であれば、$a = 125$ の方がよい。本稿では後者を重視し、125 ルールを採用する。

(2) $z = 0.667$: 75 ルール

候補としては $a = 74$ か $a = 75$ のどちらである。$z = 0.5$ と同様の理由で、本稿では 75 ルールを採用する。

(3) $z = 0.75$: 53 ルール

投資期間の面からは $a = 53$ か $a = 54$ のどちらが候補、利率の面からは $a = 52$ か $a = 53$ のどちらかが候補である。したがって、本稿では共通の候補である 53 ルールを採用する。

[1] ルールを決定する評価基準は「誤差」であるが、表 2 にも示したように投資対象期間の範囲や金利の範囲によって誤差は異なる。わかりやすさを考えずに、ルール数を整数にする必要がなければ、さらに何らかの基準で決定した方がよいかもしれない。しかし、精度よりもわかりやすさを優先して、ルール数を整数にするために、ある程度「誤差」で対象を 2〜3 個に限定し、投資期間と金利を基準にして、定性的な評価によって選定した。

(4) $z=0.8$: 41 ルール

投資期間の面からは $a=41$ か $a=42$ のどちらが候補、利率の面からは $a=40$ か $a=41$ のどちらかが候補である。したがって、本稿では共通の候補である 41 ルールを採用する。

表 3: 積立投資の新ルール

z	元本 (α)：運用益 (1)	nr ルール
0.500	1 : 1	125 ルール
0.667	2 : 1	75 ルール
0.750	3 : 1	53 ルール
0.800	4 : 1	41 ルール

3.　「積立投資版」ルール数の近似式

「積立投資版」のルール数を近似的に求める簡単な公式を (3.1) 式に示す [2]。

$$a^{**}(z) = 98\left(3-\sqrt{12z-3}\right) \tag{3.1}$$

ここで、z は満期に得られる金額に対して積み立てた元本の割合である。いくつかの z に対する近似値 $a^{**}(z)$ と $n=10$, $n=40$ に対する $a^{*}(z;n)$ の値 ((2.5) 式) を表 4 に示す。

表 4: 近似値 $a^{**}(z)$ と $a^{*}(z;n)$ の比較

α	z	$a^{**}(z)$	$a^{*}(z;10)$	$a^{*}(z;40)$
1	0.500	124.26	123.04	125.00
2	0.667	74.87	72.57	75.31
3	0.750	53.95	51.70	54.15
4	0.800	42.23	40.20	42.32

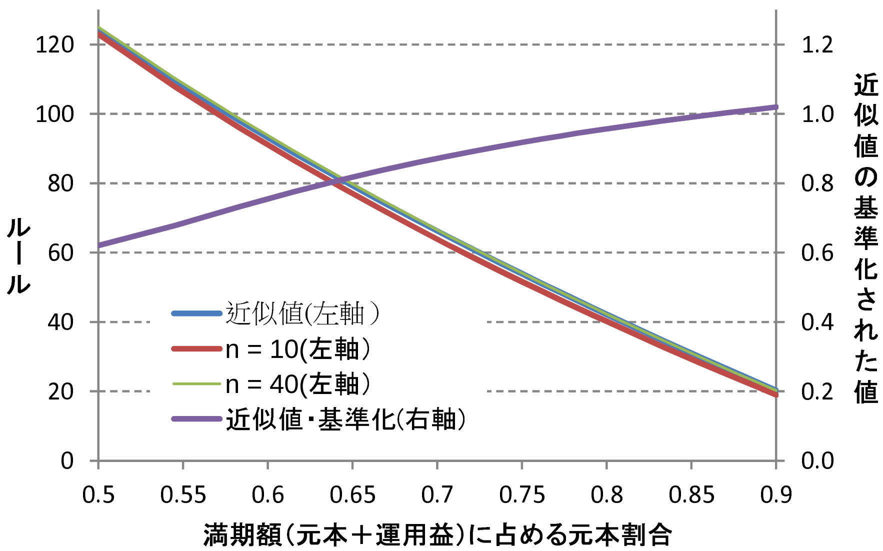

図 8: 近似値 $a^{**}(z)$

[2]導出は付録 A を参照されたい。

a^{**} は $a^*(z;10)$ と $a^*(z;40)$ の値に入っており、簡単な式ではあるが近似できていることが分かる。同様に様々な z に対する $a^{**}(z)$, $a^*(z;10)$, $a^*(z;40)$ の値を図 8 の左軸に、近似値を基準化した

$$\frac{a^{**}(z) - a^*(z;10)}{a^*(z;40) - a^*(z;10)}$$

の値を右軸に示す。基準化した値もほぼ 0 から 1 の間に入っており、同様の結果を確認することができる。

4. まとめ

本稿では、元本の増加倍率に対する「72 ルール」のようなルールの「積立投資」版を提案した。ある利率に対して、何年間積立期間が必要なのか？ということが簡単な計算で分かれば、積立投資はより身近な存在になるであろう。22 歳で大学を卒業し、すぐに積立を始め、65 歳で定年を迎えるならば、積立期間は 43 年間である。運用益が元本と等しくなる「125 ルール」を用いると $125/43 = 2.91(\%)$ で、運用益が元本の半分となる「75 ルールを用いると $75/43 = 1.74(\%)$ となる。「どのくらいお金に働いてもらうか (元本に対する運用益はどのくらいか)」によって、どのルールを用いるかは変わり、さらに積立期間によってどの程度リスクを取る必要があるか (運用利率を想定するか) がこのルールを使うと、簡単に分かる。

参考文献

[1] D. Luenberger, *Investment Science*, 2nd Edition, Oxford University Press, 2014. （今野浩，鈴木賢一，枇々木規雄 訳,『金融工学入門 第 2 版』，日本経済新聞出版社，2015.）

付録

A. 近似式の計算

(2.2) 式を金利 r でマクローリン展開し、近似式を計算してみよう。$x(r) = \sum_{t=1}^{n}(1+r)^t$、$y(r) = 1/x(r)$ とする。$y(r)$ を 3 次までマクローリン展開すると、(A.1) 式になる。

$$y(r) \approx y(0) + y'(0)r + \frac{1}{2}y''(0)r^2 + \frac{1}{6}y'''(0)r^3 \tag{A.1}$$

各係数を計算しよう。

$$\begin{aligned}
y' &= -x'x^{-2} \\
y'' &= -x''x^{-2} + 2(x')^2x^{-3} = \left\{-x''x + 2(x')^2\right\}x^{-3} \\
y''' &= \left\{-x'''x^2 + 6xx'x'' - 6(x')^3\right\}x^{-4} \\
x' &= \sum_{t=1}^{n} t(1+r)^{t-1} \\
x'' &= \sum_{t=2}^{n} t(t-1)(1+r)^{t-2} = \sum_{t=1}^{n-1} t(t+1)(1+r)^{t-1} \\
x''' &= \sum_{t=3}^{n} t(t-1)(t-2)(1+r)^{t-3} = \sum_{t=1}^{n-2} t(t+1)(t+2)(1+r)^{t-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x(0) &= n \\
x(0)' &= \sum_{t=1}^{n} t = \frac{n(n+1)}{2} \\
x(0)'' &= \sum_{t=1}^{n-1} t(t+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \\
x(0)''' &= \sum_{t=1}^{n-2} t(t+1)(t+2) = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4} \\
y(0) &= \frac{1}{n} \\
y(0)' &= \frac{n(n+1)}{2n^2} = -\frac{n+1}{2n} \\
y(0)'' &= -\frac{n(n-1)(n+1)}{3n^2} + \frac{n^2(n+1)^2}{2n^3} \\
&= \frac{(n+1)\left\{-2(n-1)+3(n+1)\right\}}{6n} = \frac{(n+1)(n+5)}{6n} \\
y(0)''' &= -\frac{n(n-2)(n-1)(n+1)}{4n^2} + \frac{n^2(n+1)^2(n-1)}{n^3} - \frac{6n^3(n+1)^3}{8n^4} \\
&= \frac{(n+1)\left\{-(n^2-3n+2)+4(n^2-1)-3(n^2+2n+1)\right\}}{4n} = -\frac{3(n+1)(n+3)}{4n}
\end{aligned}
$$

以上の係数を (A.1) 式に代入し、$\frac{Mn}{S} = ny(r)$ すると、(A.2) 式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{Mn}{S} &\approx 1 - \left(\frac{n+1}{2}\right) r + \left\{\frac{(n+1)(n+5)}{12}\right\} r^2 - \left\{\frac{(n+1)(n+3)}{8}\right\} r^3 \\
&= 1 - \frac{(n+1)r}{2} + \frac{\left\{(n+1)r\right\}^2}{12} + \frac{(n+1)r^2}{3} - \frac{(n+1)(n+3)r^3}{8} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3} + \frac{r^2}{4}\right)(n+1)r + \left(\frac{1}{12} - \frac{r}{8}\right)\left\{(n+1)r\right\}^2 \\
&= 1 - \left(\frac{6-4r+3r^2}{12}\right)(n+1)r + \left(\frac{2-3r}{24}\right)\left\{(n+1)r\right\}^2 \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

$\frac{Mn}{S} = z$ として、2 次方程式を解くと、

$$
\begin{aligned}
(n+1)r &= \frac{(6-4r+3r^2) - \sqrt{(6-4r+3r^2)^2 - 24(2-3r)(1-z)}}{2-3r} \qquad \text{(A.3)} \\
nr &= \frac{n}{n+1}\left\{\frac{(6-4r+3r^2) - \sqrt{(6-4r+3r^2)^2 - 24(2-3r)(1-z)}}{2-3r}\right\} \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

右辺は r, n の増加関数である。右辺の値がある値 z に近くなる右辺の n と r の組み合わせはいくつか考えられるが、簡便な式にするために、$n = 49$, $r = 0$ を代入すると、

$$
a = 100nr = 100 \times \frac{49}{50}\left(3 - \sqrt{9 - 12(1-z)}\right) = 98\left(3 - \sqrt{12z - 3}\right) \qquad \text{(A.5)}
$$

となる。この式を採用した理由には明確な基準があるわけではない。表 4 や図 8 の結果を見ながら、近似精度が高い結果が得られるように決定した [3]。

[3] ほぼ同じような結果が得られる他の r, n の組み合わせに対するいくつかの結果を以下に示す。

$$
\begin{aligned}
n = 34, r = 0.01 &: a = 100nr = \frac{680}{7}\left(3.026 - \sqrt{12.183 - 3.029z}\right) \\
n = 24, r = 0.02 &: a = 100nr = 96\left(3.052 - \sqrt{12.371 - 3.055z}\right)
\end{aligned}
$$

ただし、これらの式は小数点を含む式となるため、なるべく簡便に見える (A.8) 式を採用した。