

Generalized Recovery Theorem を用いた収益率分布の推定

– 観測データを用いた先験情報の設定 –

伊藤 雅剛[†]

霧生 拓也[‡]

枇々木 規雄[§]

概要

Ross(2015) は、オプション価格から投資家のリスク選好を決定し、forward looking な実分布を推定する定理として Recovery Theorem (RT) を導いた。近年、RT の推移状態価格に関する斉次マルコフ性の仮定を緩和した Generalized Recovery Theorem(GRT) が Jensen et al.(2016) によって示された。GRT を用いることで、状態価格に関する仮定に起因するバイアスを解消し、より柔軟に実分布を推定できることが期待される。伊藤・霧生・枇々木 (2017) は、GRT を用いた推定の過程で非適切問題が出現することを指摘し、実分布に関する先験情報を与えて解を安定化する推定方法を提案した。さらに、先験情報としてリスク中立分布を与えた場合において、仮想データを用いた数値実験を通して推定方法の特徴および有効性を検証した。伊藤・霧生・枇々木 (2017) は、観測データに内包される情報を用いて先験情報を設定する方法を示しているが、その有効性について検証はなされていない。そこで、本研究では観測データを用いた先験情報を設定した場合の有効性について仮想データを用いた数値実験を通して検証する。また、提案法を用いて 2007 年から 2016 年までの直近 10 年分の S&P500 オプションデータから実分布を推定し、分布の特徴と実現値に対する予測力に関して検証を行う。分析の結果から、推定された実分布は (1) ほぼ全ての期間において正の期待リスクプレミアムを持つこと、(2) リスク中立分布よりも予測力が高くなることを示す。

1 研究の背景と目的

オプション価格は市場参加者が想定する原資産価格の分布を反映して決定されるため、原資産の価格変動に関する市場参加者の予想が内包されていると考えられる。市場が完備であるという仮定の下では、オプション価格から原資産の収益率分布であるインプライド分布を復元することができる (Breed and Litzenberger[4])。しかし、インプライド分布はリスク中立確率測度における分布 (リスク中立分布) であり、実確率測度における分布 (実分布) とは一般には一致しない。したがって、インプライド分布を金融の諸問題へ応用する場合には、投資家のリスク選好を考慮してリスク中立分布を実分布へ調整 (リスク調整) する必要がある。Ross[7] は、時間分離可能な効用を持つ代表的投資家の存在を仮定することで、リスク中立分布から投資家のリスク選好を一意に決定して、実分布にリスク調整する定理として Recovery Theorem(以降、RT) を導いた。近年、RT の推移状態価格に関する斉次マルコフ性の仮定を緩和した Generalized Recovery Theorem(以降、GRT) が Jensen et al.[4] によって示された。GRT を用いることで、状態価格に関する仮定に起因するバイアスを解消し、より柔軟に実分布を推定できることが期待される。Jackwerth et al.[3] は 1996 年 1 月から 2014 年 8 月までの S&P500 オプション価格から GRT を用いて推定した実分布の予測力を統計的に評価したが、有効性は確認されなかった。伊藤・霧生・枇々木 [8] は、GRT を用いた推定の過程において非適切問題が出現することを指摘し、実分布に関する先験情報を与えて解を安定化する推定方法を提案し

[†] 慶應義塾大学大学院 理工学研究所 開放環境科学専攻, E-mail: masatakeitoh@gmail.com

[‡] 株式会社三菱 UFJ トラスト投資工学研究所 (MTEC), E-mail: kiriu@mtec-institute.co.jp, 本稿の内容は筆者が所属する組織を代表するものではなく、すべて個人的な見解である。

[§] 慶應義塾大学 理工学部 管理工学科, Email: hibiki@ae.keio.ac.jp

た。さらに、先験情報としてリスク中立分布を与えた場合において、仮想データを用いた数値実験によって提案法の特徴および有効性を検証した。伊藤・霧生・枇々木 [8] は、観測データに対応した先験情報を設定する方法を示しているが、その有効性について検証はなされていない。そこで、本研究では観測データを用いた先験情報を設定した場合の有効性について仮想データを用いた数値実験を通して検証する。また、提案法を用いて 2007 年から 2016 年までの直近 10 年分の S&P オプションデータから実分布を推定し、分布の特徴と実現値に対する予測力に関して検証を行う。

本稿の構成は以下の通りである。まず、2 節では Jensen et al.[4] の GRT について簡潔に示す。3 節では伊藤・霧生・枇々木 [8] の GRT を用いてオプション価格から実分布を推定する方法について述べる。4 節では仮想データを用いた実分布の推定精度に関する数値分析の方法と結果および考察を示す。5 節では実際の市場データに対して提案方法を適用することで実分布を推定し、その予測力に関して検証する。最後に、6 節では結論と今後の課題について述べる。

2 Generalized Recovery Theorem

本節では、Jensen et al.[4] の導出した GRT の概要を示す。市場は完備で裁定機会は存在しないものとし、時間分離可能な効用を持つ代表的投資家の存在を仮定する。市場の状態 $s (= 1, \dots, s_0, \dots, S)$ を原資産の現在の状態 s_0 からのリターン r_s によって定義し、状態 s_0 から時点 $i (= 1, \dots, T)$ の状態 s への推移に関する状態価格を $\pi_{i,s}$ 、リスク中立確率を $q_{i,s}$ 、実確率を $p_{i,s}$ とする。状態価格 $\pi_{i,s}$ はオプション価格から計算することができるため、既知とする。また、リスク中立確率 $q_{i,s}$ は状態価格 $\pi_{i,s}$ を用いて式 (1) のように計算できる。

$$q_{i,s} = \frac{\pi_{i,s}}{\sum_{k=1}^S \pi_{i,k}} \quad (i = 1, \dots, T; s = 1, \dots, S) \quad (1)$$

主観的割引係数を $\delta \in (0, 1]$ 、状態 s における限界効用を $h_s > 0$ ($h_{s_0} = 1$ に正規化) とする。この仮定の下で次の式が成り立つことを Jensen et al.[4] は示した。

$$\begin{bmatrix} \pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{T,1} & \cdots & \pi_{T,S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{-1} \\ \vdots \\ h_{s_0-1}^{-1} \\ 1 \\ h_{s_0+1}^{-1} \\ \vdots \\ h_S^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta^{\tau_1} \\ \vdots \\ \delta^{\tau_T} \end{bmatrix} \quad (2)$$

この式は各時点における状態価格と限界効用の逆数の積の和が主観的割引係数に一致するという関係式を表している。 S 個の未知変数に対して T 本の方程式があるので $S \leq T$ の場合にこの方程式を解くことができる。さらに、時点 i に対する主観的割引係数に関して $\delta^{\tau_i} \approx a_i + b_i \delta$ 、 $a_i = -(\tau_i - 1)\delta_0^{\tau_i}$ 、 $b_i = \tau_i \delta_0^{\tau_i - 1}$ のように Taylor 展開を用いて 1 次近似すると、

$$\begin{bmatrix} -b_1 & \pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,s_0-1} & \pi_{1,s_0+1} & \cdots & \pi_{1,S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_T & \pi_{T,1} & \cdots & \pi_{T,s_0-1} & \pi_{T,s_0+1} & \cdots & \pi_{T,S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ h_1^{-1} \\ \vdots \\ h_{s_0-1}^{-1} \\ h_{s_0+1}^{-1} \\ \vdots \\ h_S^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - \pi_{1,s_0} \\ \vdots \\ a_T - \pi_{T,s_0} \end{bmatrix} \quad (3)$$

が成り立つ。さらに、この式を行列 \mathbf{B} 、ベクトル $\mathbf{h}_\delta, \mathbf{a}_\pi$ を用いて置き換え、最適化問題 (式 (4)-(6)) を解くことで未知変数 $\delta, h_1^{-1}, \dots, h_{s_0-1}^{-1}, h_{s_0+1}^{-1}, \dots, h_S^{-1}$ を推定する。

$$\min_{\mathbf{h}_\delta} \quad \|\mathbf{B}\mathbf{h}_\delta - \mathbf{a}_\pi\|_2^2 \quad (4)$$

$$\text{subject to} \quad 0 < \delta \leq 1 \quad (5)$$

$$h_s^{-1} > 0 \quad (s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S) \quad (6)$$

実確率 $p_{i,s}$ は以下のように計算することができる。

$$p_{i,s} = \frac{1}{\delta^{\tau_i}} h_s^{-1} \pi_{i,s} \quad (i = 1, \dots, T; s = 1, \dots, S) \quad (7)$$

3 収益率分布の推定方法

3.1 状態価格の推定

状態価格行列 $\mathbf{\Pi}$ の推定には Breeden and Litzenberger[1] の導いたオプション価格と状態価格の関係式を使用する。満期 i と行使価格 k に関する状態価格関数 $\pi(i, k)$ はコールオプション価格関数 $c(i, k)$ を用いて以下のように表すことができる。

$$\pi(i, k) = \frac{\partial^2 c(i, k)}{\partial k^2} \quad (i = 1, \dots, T) \quad (8)$$

これは連続分布に対して得られた状態価格であるため、離散化して状態 s に対応する行使価格 k_s における状態価格 $\pi_{i,s}$ を数値積分を用いて計算する。

3.2 先験情報を利用した実分布の推定法

伊藤・霧生・枇々木 [8] は実分布に関する先験情報を設定することで、実分布を安定的に推定するための方法を提案した。 ζ_1, ζ_2 をフィッティングと解の安定性のトレードオフ関係をコントロールする正則化パラメータ、 $\bar{\delta}, \bar{h}_s^{-1} (s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S)$ をそれぞれ、主観的割引係数と限界効用に関する先験情報とする。伊藤・霧生・枇々木 [8] は、主観的割引係数と限界効用を基準化することによって正則化項を1つにまとめたモデルを用いていたが、本研究では以下の最適化問題として定式化する。以下では、この方法を「提案法」と表記する。

$$\min_{\mathbf{h}_\delta} \quad \|\mathbf{B}\mathbf{h}_\delta - \mathbf{a}_\pi\|_2^2 + \zeta_1 (\delta - \bar{\delta})^2 + \zeta_2 \sum_{s=1, s \neq s_0}^S (h_s^{-1} - \bar{h}_s^{-1})^2 \quad (9)$$

$$\text{subject to} \quad 0 < \delta \leq 1 \quad (10)$$

$$h_s^{-1} > 0 \quad (s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S) \quad (11)$$

式 (9) の第1項が元の問題の目的関数、第2項および第3項が推定値と先験情報の間のずれに関するペナルティ項であり、正則化項と呼ばれる。定式化上は実分布ではなく投資家のリスク選好に関して先験情報を設定するが、式 (7) の関係より、 $\bar{\delta}, \bar{h}_s^{-1} (s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S)$ を所与とした場合の実分布に関する先験情報 $\bar{p}_{i,s}$ は次のように計算できる。

$$\bar{p}_{i,s} = \frac{\pi_{i,s}}{\bar{\delta}^{\tau_i} \bar{h}_s} \quad (i = 1, \dots, T; s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S) \quad (12)$$

このことから、提案法は実分布に関する先験情報を与えて問題を解く方法とみなすことができる。Kiriu and Hibiki[5] は RT を用いた実分布推定の過程で出現する非適切問題に対して、元の目的関数値に先験情報を考慮して正則化項を加える方法を提案しているが、問題の構造上の制約から設定可能な先験情報はオプション価格から推定したリスク中立分布に限られていた。一方で、提案法では先験情報として与える分布は任意である。さらに、GRT は RT を状態価格の斉次マルコフ性の仮定に関して一般化した定理であることから、提案法は状態価格の斉次マルコフ性の仮定と先験情報の 2 つの観点から Kiriu and Hibiki[5] の RT を用いた実分布の推定方法を一般化した推定方法である。

3.3 先験情報

実分布に関する先験情報の設定方法は任意であり様々な設定方法が考えられるが、本研究では伊藤・霧生・枇々木 [8] で示された観測データに内包される情報を用いる設定方法について検証する。

(1) 主観的割引係数に関する先験情報の設定

主観的割引係数に関する先験情報の設定方法としてオプション価格から推定した状態価格にインプライドされている無リスク（客観的）割引係数を用いて設定する*1。状態価格の和は無リスク割引係数に一致すること、期近（期先）のオプションは取引量が多い（少ない）ことを考慮し、以下の最適化問題を解いて $\bar{\delta}$ を設定する*2。

$$\min_{\bar{\delta}} \sum_{i=1}^T e^{-\lambda\tau_i} \left(\bar{\delta}^{\tau_i} - \sum_{s=1}^S \pi_{\tau_i,s} \right)^2 \quad (13)$$

また、 δ^{τ_i} を 1 次近似する際の Taylor 展開の展開位置 δ_0 もこの方法で設定する。

(2) 限界効用に関する先験情報の設定

限界効用に関する先験情報は、相対的リスク回避度 γ_R の CRRA 型効用を持つ代表的投資家を想定して設定する。CRRA 型効用を想定する場合、限界効用の逆数を相対的リスク回避度 γ_R を用いて $h_s^{-1} = (1 + r_s)^{\gamma_R} (s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S)$ と表すことができることから、 $\delta = \bar{\delta}$ 、最適化問題 (式 (4)-(6)) に代入し、未知変数 γ_R を推定することで先験情報 \bar{h}_s^{-1} を設定する。この方法では投資家のリスク選好にパラメトリックな仮定を置いて大まかに推定したプライシング・カーネルを先験情報として設定することで、解を安定化してより精度の良い推定値を求めることを目指す。得られる解はノンパラメトリックであるため、観測データに内包されている投資家のリスク選好を柔軟に表現することが可能である。

3.4 推定手順

提案法の目的関数 (式 (9)) において、観測データへのフィッティング残差を表す第 1 項の $\|Bh_{\delta} - a_{\pi}\|_2^2$ を誤差項、正則化項から正則化パラメータを除いた部分 $(\delta - \bar{\delta})^2$ および $\sum_{s=1, s \neq s_0}^S (h_s^{-1} - \bar{h}_s^{-1})^2$ をそれぞれ正則化項 1、正則化項 2 と表現する。最適化問題 (式 (9)-(11)) を解く場合、式 (9) で与えるべき正則化パラメータが 2 つあるため、それらの適切な組み合わせを考えて問題を解く必要がある。紙面の都合上詳細は省略するが、仮想データを用いた数値分析の結果から (1) 正則化項 1 が推定精度に与える影響が比較的小さいこと、(2) 適切な ζ_2 の値を選択することが精度の高い推定値を得るために重要であることを確認した。したがって、まず初めに限界効用の値を安定化させる正則化パラメータ ζ_2 を選択した上で、目標計画法の枠組みで主

*1 投資家がリスク中立である場合、主観的割引係数と無リスク割引係数は一致する。一般には両者は一致しないが、近い値をとると想定して主観的割引係数の先験情報に無リスク割引係数を利用する。

*2 λ は期近のオプションデータをどの程度重視するかをコントロールするパラメータである。本研究では簡単のため $\lambda = 1$ とする。

観的割引係数を安定化させる定式化に基づいて解を求める。

Step1. 正則化パラメータ ζ_2 の決定

正則化項 1 が推定精度に与える影響は比較的小さいため、Step1 では $\zeta_1 = 0$ として正則化項 1 を一旦無視する。 ζ_2 は誤差項と正則化項の値がバランスよく小さくなるように設定する必要がある。本研究では Kiri and Hibiki[5] の選択基準関数 $h(\zeta_2)$ を最小にする ζ_2 を選択する方法を利用する。 $h(\zeta_2)$ は、誤差項の値を $y_{fit}(\zeta_2)$ 、正則化項 2 の値を $y_{reg}(\zeta_2)$ として*3次の式で表すことができる。

$$h(\zeta_2) = \frac{y_{fit}(\zeta_2) - y_{fit}(0)}{y_{fit}(\infty) - y_{fit}(0)} + \frac{y_{reg}(\zeta_2) - y_{reg}(\infty)}{y_{reg}(0) - y_{reg}(\infty)} \quad (14)$$

この選択基準関数は、誤差項の値 $y_{fit}(\zeta_2)$ と正則化項 2 の値 $y_{reg}(\zeta_2)$ の水準を揃えた上で、双方が小さくなるような ζ_2 を選択することを目的としている。そして、この方法によって選択された正則化パラメータを ζ_2^* 、このときの誤差項の値を $\bar{y}_{fit}(\zeta_2^*)$ 、正則化項 2 の値を $\bar{y}_{reg}(\zeta_2^*)$ とする。

Step2. GRT の解 h_δ の決定

Step1 で正則化パラメータ ζ_2^* を選択できているので、Step2 では Step1 における誤差項および正則化項 2 よりも値が大きくなる範囲内で主観的割引係数に関する正則化項 1 を最小化することによって、GRT の解 h_δ を推定する*4。

$$\min_{h_\delta} (\delta - \bar{\delta})^2 \quad (15)$$

$$\text{subject to } \|\mathbf{B}h_\delta - \mathbf{a}_\pi\|_2^2 \leq \bar{y}_{fit}(\zeta_2^*) \quad (16)$$

$$\sum_{s=1, s \neq s_0}^S (h_s^{-1} - \bar{h}_s^{-1})^2 \leq \bar{y}_{reg}(\zeta_2^*) \quad (17)$$

$$0 < \delta \leq 1 \quad (18)$$

$$h_s^{-1} > 0 \quad (s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S) \quad (19)$$

4 仮想データを用いた推定精度に関する分析

4.1 分析の概要

本節では、提案法の特徴および有効性を明らかにするために、仮想データとして与えた実確率行列 \mathbf{P}^H とノイズが含まれるデータから推定した実確率行列 \mathbf{P}^E を比較することで、推定精度について分析する。仮想データを用いた理由は、市場データを用いた場合、真の実分布が分からないため、推定精度の評価を行うことが困難であるからである。図 1 に分析の概要を示す。

仮想データを用いた分析の具体的な手順を以下に示す。

1. 仮想的な実確率行列 \mathbf{P}^H 、主観的割引係数 δ^H 、限界効用 h_s^H ($s = 1, \dots, S$) を与える。
2. $\mathbf{P}^H, \delta^H, h_s^H$ から式 (7) を用いて状態価格行列 $\mathbf{\Pi}^H$ を計算する。
3. 以下の式から $\mathbf{\Pi}^H$ にノイズを加えた状態価格行列 $\mathbf{\Pi}^N$ を生成する。

$$\pi_{i,s}^N = \pi_{i,s}^H (1 + \sigma e_{i,s}) \quad (i = 1, \dots, T; s = 1, \dots, S) \quad (20)$$

ここで σ はノイズの大きさを表すパラメータであり、 $e_{i,s}$ は標準正規分布に従うと仮定する。

*3 ζ_2 を大きくすると、 $y_{fit}(\zeta_2)$ は単調に増加し、 $y_{reg}(\zeta_2)$ は単調に減少する性質がある。

*4 実際問題に解くときには、数値計算上の誤差を考慮して式 (17)、式 (18) の右辺に微小数を追加して実行不可能になることを避ける工夫が必要になる。

4. Π^N に GRT(従来の方法あるいは提案法) を適用することで, 実確率行列の推定値 P^E , 主観的割引係数の推定値 δ^E , 限界効用の推定値 h_s^E ($s = 1, \dots, S$) を得る.
5. 真の実分布として仮想的に与えた実確率行列 P^H と推定された実確率行列 P^E の差異を計測することで, 推定精度を評価する. 具体的な評価指標については 4.3 節で述べる.

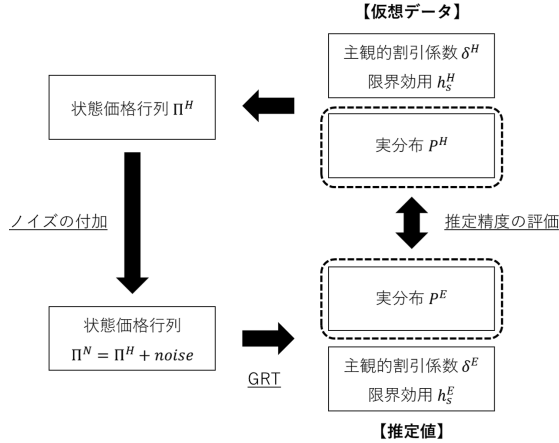


図 1: 仮想データを用いた分析の概要

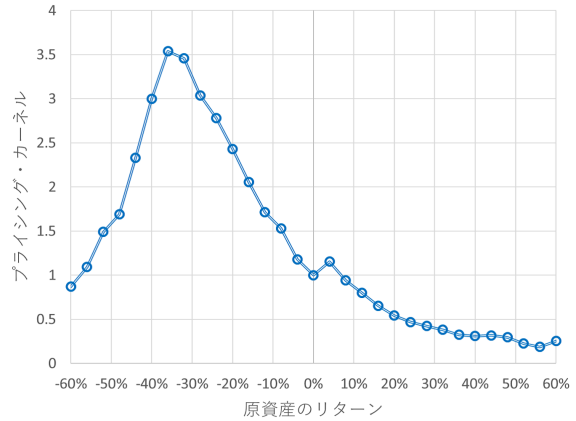


図 2: 仮想的プライシング・カーネルの形状

4.2 設定および仮想データ

(1) 状態および期間の設定

状態はオプション原資産の現在の状態からのリターンで定義する. 状態数を 31 とし各状態 s に対応するリターン r_s を, 0% を中心として 4% 刻みに設定する. このとき, $r_1 = -60\%$, $r_{s_0} = r_{16} = 0\%$, $r_{31} = 60\%$ となる. 簡単のため, 期間数は状態数と等しくなるように $T = S = 31$ と設定する. また, 仮想データの 1 期間の長さは 30 日とする.

(2) 実確率行列の仮想データ

仮想的な実確率行列 P^H は S&P500 の 1950 年 1 月 3 日から 2016 年 12 月 30 日までのデータをもとに作成する. 初めに, ある基準日を設定し, その基準日から 30 日, 60 日, ..., 630 日ごとのリターンを計測する. 次に, 各リターンを設定した状態に割り当てて, 状態推移の回数をカウントした行列を作成する. ただし, -58% 以下 (58% 以上) のリターンについては全て状態 1(状態 31) に割り当てる. そして, 基準日を 1950 年 1 月 3 日から日次でロールして同じように状態推移回数をカウントした行列を作成する. 最後に, 状態推移回数をカウントした全ての行列を足し合わせて作成した期間中の全ての状態推移の回数をカウントした行列に対して, 各成分をそれぞれの行和で割って基準化して確率行列にした行列を仮想的な真の実分布 P^H として設定する.

(3) 主観的割引係数と限界効用の仮想データ

仮想的な主観的割引係数 δ^H , 限界効用 h_s^H は上で設定した仮想的な実確率 P^H と 2017 年 3 月 1 日のオプションデータから計算した状態価格行列 Π から式 (7) の関係をもとに逆算して設定する. 具体的には以下の最適化問題を解くことで得られた解 δ^* , h_s^* をそれぞれ仮想データ δ^H , h_s^H として設定する.

$$\min_{\delta, h_s} \|\Pi - DPH\|_2^2 \quad (21)$$

$$\text{subject to } 0 < \delta \leq 1 \quad (22)$$

$$h_s > 0 \quad (s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S) \quad (23)$$

ここで, D は満期 i に対する主観的割引係数を対角要素に持つ $T \times T$ の対角行列, H は正規化した限界効用

を対角要素に持つ $S \times S$ の対角行列である。得られたプライシング・カーネルの形状を図 2 に示す*5。標準的な理論に従うと、代表的投資家がリスク回避的であれば、プライシング・カーネルは単調減少するとされている。しかし、実証分析で推定されたプライシング・カーネルは分布の中央付近で増加し、単調減少関数ではないことが Jackwerth[2] や Rosenberg and Engle[6] など複数の先行研究で指摘されている。本研究で過去データから仮想データとして設定したプライシング・カーネルは先行研究で実証的に推定された形状と同様の特徴を持っており、検証に用いる仮想データとして妥当であると判断できる。

4.3 推定精度の評価指標

推定精度は、2つの確率分布間の差異を評価する尺度である Kullback-Leibler(KL) 情報量を用いて評価する。仮想的に与えた実分布 \mathbf{P}^H に対する推定された実分布 \mathbf{P}^E の KL 情報量 $D_{KL}(\mathbf{P}^E \parallel \mathbf{P}^H)$ を評価指標とする。 $D_{KL}(\mathbf{P}^E \parallel \mathbf{P}^H)$ は、式 (24) のように定義される。

$$D_{KL}(\mathbf{P}^E \parallel \mathbf{P}^H) = \sum_{i=1}^T \sum_{s=1}^S p_{i,s}^E \ln \left(\frac{p_{i,s}^E}{p_{i,s}^H} \right) \quad (24)$$

乱数が結果に及ぼす影響を軽減するため、異なる 100 セットの乱数の組を用いて分析をおこなった。以降ではリスク調整前の分布であるリスク中立分布の KL 情報量 $D_{KL}(\mathbf{Q}^E \parallel \mathbf{P}^H)$ で基準化した、KL 情報量の平均値 \bar{D}_{KL} で評価を行う。 $\bar{D}_{KL} < 1$ の場合はリスク調整によって推定精度が向上する傾向があると判断し、 $\bar{D}_{KL} > 1$ の場合はリスク調整によって推定精度が悪化する傾向があると判断する。

4.4 評価項目

表 1 に示す 5 通りの分布について仮想的に設定した真の実分布 \mathbf{P}^H に対する KL 情報量を比較することで提案方法の特徴および有効性について検証する。リスク調整前のリスク中立分布を「RND」、3.3 節で示した方法で推定した $\bar{\delta}, \bar{h}_s^{-1}$ を用いて式 (12) から計算した実分布を「CRRA」、Jensen et al.[4] の示した基本的な方法で推定した実分布を「従来の方法」とする。また、提案法において、先験情報として「RND」を与えて推定した実分布を「提案法 (RND)」、先験情報として「CRRA」を与えて推定した実分布を「提案法 (CRRA)」とする。

「提案法 (RND)」および「提案法 (CRRA)」の KL 情報量が「RND」の KL 情報量である 1 より小さい場合には、提案法によるリスク調整によって推定精度が向上したといえる。「提案法 (RND)」および「提案法 (CRRA)」の KL 情報量が「従来の方法」の KL 情報量よりも小さい場合は、提案法は従来の方法よりも精度の良い推定値を得ることができるといえる。また、「提案法 (CRRA)」の KL 情報量が「CRRA」の KL 情報量より小さい場合は、提案法は先験情報として与えた分布よりも精度の高い実分布の推定値が得られるといえる。最後に、「提案法 (CRRA)」の KL 情報量が「提案法 (RND)」の KL 情報量よりも小さい場合は、提案法は観測されたデータに即した先験情報を設定することで推定精度が向上するといえる。以上の 4 つの項目について検証を行う。

*5 近年のオプションデータを用いて推定を行った場合に得られるプライシング・カーネルの形状の特徴は 2017 年 3 月 1 日以外の時点でも同様であった。

表 1: 比較対象

比較対象	説明
RND	リスク調整前の分布
CRRA	CRRA 型効用を仮定して推定した実分布
従来の方法	先験情報を与えずに推定した実分布
提案法 (RND)	先験情報として「RND」を与えて推定した実分布
提案法 (CRRA)	先験情報として「CRRA」を与えて推定した実分布

4.5 提案法の特徴および有効性の検証

4.5.1 推定された分布の例

推定された実分布の例を図 3 に示す。図 3(a) は満期 1 ヶ月、図 3(b) は満期 3 ヶ月、図 3(c) は満期 6 ヶ月の実分布の推定値を表す。従来の方法で推定された実分布には満期が長くなるにつれ、大きな歪みが発生し仮想データから大きくずれてしまっている。これは、推定の際に非適切問題を解く必要があり、推定値がノイズの影響を強く受けてしまうためである。CRRA と仮想データを比較すると、従来の方法と比べてずれが小さいことがわかる。投資家の効用に CRRA 効用を仮定してリスク選好に対するパラメータを 1 つにしたことでノイズの影響を受けにくくなり、精度が上がったことが確認された。また、提案法 (CRRA) は、比較対象の中で仮想データに最も近い実分布の推定値が得られている。これは、正則化項によってノイズの影響を抑えるだけではなく、観測データが内包している解の情報を適切に先験情報として与えることができたためだと考えられる。実分布が先験情報として与えた分布に対する近似値になりうることを考慮すると、CRRA のように観測データに対応した先験情報を与えることは提案法によって推定される実分布の推定値の精度を高める上で有効な方法であると考えられる。

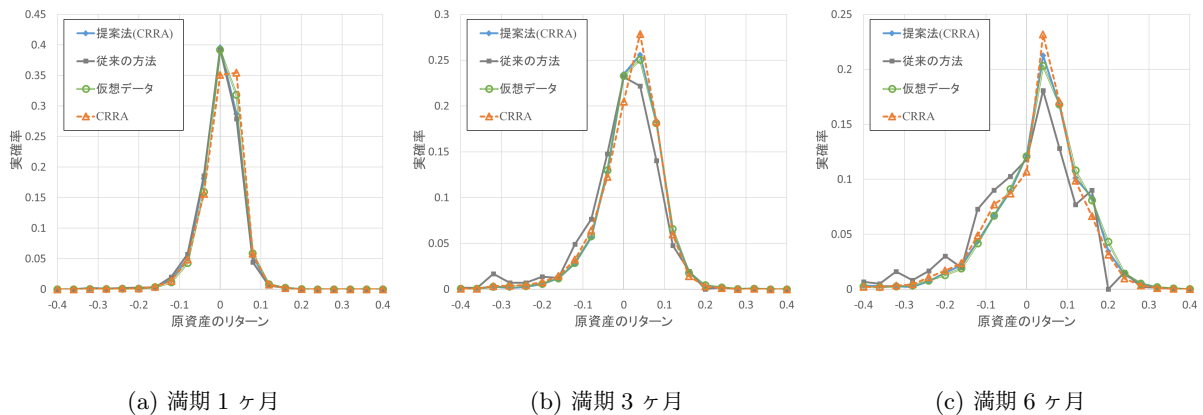


図 3: 推定された実分布の例 ($\sigma = 1\%$)

4.5.2 推定精度の検証

各比較対象において、仮想データに加えるノイズを $\sigma = 1\%, 5\%$ のそれぞれに設定した場合の正則化パラメータ $\zeta_2 (= 10^{-12}, 10^{-11.6}, \dots, 10^2)$ と KL 情報量の関係を図 4 に示す。初めに、 $\sigma = 1\%$ (図 4(a)) の場合について考察する。従来の方法で推定した実分布の KL 情報量はリスク中立分布の KL 情報量よりも大きくなっている。これは、従来の方法は非適切問題を解く必要があり、解がノイズの影響を強く受けたため

めであると考えられる。一方、提案法の KL 情報量は、 ζ_2 がおよそ 10^{-7} より大きい場合にリスク中立分布の KL 情報量を下回っており、提案法を用いたリスク調整によって推定精度が向上していることがわかる。また、提案法 (CRRA) の KL 情報量は、先験情報として与えた実分布の CRRA よりも小さいことから、提案法によって先験情報として与えた分布よりも精度の高い実分布を推定できるといえる。さらに、提案法 (CRRA) の KL 情報量が提案法 (RND) よりも小さいことから、提案法は観測データを用いて先験情報を設定することで推定精度をより高めることができることが明らかになった。

続いて、 $\sigma = 5\%$ (図 4(b)) の場合について考察する。ノイズが大きい場合には、提案法 (RND) の KL 情報量はリスク中立分布の KL 情報量を下回ることができなかった。一方で、提案法 (CRRA) は、 $\sigma = 1\%$ のときと同様に適切な正規化パラメータ ζ_2 を選択することで、最も精度の高い実分布を推定できている。しかしながら、ノイズの大きい場合は、先験情報としてリスク中立分布を与えたときと同様に、先験情報として与えた分布の KL 情報量を下回る ζ_2 の範囲がノイズが小さい場合と比較して狭かった。したがって、ノイズの影響が大きいケースでは、特に正規化パラメータの選択に注意する必要がある。

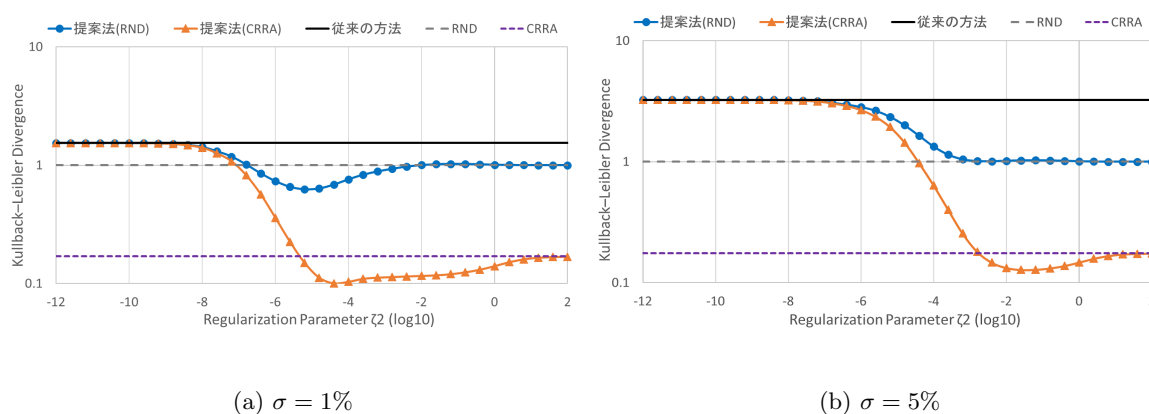


図 4: 正規化パラメータ ζ_2 と KL 情報量の関係

4.5.3 推定手順に関する検証

100 セットの乱数を用いて仮想データに加えるノイズを $\sigma = 1\%, 2\%, 5\%$ のそれぞれに設定した場合において、3.4 節で示した推定手順で得られた実分布の KL 情報量の平均値を表 2 にまとめた。

$\sigma = 1\%, 2\%$ の場合、従来の方法の KL 情報量の平均値はリスク中立分布の KL 情報量の値を上回っているのに対して、CRRA、提案法 (CRRA)、提案法 (RND) の値は下回っていた。提案法 (RND) は先験情報であるリスク中立分布の KL 情報量を、提案法 (CRRA) は先験情報である CRRA の KL 情報量を平均的に下回っていたことから、提案した推定手順により適切な解の推定ができていたといえる。したがって、ノイズの影響が比較的小さいケースでは 3.4 節で示した推定手順が有効に機能することが明らかになった。

$\sigma = 5\%$ の場合、提案法 (RND) は先験情報であるリスク中立分布の KL 情報量を、提案法 (CRRA) は先験情報である CRRA の KL 情報量を平均的に下回ることができなかった。これはノイズの影響が強くなったことによって、従来の方法自体の KL 情報量が大幅に悪化したこと、提案法の KL 情報量が先験情報として与えた分布の KL 情報量を下回る正規化パラメータの範囲が狭まったことが原因であると考えられる。しかし、このような場合に関しても提案法の KL 情報量が従来の方法および先験情報として与えた分布よりも小さくなるケースがある程度存在していることから、必ずしもノイズが大きいケースは適切な解を選択できないとはいえない。実際の金融市場においてデータがどの程度ノイズの影響を受けているかわからないが、3 節で示した方法で推定を行うことで、ノイズが 5% までの範囲では従来の方法やリスク調整前の分布であるリスク中立分布

よりも精度の高い推定値を得ることができていた。しかし、3.4節の手順は最良の方法とは限らないので、より精度の高い解を安定的に推定できる方法を開発することが望ましいが、今後の課題としたい。

表 2: KL 情報量の比較

σ	従来の方法	CRRA	提案法 (CRRA)	提案法 (RND)
1%	1.488	0.161	0.103	0.908
2%	2.310	0.162	0.119	0.912
5%	3.136	0.167	0.281	1.061

5 実データを用いた収益率分布の推定

5.1 分析の概要

実分布の推定にはシカゴ・オプション取引所の過去 10 年間 (2007 年 1 月 4 日から 2016 年 12 月 1 日まで)^{*6}の S&P500 インデックスオプションデータを用いる。推定時点は各月初営業日とし、1 期間の長さは 1 ヶ月とした。また、各状態 s に対応するリターン r_s を 0% を中心として 5% 刻みの上下 50% で設定する。仮想データを用いた数値分析で有効性が確認された 3 節の方法を用いて実分布を推定する。

5.2 結果と考察

(1) リスクプレミアムの推移

期待リスクプレミアム (= 実分布の平均 - リスク中立分布の平均) の推移を図 5 に示す。期待リスクプレミアムはほぼ全ての期間で正の値をとっており、分析期間において投資家はリスク回避的な傾向にあったといえる。特に、世界金融危機や米国債ショックといった価格下落局面において高い値が観測された。これは、価格下落局面においては投資家がリスクが高いと認識し、リスクに見合った高いリターンを要求するためであると考えられる。一方で、価格の上昇局面においてはリスクプレミアムが小さな値をとっているが、リスクが小さいと投資家に認識されることでリスクプレミアムが縮小していくためであると考えられる。

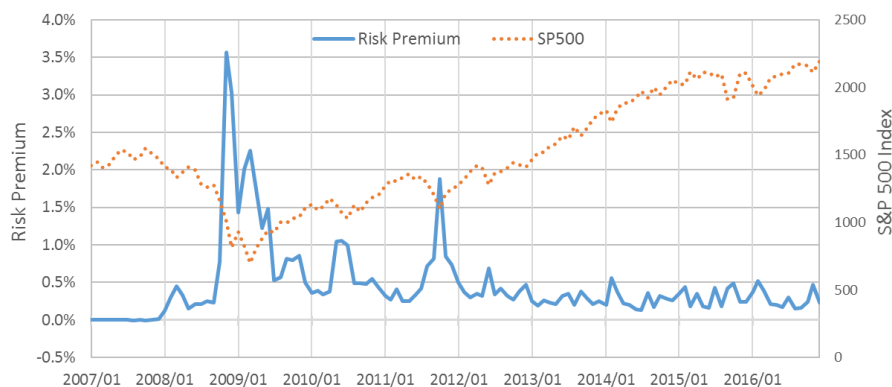


図 5: 期待リスクプレミアムの推移

^{*6} 2007 年前後からオプションの取引量とデータ数が急激に増加し、その後も上昇傾向を維持しながら十分多くの取引がなされていることから、この期間を分析対象とした。

(2) 分布の推定値の例

図5で高いリスクプレミアムが観測された2008年11月4日と2011年10月3日のデータを用いて推定した分布を図6に示す。また、各分布の統計量および期間平均を表3に示す。いずれの分布も、提案法を用いたリスク調整によって分布の下側が薄くなり、中央から上側に掛けて厚くなっている。その結果、分布の平均、超過尖度は増加し、標準偏差、歪度が減少している。推定されたプライシング・カーネルの形状はどちらの時点においても概ね右下がりであり、リスク調整によってオプション価格に内包されていた代表的投資家のリスク回避的な選好を分布に反映することができていたといえる。

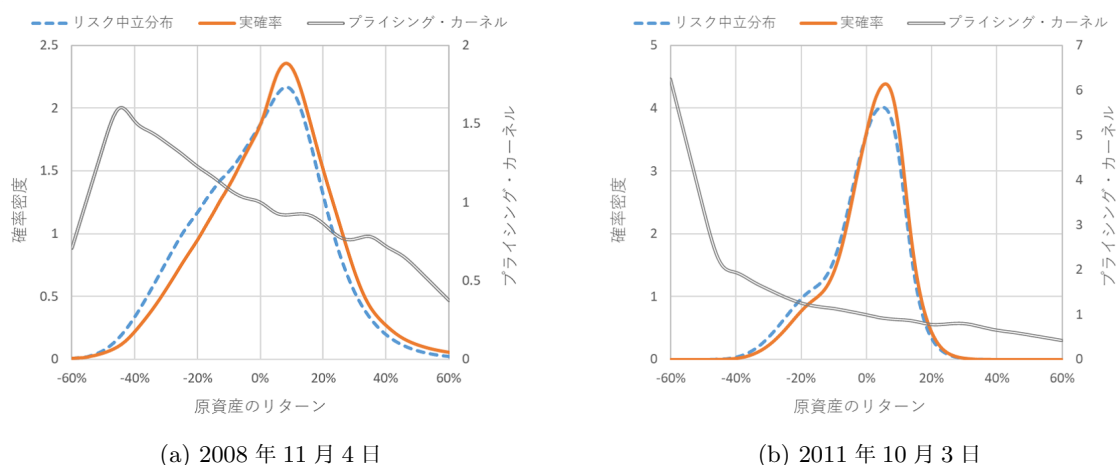


図6: 実分布の推定値

表3: 推定した実分布の統計量

	2008年11月4日		2011年10月3日		期間平均	
	リスク中立分布	実分布	リスク中立分布	実分布	リスク中立分布	実分布
平均	-0.512%	2.831%	-0.905%	0.772%	-0.111%	0.342%
標準偏差	18.931%	18.513%	11.737%	11.018%	5.681%	5.409%
歪度	-0.134	-0.197	-0.693	-0.741	-1.110	-1.105
超過尖度	-0.423	-0.256	0.258	0.570	1.751	2.027

(3) 分布の予測力の評価

分布の予測力の評価には、KS(Kolmogorov-Smirnov) 検定と Berkowitz 検定を用いる。KS 検定では「予測と実現値との間に偏りが無い」ことについて検定を行い、Berkowitz 検定では上記の点に加えて「時系列的な相関がない」ことについても検定を行うことで分布の予測力を評価する。いずれの検定においても「予想分布が収益率に対して予測力がある」という帰無仮説に対して検定を行う。表4に各検定のp値を示す。どちらの検定においても、帰無仮説は棄却されなかった。ただし、実分布のp値がリスク中立分布よりも高くなっていることから、GRTを用いたリスク調整によって分布の予測力が向上したといえる。これは、オプション価格に内包されている市場参加者のリスク選好をリスク調整によって分布に適切に反映できたためであると考えられる。

表 4: 分布の予測力の検定 (p 値)

	リスク中立分布	実分布
KS 検定	0.506	0.783
Berkowitz 検定	0.220	0.377

6 結論と今後の課題

Jensen et al.[4] の GRT を適用することで、市場オプション価格から forward looking な実分布を推定することができる。GRT は Ross[7] の RT の推移状態価格に関する斉次マルコフ性の仮定を緩和した定理であるため、斉次マルコフ性の仮定に起因するバイアスを解消し、より柔軟に実分布を推定できることが期待される。本研究では、伊藤・霧生・枇々木 [8] の示した GRT を用いた実分布の推定方法をベースにして、観測データに内包される情報を用いて設定した先験情報を与えて問題を解く方法について検証を行った。まず、提案法の有効性を検証するために仮想データを用いた数値分析を実施し、(1) 適切な正則化パラメータを選択した場合には、提案法は先験情報として与えた分布や従来の方法と比較して精度の高い実分布の推定値が得られること、(2) 観測データに対応した先験情報を設定することで推定精度を向上させることができることを明らかにした。また、提案法を用いて 2007 年から 2016 年までの S&P500 オプション価格から実分布を推定し、分布の特徴と実現値に対する予測力に関して検証を行った。推定した実分布はほぼ全ての期間で正の期待リスクプレミアムをとっており、特に価格下落局面で高い値が観測された。さらに、実現値に対する分布の予測力を統計的に評価した結果、GRT を用いたリスク調整によって分布の推定精度が向上することが示唆された。

今後の課題としては、推定手順を改善することが挙げられる。仮想データを用いた数値分析において、ノイズが大きい場合には本研究の推定手順では先験情報として与えた分布よりも精度の高い実分布を推定できなかった。そのため、多くの設定条件で先験情報として与えた分布や従来の方法と比較して精度の高い実分布の推定値が得られるような推定手順の開発が必要であると考えられる。その他の今後の課題としては、提案法で推定した実分布を最適資産配分問題に適用した場合の運用パフォーマンスを検証することが挙げられる。

参考文献

- [1] D. Breeden and R. Litzenberger. Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, 51, 621-651, 1978.
- [2] J. C. Jackwerth. Recovering risk aversion from option prices and realized returns. *Review of Financial Studies*, 13(2), 433-451, 2000.
- [3] J. C. Jackwerth, and M. Menner. Does the Ross Recovery Theorem Work Empirically? *Working Paper*, 2017.
- [4] C. S. Jensen, D. Lando, and L. H. Pedersen. Generalized Recovery. *Working Paper*, 2016.
- [5] T. Kiriū and N. Hibiki. Estimating Forward Looking Distribution with the Ross Recovery Theorem. *Working Paper*, 2016.
- [6] J. V. Rosenberg and R. F. Engle. Empirical pricing kernels. *Journal of Financial Economics*, 64(3), 341-372, 2002.
- [7] S. Ross. The Recovery Theorem. *Journal of Finance*, 70(2), 615-648, 2015.
- [8] 伊藤雅剛・霧生拓也・枇々木規雄. Generalized Recovery Theorem を用いた収益率分布の推定方法, 2016 年 日本金融・証券計量・工学学会 冬季大会予稿集, 242-253, 2017.