

# Generalized Recovery Theorem を用いた収益率分布の推定方法

伊藤 雅剛<sup>†</sup>

霧生 拓也<sup>‡</sup>

枇々木 規雄<sup>§</sup>

**和文概要** Ross[11] は、リスク中立分布から投資家のリスク選好を決定して、実分布を推定する定理として Recovery Theorem(RT) を導いた。状態価格の均一性を仮定し、RT を適用することでオプション価格に内包された forward looking な実分布を推定できる。しかし、推定の過程で非適切問題が出現するため、得られる推定値は不安定であることが知られている。Kiriu and Hibiki[8] は先験情報としてオプション価格から推定したリスク中立分布を与えて解を安定化して問題を解く方法を提案し、仮想データを用いた数値分析によってその有効性を示した。近年、状態価格の均一性を仮定せずに実分布を推定することを可能にした Generalized Recovery Theorem(GRT) が Jensen et al.[6] によって導かれた。GRT を用いた推定の過程でも RT の場合と同様に非適切問題が出現する。そこで、本研究では実分布に関する先験情報を与えて解を安定化する推定方法を提案する。先験情報として与える分布は任意であるため、様々な設定方法が考えられるが、実務的に使いやすい方法を示す。さらに、Kiriu and Hibiki[8] と同様に先験情報としてオプション価格から推定したリスク中立分布を与えた場合において、提案方法の特徴を仮想データを用いた数値分析を通して検証する。

## 1 研究の背景と目的

市場リスク管理や最適資産配分問題といった金融の諸問題について考える場合、金融資産の収益率分布をインプットとして問題を解く必要がある。収益率分布の推定方法としては過去の収益率データをもとに推定する方法が一般的であり、実務でもよく用いられている。しかし、この方法は過去のデータに依存してしまう backward looking な推定方法である。推定時点のデータを用いて推定した forward looking な収益率分布を用いることが望ましい。

ヨーロピアン・オプション（以下、オプション）は、満期日において原資産を予め取り決められた権利行使価格で売買する権利を表す金融派生商品である。このような商品特性から、オプション価格には、原資産の価格変動に関する市場参加者の予想が内包されている。市場が完備であるという仮定の下では、オプション価格からリスク中立分布を導出することができる (Breed and Litzenberger[4])。しかし、オプション価格から直接計算された分布は、リスク中立確率測度における分布であり、実測度の分布とは一般には一致しない。したがって、金融の諸問題へ応用する場合には、投資家のリスク選好を考慮して、リスク中立分布を実分布へ調整（リスク調整）する必要がある。

Ross[11] は、時間分離可能な効用 (time-separable utility) を持つ代表的投資家の存在を仮定することで、リスク中立分布から投資家のリスク選好を一意に決定して、実分布にリスク調整する定理として Recovery Theorem(以降、RT) を導いた。状態価格の均一性 (time-homogeneity) を仮定し、RT を適用することでオプション価格に内包された forward looking な実分布を推定できる。しかし、推定の過程で非適切問題が出現するため、得られる推定値は不安定であることが知られている。Kiriu and Hibiki[8] は Audrino et al.[1] の Tikhonov 正則化を用いた推定方法を拡張して、先験情報としてオプション価格から推定したリスク中立分布を与えて解を安定化して実分布を推定する方法を提案した。さらに、仮想データを用いた数値分析によってその有効性を示している。

近年、状態価格の均一性を必要としない形に RT を一般化した Generalized Recovery Theorem(以降、GRT) が Jensen et al.[6] によって導かれた。GRT を用いて実分布を推定することで、RT を用いて実分布を推定する場合と比較して状態価格の均一性を仮定して推定することに起因するバイア

<sup>†</sup> 慶應義塾大学大学院 理工学研究科 開放環境科学専攻, E-mail: masatakeitoh@gmail.com

<sup>‡</sup> 株式会社三菱 UFJ トラスト投資工学研究所 (MTEC), E-mail: kiriu@mtec-institute.co.jp, 本稿の内容は筆者が所属する組織を代表するものではなく、すべて個人的な見解である。

<sup>§</sup> 慶應義塾大学 理工学部 管理工学科, Email: hibiki@ae.keio.ac.jp

スが解消されることが期待される<sup>1</sup>。さらに Jensen et al.[6] は投資家のリスク選好に関してパラメトリックな仮定を置いた場合でも GRT を適用可能であることを示し、S&P500 オプションから推定した実分布から計算した期待リターンの将来リターンの予測可能性について検証している。

本研究では、GRT を用いた実分布の推定方法について議論する。まず、RT の場合と同様に GRT を用いた推定の過程でも非適切問題が出現するため、従来の推定方法では実分布を精度良く推定することが困難であることを示す。そして、実分布に関する先験情報を与えて解を安定化する推定方法を提案する。先験情報として与える分布は任意であるため、様々な設定方法が考えられるが、実務的に使いやすい方法を示す。さらに、Kiriu and Hibiki[8] と同様に先験情報としてオプション価格から推定したリスク中立分布を与えた場合において、仮想データを用いた数値分析によって以下の点について検証する。

1. 提案法は設定した先験情報に比べて精度の高い実分布の推定値を得られるか
2. 提案法は従来の推定方法に比べて精度の高い実分布の推定値を得られるか

本稿の構成は以下の通りである。2 節では、Jensen et al.[6] の導いた GRT について説明する。3 節では、GRT を用いてオプション価格から実分布を推定する新たな方法について提案する。また、先験情報の設定方法について議論する。4 節では、仮想データを用いた実分布の推定精度に関する数値分析の方法と結果および考察を示す。最後に、5 節で結論と今後の課題について述べる。

## 2 Generalized Recovery Theorem (Jensen et al.[6])

本節では、Jensen et al.[6] の導出した GRT の概要を簡潔に説明する。GRT は離散時間有限状態空間多期間モデルの枠組みで導かれた定理である。市場は完備で裁定機会は存在しないものとし、市場の状態  $s(= 1, \dots, s_0, \dots, S)$  をオプションの原資産の現在の状態  $s_0$  からのリターン  $r_s$  によって定義する。すなわち、 $r_{s_0} = 0\%$  である。状態  $s_0$  から時点  $\tau(= 1, \dots, T)$  の状態  $s$  への推移に関する状態価格を  $\pi_{\tau,s}$ 、リスク中立確率を  $q_{\tau,s}$ 、実確率を  $p_{\tau,s}$ 、プライシング・カーネルを  $m_{\tau,s}$  とし、それぞれを  $T \times S$  の行列形式で表現したものを  $\Pi, Q, P, M$  とする。状態価格  $\Pi$  はオプション市場価格から推定することができるため、既知とする。リスク中立確率  $q_{\tau,s}$  と状態価格  $\pi_{\tau,s}$  との間には以下の関係が成り立つため、 $q_{\tau,s}$  は  $\pi_{\tau,s}$  を用いて計算することができる。

$$q_{\tau,s} = \frac{\pi_{\tau,s}}{\sum_{k=1}^S \pi_{\tau,k}} \quad (\tau = 1, \dots, T; s = 1, \dots, S) \quad (2.1)$$

一方で状態価格  $\pi_{\tau,s}$ 、プライシング・カーネル  $m_{\tau,s}$ 、実確率  $p_{\tau,s}$  の間には式 (2.2) の関係が成り立つ。

$$\pi_{\tau,s} = m_{\tau,s} p_{\tau,s} \quad (\tau = 1, \dots, T; s = 1, \dots, S) \quad (2.2)$$

このため、実確率  $p_{\tau,s}$  を決定するには、状態価格  $\pi_{\tau,s}$  だけではなくプライシング・カーネル  $m_{\tau,s}$  の情報が必要である。

GRT は時間分離可能な効用を持つ代表的投資家の存在を仮定して、状態価格からプライシング・カーネルおよび実確率を復元する。この仮定の下では、主観的割引係数  $\delta \in (0, 1]$  と状態  $s$  における限界効用  $u_s > 0$  を用いて、プライシング・カーネル  $m_{\tau,s}$  を式 (2.3) のように記述できる。なお、 $h_s$  は状態  $s_0$  における限界効用が 1 となるように正規化した限界効用である。

$$m_{\tau,s} = \delta^\tau \left( \frac{u_s}{u_{s_0}} \right) = \delta^\tau h_s \quad (\tau = 1, \dots, T; s = 1, \dots, S) \quad (2.3)$$

式 (2.2) に対して式 (2.3) を代入することで次の式を得る。

$$\pi_{\tau,s} = \delta^\tau p_{\tau,s} h_s \quad (\tau = 1, \dots, T; s = 1, \dots, S) \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>状態価格の均一性が成立している場合、GRT の解は RT の解と一致する。

ここで、正規化した限界効用を対角要素に持つ  $S \times S$  の対角行列を  $\mathbf{H} = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_S)$ 、満期  $\tau$  における主観的割引係数を対角要素に持つ  $T \times T$  の対角行列を  $\mathbf{D} = \text{diag}(\delta, \delta^2, \dots, \delta^T)$  と定義すると、式 (2.4) は式 (2.5) のように行列表現できる。

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{H} \quad (2.5)$$

$\mathbf{P}$  は確率行列であることから、 $\mathbf{e}$  を単位行列として  $\mathbf{P}\mathbf{e} = \mathbf{e}$  が成り立つ。式 (2.5) の両辺に右側から  $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{e}$  を掛けることで

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{e} \quad (2.6)$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} \pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{T,1} & \cdots & \pi_{T,S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{-1} \\ \vdots \\ h_{s_0-1}^{-1} \\ 1 \\ h_{s_0+1}^{-1} \\ \vdots \\ h_S^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ \vdots \\ \delta^T \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

が成り立つ。式 (2.7) において、 $T$  本の方程式に対して、未知変数は  $\delta, h_1^{-1}, \dots, h_{s_0-1}^{-1}, h_{s_0+1}^{-1}, \dots, h_S^{-1}$  の  $S$  個であるため、 $S \leq T$  の場合に、解を計算することができ、式 (2.7) の両辺の差が小さくなるように  $\delta, h_1^{-1}, \dots, h_{s_0-1}^{-1}, h_{s_0+1}^{-1}, \dots, h_S^{-1}$  を推定すればよい。次に、この式をより問題が解きやすい形に変形する。式 (2.7) は、右辺の主観的割引係数  $\delta^\tau$  を除けば、線形式である。そこで、 $\delta^\tau$  を  $\delta = \delta_0$  でテーラー展開し、1次近似する。

$$\delta^\tau \approx a_\tau + b_\tau \delta \quad (\tau = 1, \dots, T) \quad (2.8)$$

$$a_\tau = -(\tau - 1)\delta_0^\tau \quad (\tau = 1, \dots, T) \quad (2.9)$$

$$b_\tau = \tau\delta_0^{\tau-1} \quad (\tau = 1, \dots, T) \quad (2.10)$$

式 (2.8) を式 (2.7) に代入し整理すると、

$$\begin{bmatrix} -b_1 & \pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,s_0-1} & \pi_{1,s_0+1} & \cdots & \pi_{1,S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_T & \pi_{T,1} & \cdots & \pi_{T,s_0-1} & \pi_{T,s_0+1} & \cdots & \pi_{T,S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ h_1^{-1} \\ \vdots \\ h_{s_0-1}^{-1} \\ h_{s_0+1}^{-1} \\ \vdots \\ h_S^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - \pi_{1,s_0} \\ \vdots \\ a_T - \pi_{T,s_0} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

を得る。さらに、この式を行列  $\mathbf{B}$ 、ベクトル  $\mathbf{h}_\delta, \mathbf{a}_\pi$  を用いて置き換えると、

$$\mathbf{B}\mathbf{h}_\delta = \mathbf{a}_\pi \quad (2.12)$$

となる。主観的割引係数と限界効用に関する制約式の下で式 (2.12) の両辺の差を小さくするように未知変数  $\delta, h_1^{-1}, \dots, h_{s_0-1}^{-1}, h_{s_0+1}^{-1}, \dots, h_S^{-1}$  を推定する。具体的には以下の問題を解けばよい。

$$\min_{\mathbf{h}_\delta} \quad \|\mathbf{B}\mathbf{h}_\delta - \mathbf{a}_\pi\|_2^2 \quad (2.13)$$

$$\text{subject to} \quad 0 < \delta \leq 1 \quad (2.14)$$

$$h_s^{-1} > 0 \quad (s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S) \quad (2.15)$$

この問題は有効制約法などのアルゴリズムを用いて求解することができる。

最後に式 (2.4) を  $p_{\tau,s}$  について解いて、式 (2.13)-(2.15) の解を代入することで、実確率  $p_{\tau,s}$  を

$$p_{\tau,s} = \frac{1}{\delta_{\tau}} h_s^{-1} \pi_{\tau,s} \quad (\tau = 1, \dots, T; s = 1, \dots, S) \quad (2.16)$$

のように計算することができる。

### 3 推定方法

本節では GRT を用いてオプション価格から実確率行列  $\mathbf{P}$  を推定する具体的な方法論について議論する。3.1 節でオプション価格から状態価格行列  $\mathbf{\Pi}$  を推定する方法について簡単に説明する。3.2 節では GRT を用いて状態価格から実確率を推定する際に出現する、非適切問題について述べる。3.3 節では事前に実分布に関する先験情報を与えることで分布を安定的に推定するための方法を提案する。3.4 節では提案法における先験情報の設定方法の例を示す。これ以降では  $S \leq T$  の関係が満たされているものとして議論を進める。

#### 3.1 状態価格の推定

状態価格行列  $\mathbf{\Pi}$  の推定には Breeden and Litzenberger[4] の導いたオプション価格と状態価格の関係式を用いればよい。満期  $\tau$  と行使価格  $k$  に関する状態価格関数  $\pi(\tau, k)$  はコールオプション価格関数  $c(\tau, k)$  を用いて次のように表すことができる。

$$\pi(\tau, k) = \frac{\partial^2 c(\tau, k)}{\partial k^2} \quad (\tau = 1, \dots, T) \quad (3.1)$$

これは連続分布として得られた状態価格なので数値積分などの方法を用いて離散化して状態  $s$  に対応する行使価格  $k_s$  における状態価格  $\pi_{\tau,s}$  を計算すればよい<sup>2</sup>。ただし、4 節の数値分析では仮想データを用いることで状態価格の推定方法の影響を排除して分析を行う。

#### 3.2 実分布の推定と非適切問題

紙面の都合上詳細は省略するが、2000 年 1 月から 2016 年 8 月までの S&P500 の月次のオプション価格から  $S = 21, T = 21$  として状態価格行列  $\mathbf{\Pi}$  を推定し、行列  $\mathbf{B}$  の条件数を計算すると平均  $5.0 \times 10^7$  と非常に大きな値をとっていた<sup>3</sup>。推定した状態価格行列から従来の方法 (式 (2.13)-(2.15)) で計算した実分布は大きく歪んでおり、安定的な解を得ることはできなかった。さらに、4 節で説明する仮想データを用いた場合でも実際のデータを用いた場合と同様に行列  $\mathbf{B}$  の条件数は大きな値をとり、推定した実分布には歪みが見られた<sup>4</sup>。これらのことから、式 (2.13)-(2.15) の最適化問題は非適切問題になっているといえる。非適切問題とは方程式の独立性が低いためにその解の安定性が低く、解がノイズによって大きく変化してしまうという悪い性質をもった問題のことをいう。非適切問題において精度の良い推定値を得ることは一般に難しい。

#### 3.3 先験情報を利用した実分布の推定法

本研究では実分布 (実確率行列) に関して事前に期待される情報 (先験情報) を設定して非適切問題の解を求めることで、実分布を安定的に推定するための方法を提案する。 $\zeta$  をフィッティングと解の安定性のトレードオフ関係をコントロールする正則化パラメータ、 $\bar{\delta}, \bar{h}_s^{-1} (s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S)$  をそれぞれ、主観的割引係数と限界効用に関する先験情報とする。提案法では以下の最適化問題を

<sup>2</sup>より精緻に状態価格を推定する方法として混合対数正規分布を仮定する方法 (Melick and Thomas[10]), 平滑化スプラインによる方法 (Bliss and Panigirtzoglou[2], 霧生・樫々木 [7]), ニューラルネットワークによる方法 (Ludwig[9]) など多くの方法が提案されている。

<sup>3</sup> $\delta_0 = 0.9992 (\delta_0^{12} = 0.99)$  と設定して条件数を計算した。ただし、 $\delta_0$  の設定による条件数の変化はわずかであった。

<sup>4</sup>具体的な例を 4.3 節で示す。

解くことで  $\mathbf{h}_\delta$  を推定する。

$$\min_{\mathbf{h}_\delta} \|\mathbf{B}\mathbf{h}_\delta - \mathbf{a}_\pi\|_2^2 + \zeta \left( \left( \frac{\delta - \bar{\delta}}{\bar{\delta}} \right)^2 + \sum_{s=1, s \neq s_0}^S \left( \frac{h_s^{-1} - \bar{h}_s^{-1}}{\bar{h}_s^{-1}} \right)^2 \right) \quad (3.2)$$

$$\text{subject to } 0 < \delta \leq 1 \quad (3.3)$$

$$h_s^{-1} > 0 \quad (s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S) \quad (3.4)$$

式 (3.2) の第 1 項がもとの問題の目的関数、第 2 項が推定値と先験情報の間のずれに関するペナルティ項であり、正則化項と呼ばれる<sup>5</sup>。定式化上は実分布ではなく投資家のリスク選好に関して先験情報を設定するが、式 (2.4) の関係より、 $\bar{\delta}, \bar{h}_s^{-1} (s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S)$  を所与とした場合の実分布に関する先験情報  $\bar{p}_{\tau, s}$  は次のように計算できる。

$$\bar{p}_{\tau, s} = \frac{\pi_{\tau, s}}{\bar{\delta}^\tau \bar{h}_s} \quad (\tau = 1, \dots, T; s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S) \quad (3.6)$$

このことから、提案法は実確率行列に対する先験情報を与えて問題を解く方法とみなすことができる。

Kiriu and Hibiki[8] でも RT を用いた実分布推定の過程で出現する非適切問題に対して、元の目的関数値に先験情報を考慮して正則化項を加える方法を提案しているが、問題の構造上の制約からそこで設定可能な先験情報はオプション価格から推定したリスク中立分布に限られていた。一方で、本研究で提案する方法では先験情報として与える分布は任意であり、Kiriu and Hibiki[8] の推定方法を一般化した方法になっている。GRT は RT を状態価格の均一性の仮定に関して一般化した定理であることから、本研究で提案する GRT を用いた実分布の推定方法は状態価格の均一性の仮定と先験情報の 2 つの観点から Kiriu and Hibiki[8] の RT を用いた実分布の推定方法を一般化した推定方法であるといえる。

### 3.4 提案法における先験情報の設定方法

提案法で設定する先験情報は主観的割引係数に関する情報 ( $\bar{\delta}$ ) と限界効用に関する情報 ( $\bar{h}_s$ ) の 2 つに分けられ、その設定方法は任意であり各々の想定する値を設定すればよい。ここでは実務的に使いやすいと考えられる先験情報の設定方法の例を主観的割引係数に関して 1 通り、限界効用に関して 3 通り示す。

#### 3.4.1 主観的割引係数に関する先験情報の設定

主観的割引係数に関する先験情報の設定方法としてオプションから推定した状態価格にインプライドされている無リスク（客観的）割引係数を用いる方法が考えられる。状態価格の和は無リスク割引係数に一致することから、

$$\min_{\bar{\delta}} \sum_{\tau=1}^T \left( \bar{\delta}^\tau - \sum_{s=1}^S \pi_{\tau, s} \right)^2 \quad (3.7)$$

を解いて  $\bar{\delta}$  を設定すればよい。理論的には主観的割引係数と無リスク割引係数は一致するとは限らない<sup>6</sup>が、近い値をとることを想定して先験情報として設定する。また、テーラー展開の展開位置  $\delta_0$  もこの方法で設定することができる。

<sup>5</sup> $\delta$  と  $h_s^{-1}$  は値の水準が異なるため、目的関数としては

$$\min_{\mathbf{h}_\delta} \|\mathbf{B}\mathbf{h}_\delta - \mathbf{a}_\pi\|_2^2 + \zeta_1 (\delta - \bar{\delta})^2 + \zeta_2 \sum_{s=1, s \neq s_0}^S (h_s^{-1} - \bar{h}_s^{-1})^2 \quad (3.5)$$

のように 2 つの正則化項を置く方法も考えられる。しかし、正則化パラメータが 2 つになると分析が煩雑になることから本稿では簡便な方法として相対誤差の和に対してペナルティをかけて数値分析を行った。式 (3.5) の定式化の場合に関して分析を行うことは今後の課題である。

<sup>6</sup>投資家の効用がリスク中立的である場合、主観的割引係数と無リスク割引係数は一致する。

### 3.4.2 限界効用に関する先験情報の設定

#### (1) リスク中立分布の利用

限界効用に関する先験情報を設定する1つ目の方法は Kiriu and Hibiki[8] のように実分布に関する先験情報としてオプションから推定したリスク中立分布を用いる方法である。GRT はリスク中立分布から実分布にリスク調整する定理である。このため、リスク中立分布を用いて解を安定化して実分布を推定することは方法論として自然であると考えられる。実分布に関する先験情報としてリスク中立分布を用いる場合には限界効用に関して  $h_s^{-1} = 1(s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S)$  と設定すればよい。

#### (2) 時系列データの利用

2つ目の方法は、オプション価格とその原資産価格に関する時系列データを利用して投資家のリスク選好を推定し、その推定値を先験情報として利用する方法である。例えば、Shackleton et al.[12] はリスク中立分布の分布関数  $Q(x)$  と実分布の分布関数  $P(x)$  の間の関係をキャリブレーション関数  $C(x)$  を用いて次のように表している。

$$P(x) = C(Q(x)) \quad (3.8)$$

そして、オプション価格から推定したリスク中立分布とその実現値の組に関する時系列データからカーネル密度推定法を用いてこの関数  $C(x)$  をノンパラメトリックに推定している。このとき限界効用は  $h_s = C'(Q(s))(s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S)$  と表すことができるため、この値を提案法の先験情報として利用して実分布を推定すればよい。この他にも時系列データを利用して投資家のリスク選好を推定している研究として、Jackwerth[5] や Bliss and Panigirtzoglou[3] など数多くの論文が存在するのでこうした方法が一段階目の推定方法として利用可能である。

この方法は時系列データから投資家のリスク選好に関する期間平均値を推定し、2段階目でその推定値を利用して解を安定化して forward looking に実分布を推定する方法であると解釈することができる。投資家のリスク選好が時点ごとにそれほど大きく変化しないのであれば、1段階目で推定される投資家のリスク選好の推定値の精度が高くなることが期待されるため、このような状況で有効な方法であると思われる。

#### (3) パラメトリック GRT

3つ目の方法はまず、投資家の効用関数形にパラメトリックな仮定を置いて GRT を適用して投資家のリスク選好を推定し、推定値を先験情報として用いて提案法でノンパラメトリックに実分布の推定を行う方法である。ここでは具体例として1段階目の推定で投資家の効用関数に CRRA 型効用を想定して推定を行う場合の手順について説明する。CRRA 型効用を想定する場合、限界効用を相対的リスク回避度  $\gamma_R$  を用いて  $h_s^{-1} = (1 + r_s)^{\gamma_R}(s = 1, \dots, s_0 - 1, s_0 + 1, \dots, S)$  と表すことができる。この式を式 (2.11) に代入することで、解くべき最適化問題の変数は  $\delta, \gamma_R$  の2つのみとなる。こうして推定した値を提案法の先験情報に設定して最適化問題 (式 (3.2)-(3.4)) を解くことで実分布を推定する。

この方法では1段階目の最適化問題でパラメトリックな仮定を置き、投資家のリスク選好に関する大まかな形状を求めた後に、2段階目でパラメトリックに推定した情報を利用して解を安定化することで、より精度良くノンパラメトリックに推定値を求めることを狙った方法である。2つ目の方法である時系列データを用いる方法と比較すると、この方法は推定時点のオプション価格データのみから実分布を推定することができるため、投資家のリスク選好が時点ごとに大きく変化するような状況においても有効な方法であると考えられる。

## 4 数値分析

本節では、提案法の特徴および有効性を明らかにするために仮想データとして与えた実分布の実確率行列  $\mathbf{P}^H$  とノイズが含まれるデータから推定した実分布の実確率行列  $\mathbf{P}^N$  を比較することで、推定精度について分析する。図1に分析の概要を示す。

仮想データを用いて分析を行うのは、オプションの市場データを用いた場合、真の実分布の実確率行列  $\mathbf{P}^H$  が分からないために推定精度の評価を行うことが困難なためである。提案法における先

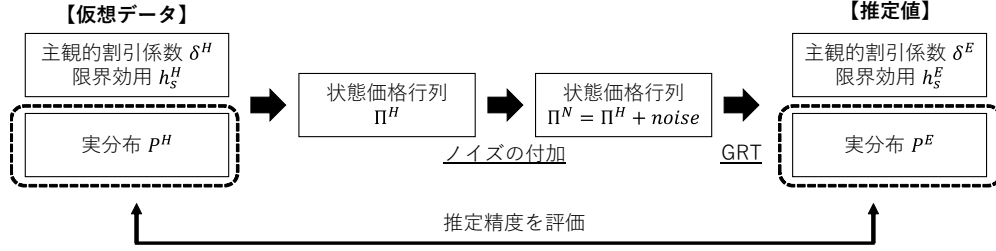


図 1: 仮想データを用いた分析の概要

験情報の設定は 3.4 節で説明した方法を用いるが、簡単のため本稿では、限界効用の先験情報の設定に関してはリスク中立分布を用いる方法のみを検証する。時系列データを用いる方法やパラメトリック GRT による方法で限界効用に関する先験情報を設定した場合の分析は今後の課題である。

#### 4.1 分析の手順

仮想データを用いた分析の具体的な手順を以下に示す。

1. 仮想的な実確率行列  $\mathbf{P}^H$  と割引係数  $\delta^H$ , 限界効用  $h_s^H$  ( $s = 1, \dots, S$ ) を与える。これらの仮想データの具体的な設定方法については 4.2.3 項で説明する
2.  $\mathbf{P}^H, \delta^H, h_s^H$  から式 (2.4) を用いて状態価格行列  $\mathbf{\Pi}^H$  を計算する。
3. 以下の式から  $\mathbf{\Pi}^H$  にノイズを加えた状態価格行列  $\mathbf{\Pi}^N$  を生成する。

$$\pi_{\tau,s}^N = \pi_{\tau,s}^H (1 + \sigma e_{\tau,s}) \quad (\tau = 1, \dots, T; s = 1, \dots, S) \quad (4.1)$$

ここで  $\sigma$  はノイズの大きさを表すパラメータであり,  $e_{\tau,s}$  は標準正規分布に従うと仮定する。

4. GRT を  $\mathbf{\Pi}^N$  に適用 (従来方法あるいは提案法) することで, 実確率行列の推定値  $\mathbf{P}^E$ , 主観的割引係数の推定値  $\delta^E$ , 限界効用の推定値  $h_s^E$  ( $s = 1, \dots, S$ ) を得る。
5. 真の実分布として仮想的に与えた実確率行列  $\mathbf{P}^H$  と推定された実確率行列  $\mathbf{P}^E$  の差異を計測することで, 推定精度を評価する。具体的な評価指標については 4.2.2 項で述べる。

#### 4.2 分析の設定

##### 4.2.1 状態および期間の設定

状態数を 31 とし各状態  $s$  に対応するリターン  $r_s$  を, 0% を中心として 3% 刻みに設定する。このとき,  $r_1 = -45\%, r_{s_0} = r_{16} = 0\%, r_{31} = 45\%$  となる。簡単のため, 期間数は状態数と等しくなるように  $T = S = 31$  と設定する<sup>7</sup>。

##### 4.2.2 推定精度の評価指標

推定精度は, 2 つの確率分布間の差異を評価する尺度である Kullback-Leibler (KL) 情報量を用いて評価する。本稿では, 仮想的に与えた実分布  $\mathbf{P}^H$  に対する推定された実分布  $\mathbf{P}^E$  の KL 情報量  $D_{KL}(\mathbf{P}^E \parallel \mathbf{P}^H)$  を評価指標とする。  $D_{KL}(\mathbf{P}^E \parallel \mathbf{P}^H)$  は, 式 (4.2) のように定義される<sup>8</sup>。

$$D_{KL}(\mathbf{P}^E \parallel \mathbf{P}^H) = \sum_{\tau=1}^T \sum_{s=1}^S p_{\tau,s}^E \ln \left( \frac{p_{\tau,s}^E}{p_{\tau,s}^H} \right) \quad (4.2)$$

乱数が結果に及ぼす影響を軽減するため, 異なる 100 セットの乱数の組を用いて分析をおこなった。以降ではリスク調整前の分布であるリスク中立分布の KL 情報量  $D_{KL}(\mathbf{Q}^E \parallel \mathbf{P}^H)$  で基準化した, KL 情報量  $D_{KL}(\mathbf{P}^E \parallel \mathbf{P}^H)$  の平均値を示す。

<sup>7</sup>実際のデータから状態価格行列  $\mathbf{\Pi}$  を推定する場合にはオプションの満期数が期間数  $T$  に対応することから  $T$  は市場で取引されているオプションの満期数よりも小さくせざるをえないため, 状態数の設定の仕方によっては  $S < T$  となることも考えられる。ただし, Audrino et al.[1] はオプションの満期に関してデータを補間することで  $S < T$  となることを避けて  $\mathbf{\Pi}$  を推定している。このような方法を用いることを想定すれば  $T = S$  と設定して分析することは非現実的ではない。

<sup>8</sup>真の分布と推定された分布が完全に一致する場合には,  $D_{KL}(\mathbf{P}^E \parallel \mathbf{P}^H) = 0$  となる。分母や真数が 0 になることを防ぐために,  $\mathbf{P}^E, \mathbf{Q}^E, \mathbf{P}^H$  の各成分に非常に小さな値 ( $10^{-20}$ ) を加えて KL 情報量を算出したが, この操作が結果に与える影響はほとんどないことを確認している。

### 4.2.3 仮想データ

仮想データは一期間の長さを 30 日と想定して作成する。

#### (1) 主観的割引係数と限界効用

主観的割引係数は年あたりの割引係数が 0.99 となることを想定して  $\delta^H = (0.99)^{\frac{1}{12}} = 0.9992$  と設定する。また、限界効用は代表的投資家が相対的リスク回避度  $\gamma_R = 3$  の CRRA 型効用を持つと想定して設定する。このとき、限界効用は  $h_s^H = (1 + r_s)^{-\gamma_R}$  と表すことができる<sup>9</sup>。

#### (2) 実確率行列

実確率行列  $P^H$  は S&P500 のヒストリカルデータを基に作成する。使用するヒストリカルデータの期間は 1950 年 1 月 3 日から 2016 年 12 月 30 日までである。初めに、ある基準日を設定し、その基準日から 30 日, 60 日, ..., 930 日ごとのリターンを計測する。次に、各リターンを設定した状態に割り当てて、状態推移の回数をカウントした行列を作成する。ただし、 $-43.5\%$  以下 ( $43.5\%$  以上) のリターンについては全て状態 1 (状態 31) に割り当てる。そして、基準日を 1950 年 1 月 3 日から日次でロールして同じように状態推移回数をカウントした行列を作成する。最後に、状態推移回数をカウントした全ての行列を足し合わせて作成した期間中の全ての状態推移の回数をカウントした行列に対して、各成分をそれぞれの行和で割って基準化して確率行列にした行列を仮想的な真の実分布  $P^H$  として設定する。

### 4.2.4 比較対象

本研究では表 1 に示す 4 通りの分布について仮想的に設定した真の実分布  $P^H$  に対する KL 情報量を比較することで提案方法の特徴および有効性について検証する。

表 1: 比較対象

比較対象	説明
リスク中立 従来の方法	リスク調整前の分布：提案法（リスク中立分布）の先験情報 従来の方法で推定した実分布
提案法（リスク中立分布）	提案法で先験情報としてリスク中立分布を与えて推定した実分布
提案法（完全先験情報）	提案法で先験情報として完全に正しい情報を与えて推定した実分布

このうち、「リスク中立」は式 (4.2) において「提案法（リスク中立分布）」で先験情報として与えるリスク中立分布  $Q^E$  を  $P^E$  の代わりに用いて KL 情報量を計算した場合である。 $Q^E$  はノイズを加えた状態価格行列  $\Pi^N$  から式 (2.1) を用いて計算する。また、「提案法（完全先験情報）」は提案法において仮想データとして与えた  $\delta^H, h_s^H (s = 1, \dots, S)$  を先験情報として設定した場合である。完全に正しい先験情報のもとで推定を行うため、正則化パラメータ  $\zeta$  を大きくするにつれて KL 情報量は 0 に漸近していくことが期待される。実際にオプションデータから推定する際には、正しい先験情報は未知であるためこの方法を用いることはできないが、最も良い先験情報を与えた場合の提案法の特徴について確認するために比較対象に加える。

「提案法（リスク中立分布）」と「リスク中立」の KL 情報量を比較することによって、提案法は設定した先験情報であるリスク中立分布よりも精度の高い実分布の推定値を得られるかどうかについて検証する。また、「提案法（リスク中立分布）」と「従来の方法」の KL 情報量を比較することで提案法は従来の推定方法に比べて精度の高い実分布を得られるかどうかについて検証する。

### 4.3 推定された分布の例

推定された分布の具体例としてある特定の乱数セットを用いた場合においてノイズの大きさを  $\sigma = 1\%$  として作成した  $\Pi^N$  から推定した  $\tau = 3$  (90 日後) における実分布を図 2 に示す。図 2(a) が従来の方法で推定した実分布である。GRT によるリスク調整によって精度良い解が得られるならば、リスク調整前の分布（リスク中立分布）よりも真の実分布に近い推定値が得られることが期待され

<sup>9</sup>Bliss and Panigirtzoglou[3] は投資家の効用に CRRA 型効用を仮定し、S&P500 のオプションデータとヒストリカルデータを組み合わせて 1993 年から 2010 年までのリスク回避度を月次で推定している。推定されたリスク回避度の推定値は用いるオプションの満期までの期間によって異なっていたが、最小で 3.37, 最大で 9.52 であったことから基本分析で用いるリスク回避度を  $\gamma_R = 3$  と設定し、4.5 節のロバスト性の検証で用いるリスク回避度を  $\gamma_R = 10$  と設定した。



しかし、従来の方法で推定された分布に大きな歪みが発生し、真の実分布から大きくずれている。これは推定の際に非適切問題を解く必要があり、推定値がノイズの影響を大きく受けてしまうためである。図 2(b) が提案法でリスク中立分布を先験情報として与え、正規化パラメータを  $\zeta = 10^{-6}$  と設定して推定した実分布である。提案法を用いた場合には式 (3.2) の第 2 項によってノイズの影響を抑えることで真の実分布に近い推定値が得られていることがわかる。

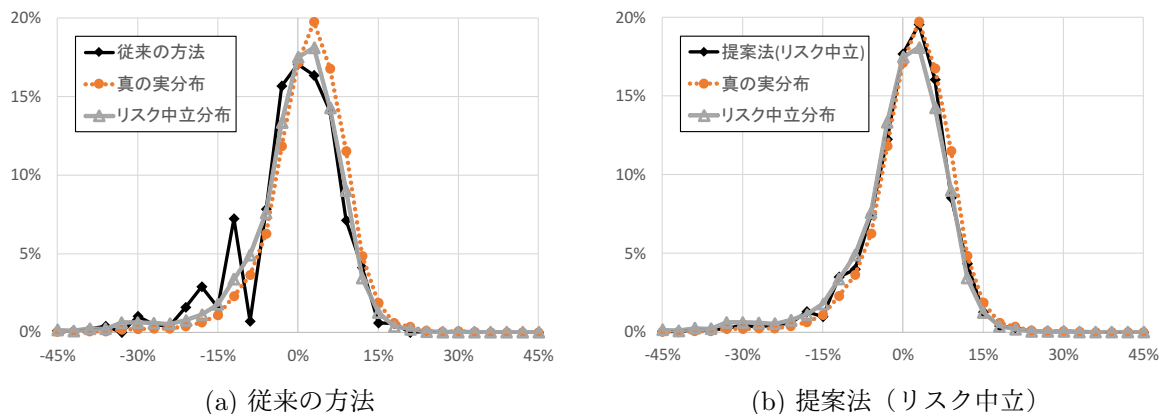


図 2: 推定された実分布 ( $\sigma = 1\%$ )

#### 4.4 基本分析

各比較対象において仮想データに加えるノイズを  $\sigma = 1\%, 5\%$  のそれぞれに設定した場合の正規化パラメータ  $\zeta (= 10^{-12}, 10^{-11.6}, \dots, 10^2)$  と KL 情報量の関係を図 3 に示す。グラフが下側にあるほど KL 情報量が小さく、推定精度が高いことを表している。提案法 (リスク中立) と提案法 (完全先験情報) で推定される解は  $\zeta = 0$  の場合に従来の方法で推定される解に一致するため、 $\zeta$  を小さくするにつれて提案法 (リスク中立) と提案法 (完全先験情報) の KL 情報量は「従来の方法」の KL 情報量に漸近する。また、提案法 (リスク中立) において  $\zeta = \infty$  とした場合に推定される分布はリスク中立分布に一致するため、 $\zeta$  を大きくするにつれて提案法 (リスク中立) の KL 情報量はリスク中立分布の KL 情報量に漸近していく。提案法 (完全先験情報) で推定される分布は  $\zeta = \infty$  の場合に真の実分布  $\Pi^H$  に一致するため、 $\zeta$  を大きくするにつれて提案法 (完全先験情報) の KL 情報量は 0 に漸近する。

まず、図 3(a) の  $\sigma = 1\%$  の場合について考察する。提案法 (リスク中立) の KL 情報量は  $\zeta$  がおよそ  $10^{-9}$  から  $10^{-3}$  までの範囲では従来の方法とリスク中立分布の KL 情報量を下回っており、この範囲では提案法は従来の方法や先験情報として設定したリスク中立分布と比較して推定精度が向上していることがわかる。特に  $\zeta = 10^{-6}$  の場合に KL 情報量は最小の値 0.631 をとり、この場合に最も推定精度が高くなる。

続いて、図 3(b) の  $\sigma = 5\%$  の場合について考察する。 $\sigma = 1\%$  と比べてノイズの影響が大きくなるため、従来の方法で推定した場合の KL 情報量はリスク中立分布の KL 情報量に比べて大きくなり、GRT を用いたリスク調整によって推定精度が低下している。しかし、この場合でも提案法 (リスク中立) で推定した実分布の最小の KL 情報量はリスク中立分布の KL 情報量に比較して小さく、提案法 (リスク中立) が推定精度を向上するために有効である。ただし、提案法 (リスク中立) の KL 情報量を下回る  $\zeta$  の範囲はおよそ  $10^{-4}$  から  $10^{-2}$  までと  $\sigma = 1\%$  の場合と比較して狭かった。このため、ノイズの影響が大きい場合には適切な  $\zeta$  の選択が特に重要であると考えられる。

#### 4.5 ロバスト性の検証

本節では、仮想データを変更して分析を行うことによって基本分析で得られた結果のロバスト性を検証する。図 4 に仮想データとして与える主観的割引係数を  $\delta^H = 0.99$  から  $\delta^H = 0.95$  に変更した場合の結果を示す。基本分析と同様の傾向が見られており、提案法 (リスク中立) を用いることで従来の方法やリスク中立分布と比較して精度の良い推定値を得ることが可能である。

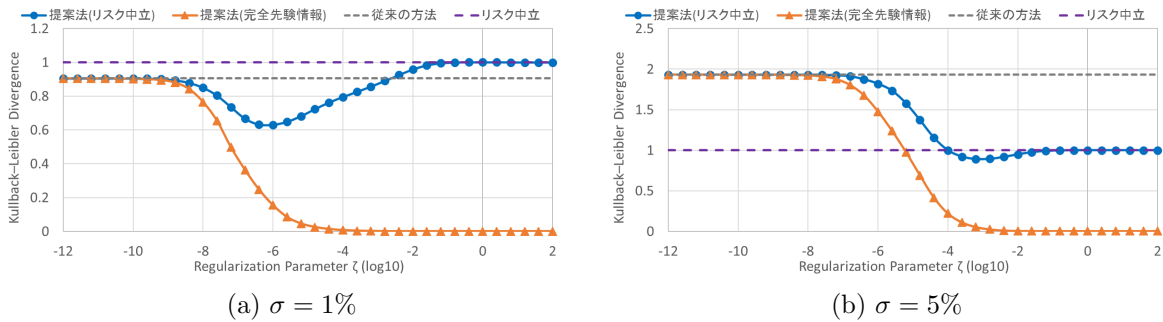


図 3: 基本ケース：正則化パラメータと KL 情報量の関係

図 5 は仮想データとして与える限界効用に関して想定する CRRA 型効用の相対的リスク回避度を  $\gamma_R = 3$  から  $\gamma_R = 10$  に変更した場合の結果である。この場合には基本分析の場合と異なり、ノイズの大きさに関わらずリスク中立分布に比べて従来の方法で推定した分布の推定精度が高く、従来の方  
 推定法でも GRT を用いたリスク調整により推定精度が向上していた。しかし、このような場合でも  $\sigma = 1\%$  の場合における提案法（リスク中立）の最小の KL 情報量  $0.060(\zeta = 10^{-8.8})$  は従来の方  
 法の KL 情報量  $0.076$  と比較して小さいことから提案法を用いることでさらに精度の高い解を得ることが可能である。ただし、ノイズが大きい  $\sigma = 5\%$  の場合には提案法（リスク中立）の KL 情報量は従  
 来の方法を下回ることができず、精度の高い結果を得ることができなかった。

図 6 は仮想データとして与える限界効用を CRRA 型効用関数から、絶対的リスク回避度  $\gamma_A = 3$  の CARA 型効用関数に変更した場合の結果である。 $\sigma = 1\%$  の場合には、従来の方  
 法の KL 情報量はリスク中立分布の KL 情報量と比べて大きくなるが、提案法（リスク中立）を用  
 いることで従来の方  
 法やリスク中立分布に比較して精度の良い推定値を得ることが可能である。し  
 かし、 $\sigma = 5\%$  の場合の提案法（リスク中立）の KL 情報量は先験情報であるリスク中立分布を下回  
 ることができず、精度の高い結果を得ることができなかった。

図 7 は仮想データとして与える実確率行列  $P^H$  を S&P500 のヒストリカルデータの代わりに日経  
 225 の同期間のデータを用いて作成した場合の結果である。この場合には基本分析の場合と異なり、  
 ノイズの大きさに関わらずリスク中立分布に比べて従来の方  
 法で推定した分布の推定精度が高く、従  
 来の推定法でも GRT を用いたリスク調整により推定精度が向上していた。しかし、このような場合  
 でも提案法（リスク中立）を用いることで従来の方  
 法やリスク中立分布に比較して精度の良い推定  
 値を得ることが可能であった。ただし、 $\sigma = 1\%$  のような従来の方  
 法の推定精度がリスク中立分布よ  
 りも大きく改善している場合は、提案法（リスク中立）が従来の方  
 法の KL 情報量を下回る  $\zeta$  の範囲は  
 およそ  $10^{-8}$  から  $10^{-6}$  までと狭く、下回る量もわずかであった。

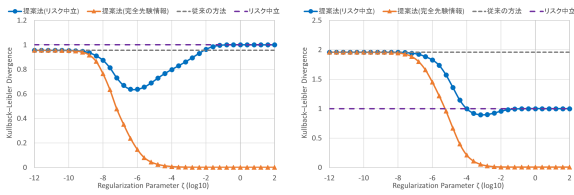
今回の分析結果から提案法（リスク中立）を用いた場合には従来の方  
 法や先験情報として与えた  
 リスク中立分布に比べて精度の良い解を推定できる傾向にあった。しかし、仮想データの設定によっ  
 ては先験情報として与えたリスク中立分布や従来の方  
 法と比べて推定精度が向上しない場合もあり、  
 ロバスト性があるとはいえなかった。このため、目的関数や先験情報の設定方法を改良し、検証を  
 行う必要があるが、それらは今後の課題としたい。

#### 4.6 先験情報に関する感度分析

本節では、 $\sigma = 1\%$  の場合において提案法で設定する先験情報を変化させて先験情報の設定が推定  
 精度に与える影響について分析する。

図 8(a) は、基本分析と同様に式 (3.7) を用いて限界効用を先験情報として設定し、年あたりの主  
 観的割引係数を  $\bar{\delta}^{12} = 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 1.00$  と変化させた場合の KL 情報量を表している。 $\bar{\delta}$  を  
 変化させても推定される KL 情報量はほとんど変わらないことから、主観的割引係数に関する先験  
 情報が推定精度に与える影響は小さいと考えられる。

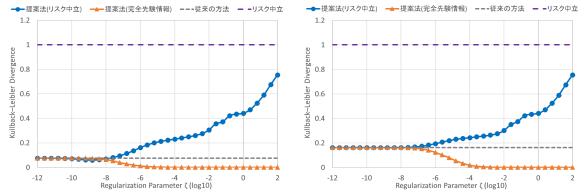
次に、限界効用に関する先験情報を変更して実分布を推定した場合について分析する。先験情  
 報として与える限界効用を CRRA 型効用を想定した場合に限定し、そのリスク回避度を  $\gamma_R =$



(a)  $\sigma = 1\%$

(b)  $\sigma = 5\%$

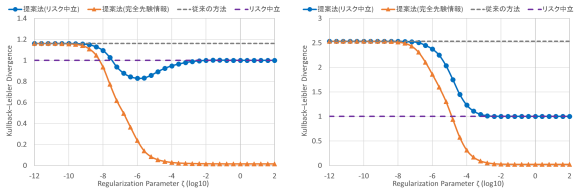
図 4: ロバスト性の検証:  $\delta = 0.95$



(a)  $\sigma = 1\%$

(b)  $\sigma = 5\%$

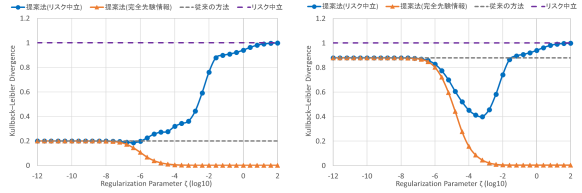
図 5: ロバスト性の検証:  $\gamma_R = 10$



(a)  $\sigma = 1\%$

(b)  $\sigma = 5\%$

図 6: ロバスト性の検証: CARA 型効用

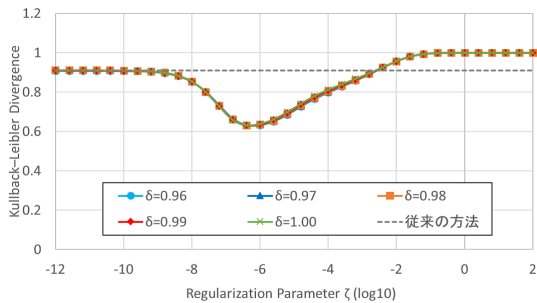


(a)  $\sigma = 1\%$

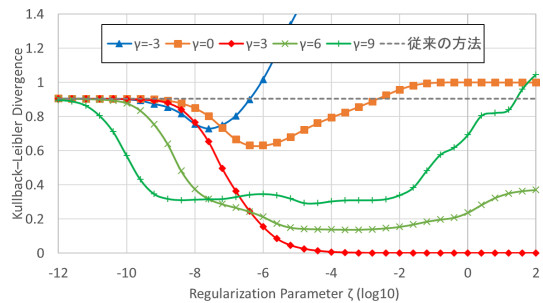
(b)  $\sigma = 5\%$

図 7: ロバスト性の検証: 日経 225

-6, -3, 0, 3, 6, 9 と変化させた場合について分析する。  $\gamma_R = 0$  の場合が「提案法 (リスク中立)」,  $\gamma_R = 3$  の場合が「提案法 (完全先験情報)」に対応する。分析結果を図 8(b) に示す。まず, 先験情報として設定するリスク回避度が真のリスク回避度 ( $\gamma_R = 3$ ) よりも小さい場合 ( $\gamma_R = -3, 0$ ) の最小の KL 情報量を比較すると  $\gamma_R = -3$  の場合に比べて  $\gamma_R = 0$  の推定精度が高く, リスク回避度が大きい場合 ( $\gamma_R = 6, 9$ ) の最小の KL 情報量を比較すると  $\gamma_R = 9$  の場合に比べて  $\gamma_R = 6$  の推定精度が高い。このことから先験情報として設定したリスク回避度が真のリスク回避度に近いほど精度の良い解が得られる傾向にあることがわかった。しかし, 最小の KL 情報量に対応する正則化パラメータ  $\zeta$  は先験情報として設定した  $\gamma_R$  によって異なっており, 明確な特徴は見られなかった。この点について詳細に分析することは  $\zeta$  の設定方法を考える上でも重要な問題であるが, 今後の課題とする。



(a) 主観的割引係数



(b) 限界効用:  $\gamma_R$  の変更

図 8: 先験情報に関する感度分析

## 5 結論と今後の課題

本研究では GRT を用いてオプション価格から forward looking な実分布を推定する方法について議論した。GRT を用いて実分布を推定するには非適切問題を解く必要がある。そこで本研究では実分布に関する先験情報を与えて解を安定化する推定方法を提案した。この方法は状態価格の均一性の仮定と先験情報の 2 つの観点から Kiriu and Hibiki[8] の RT を用いた実分布の推定方法を一般化した推定方法である。また, 仮想データを用いた数値分析によってリスク中立分布を先験情報として与えた場合の提案法の特徴および有効性に関する検証を行った。

数値分析の結果から, 提案法を用いた場合には先験情報として与えた分布や従来の推定方法と比べて推定精度の高い実分布の推定値が得られる可能性があることがわかった。ただし, 今回の分析に用いたデータセットは限られており, 今後多くの先験情報の設定や仮想データの設定のもとでロ

バスト性について検証する必要がある。さらに、ノイズが大きい場合や先験情報と真の分布のずれが大きい場合などには推定精度の改善の幅が小さく、推定精度を向上できる正則化パラメータ $\zeta$ の範囲も限られているケースや、提案法で推定した実分布の推定精度が先験情報として与えた分布や従来の方で推定した実分布に比べて改善しないケースが見られた。この点に関しては式(3.5)の形などに目的関数を変更することを検討したり、適切な正則化パラメータの選択基準も併せて開発する<sup>10</sup>など提案法を改善していく必要があると考えられる。

その他の今後の課題として、実際のオプションデータから実分布を推定して分布の予測力の観点から提案法の有効性について検証することが挙げられる。

## 参考文献

- [1] F. Audrino, R. Huitema, and M. Ludwig. An empirical analysis of the ross recovery theorem. *Working Paper, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2433170>*, 2015.
- [2] R. R. Bliss and N. Panigirtzoglou. Testing the stability of implied probability density functions. *Journal of Banking & Finance*, 26(2), 381-422, 2002.
- [3] R. R. Bliss and N. Panigirtzoglou. Option-Implied Risk Aversion Estimates. *Journal of Finance*, 59(1), 407-446, 2004.
- [4] D. Breeden and R. Litzenberger. Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, 51, 621-651, 1978.
- [5] J. C. Jackwerth. Recovering risk aversion from option prices and realized returns. *Review of Financial Studies*, 13(2), 433-451, 2000.
- [6] C. S. Jensen, D. Lando, and L. H. Pedersen. Generalized Recovery. *Working Paper, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2674541>*, 2016.
- [7] 霧生拓也, 枇々木規雄. 複数資産にインプライド分布を用いた最適資産配分モデル. *Transactions of the Operations Research Society of Japan*, 57, 112-134, 2014.
- [8] T. Kiriu and N. Hibiki. Estimating Forward Looking Distribution with the Ross Recovery Theorem. *Working Paper, Available at [http://www.ae.keio.ac.jp/lab/soc/hibiki/profile\\_2/Kiriu&Hibiki\\_20161027.pdf](http://www.ae.keio.ac.jp/lab/soc/hibiki/profile_2/Kiriu&Hibiki_20161027.pdf)*, 2016.
- [9] M. Ludwig. Robust Estimation of Shape-Constrained State Price Density Surfaces. *Journal of Derivatives*, 22(3), 56-72, 2015.
- [10] W. R. Melick, and C. P. Thomas. Recovering an asset's implied PDF from option prices: an application to crude oil during the Gulf crisis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(1), 91-115, 1997.
- [11] S. Ross. The Recovery Theorem. *Journal of Finance*, 70(2), 615-648, 2015.
- [12] M. B. Shackleton, S. J. Taylor and P. Yu. A multi-horizon comparison of density forecasts for the S&P 500 using index returns and option prices. *Journal of Banking & Finance*, 34(11), 2678-2693, 2010.

---

<sup>10</sup>Kiriu and Hibiki[8] は RT を用いた実分布の推定方法に関して正則化パラメータの選択基準を併せて提案している。本研究でも同様の考え方で選択基準を設定した場合について検証を行ったが、適切な正則化パラメータを安定的に選択することができなかった。このため、本研究の提案法にあった選択基準を検討する必要があると考えられる。