

# インプライド分布を用いた多期間最適資産配分モデル

木村嘉明\*, 枇々木規雄†

## Abstract

オプション価格から導出される原資産価格の確率分布をインプライド分布と呼ぶ。将来の価格変動に対する予測がオプション価格に反映されているならば、インプライド分布を用いて資産配分を決定することによって、収益率分布をヒストリカルデータから推定する場合と比べて優れたパフォーマンスの実現が期待される。本研究では、インプライド分布を用いた多期間最適資産配分モデルを構築する。ヒストリカル分布のみを用いたモデルと運用パフォーマンスに関するバックテストの結果を比較し、インプライド分布を用いたモデルの有用性を検証する。検証に用いたデータ期間において、パフォーマンス評価尺度として用いる CVaR レシオはヒストリカル分布のみを用いた場合と比べて優れていた。さらに、インプライド分布の種類や推定手法、リスク調整の方法を変更しても同様の結果が得られた。

## 1 研究の背景と目的

多くのバランス型の投資信託や年金基金などでは、ポートフォリオ理論に基づいた最適化モデルを用いて資産配分を定量的に決定している。その際に用いる資産収益率のパラメータは資産配分および運用パフォーマンスに大きな影響を与えるため、収益率分布の推定は重要な問題である。本研究ではオプション価格から導出される原資産価格のインプライド分布によって収益率分布を推定する。市場参加者が将来の価格変動に対する予測能力を持つならば、インプライド分布を用いた最適資産配分の運用パフォーマンスは、収益率をヒストリカルデータから推定した場合に比べて優位になることが期待できる。近年になり、インプライド分布はオプションの市場参加者による将来の原資産価格に対する予測分布であるという観点から、最適資産配分問題への適用がなされるようになった。

インプライド分布を利用した最適資産配分モデルに関する研究として、Ait-Sahalia and Brandt[1]、Kostakis *et al.*[13]、DeMiguel *et al.*[9]が挙げられる。Ait-Sahalia and Brandt[1]はS&P500オプションと米国債先物オプションからインプライド状態価格分布を導出し、コンピュータを用いて分布の依存関係を記述している。連続時間における最適消費戦略問題の解をマルチンゲール・アプローチを用いて解析的に求めている。Kostakis *et al.*[13]はS&P500オプションからインプライドリスク中立分布を推定し、リスク調整を行った上で株式と無リスク資産の2資産を対象とする1期間の最適資産配分問題を解いている。効用関数を4次のオーダーまで展開して最適化を行うことによりインプライド分布の高次モーメントまで考慮した配分を実現している。また、運用パフォーマンスをアウトサンプルで検証している。DeMiguel *et al.*[9]では、500以上の米国株式個別銘柄を対象とし、それらのオプションからのインプライド情報を用いて1期間のポートフォリオ最適化問題を解き、パフォーマンスをアウトサンプルで検証している。ただし、インプライド分布そのものを用いているのではなく、インプライドボラティリティやインプライド相関を利用した平均・分散モデルによる最適化を行っている。それに対し、本研究ではこれらの研究とは異なる以下の3点を特徴としてモデルを構築し、分析することを目的とする。

- (1) コンピュータを利用して、インプライド分布とヒストリカル分布を混在させた多期間・多資産の収益率分布を推定し、枇々木 [16] が提唱している多期間最適化手法を用いて、最適資産配分モデルを構築する。
- (2) 4つのリスク資産(内株、内債、外株、外債)を対象とした多期間最適資産配分問題に対してモデルを適用し運用パフォーマンスを検証する。具体的には、内株の価格分布として日経225オプションのインプライド分布を用いた場合とヒストリカル分布を用いた場合(他の資産はヒストリカル分布)を比べて運用パフォーマンスが向上するかを検証する。また、それがインプライド分布の選択や推定に用いるウィンドウ期間数に対する頑健性を検証する。

\*ニッセイアセットマネジメント株式会社 投資管理部 運用リスク管理室, Email:y2\_kimura@nam.co.jp (本研究は慶應義塾大学大学院理工学研究科における修士論文作成の際に行われたものである。ここで示された内容は、ニッセイアセットマネジメントとしての見解をいかなる意味でも表さない。)

†慶應義塾大学 理工学部 管理工学科, Email:hibiki@ae.keio.ac.jp

(3) インプライド分布に対するリスク調整がパフォーマンスに与える影響を検証する。インプライド分布を資産配分問題に適用するためには、市場参加者のリスク選好度を考慮して、リスク中立確率分布を実確率分布へと調整する必要がある。この方法は幾つか提案されているが、これらの運用パフォーマンスに与える影響に関しては現時点で検証されていない。多期間モデルへ適用できるようにリスク調整方法を拡張し、各方法を比較する。

本論文の構成は以下の通りである。2 節では本研究における分布の推定法を説明する。3 節では最適化モデルに関する方法論を述べる。4 節では数値分析の内容と分析結果を示し、考察を行う。5 節では結論と今後の課題を述べる。

## 2 方法論

### 2.1 モデルの枠組み

インプライド分布はオプションの満期時点での確率分布であるため、満期日が異なる場合には分布の修正が必要である。そのため、本研究ではこの点の影響を避けるために1つのリスク資産がインプライド分布に従う場合のモデルを構築する。具体的には内株の収益率分布として日経225オプションのインプライド分布を推定する。国内の投資家にとって重要な資産クラスである日本株に対して、インプライド分布とヒストリカル分布を比較・検証し、収益率予測の精度を高めることは重要と考えられるからである。他のリスク資産(内債、外株、外債)の収益率分布はヒストリカルデータを用いて推定する。

オプション価格はリスク中立確率のもとでのペイオフの期待値であるので、インプライド分布はリスク中立分布(Risk Neutral Distribution : RND)である。そのため、インプライド分布を最適資産配分問題に利用するためにリスク中立確率から実確率へと変換する(リスク調整を行う)。また、リスク資産の収益率間の依存関係を表現する関数としてコピュラを用いる。そして、インプライド分布とヒストリカル分布を混在させて資産収益率の同時分布を推定する。推定した分布に従う価格変動パスをモンテカルロシミュレーションを用いて乱数を発生させ、そのパス集合を用いて最適化問題を解く。以下では具体的にその手順を説明する。

### 2.2 インプライドリスク中立分布の推定

行使価格  $K$  のヨーロピアンタイプのコールオプション価格  $C(K)$  はインプライドリスク中立密度関数  $q(x)$  を用いて以下のように記述できる。

$$C(K) = \int_0^{\infty} \max(x - K, 0)q(x)dx \quad (1)$$

ここで、(1)式を  $K$  について偏微分すると(2)式が導出できる(Breeden and Litzenberger[7])。

$$q(x) = \frac{\partial^2 C(K)}{\partial K^2} \Big|_{K=x} \quad (2)$$

これを利用して、オプションの市場価格から対応する原資産価格のインプライドRNDを推定する。しかし、市場で売買されるオプションの行使価格数は有限なので、何らかの方法を用いて分布を補完する必要がある。インプライド分布の補完方法を大きく分けると、何らかの確率分布を仮定するパラメトリックな方法と確率分布を想定しないノンパラメトリックな方法がある。本研究ではヒストリカル分布とインプライド分布の推定に用いる分布形を統一させてモデル選択リスクを排除して比較するため、分布のパラメータをオプションの市場価格からキャリブレートするパラメトリックな方法を用いて分析を行う。

既存研究において多くの手法が提案されている。本研究ではインプライドRNDの推定およびリスク調整の容易さといった観点から、Melick and Thomas[15]が提案した混合対数正規分布(Double Log Normal distribution)を仮定した手法(以降、DLN法と呼ぶ)とAnagnou *et al.*[3]で用いられている第二種の一般化ベータ分布(Generalized Beta distribution 2nd kind)を仮定する手法(以降、GB2法と呼ぶ)を採用する。各手法に用いる分布を以下に簡単に示す。

#### (1) DLN法

混合対数正規分布は対数正規分布  $q_{LN}(x)$  を用いて(3)式のように記述される。

$$q_{DLN}(x) = wq_{LN}(x|S_1, \sigma_1\sqrt{\tau}) + (1-w)q_{LN}(x|S_2, \sigma_2\sqrt{\tau}) \quad (3)$$

$S_i, \sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ) はそれぞれ対数正規分布のロケーションとスケール、 $\tau$  は満期までの期間を表すパラメータである。また、 $w$  は混合分布の重みを意味するパラメータで  $0 \leq w \leq 1$  である。

## (2) GB2法

第二種の一般化 $\beta$ 分布の確率密度関数は(4)式で記述される。

$$q_{GB2}(x|a, b, p, q) = \frac{ax^{ap-1}}{b^{ap}B(p, q)\{1 + (x/b)^a\}^{(p+q)}}, \quad x > 0 \quad (4)$$

ここで、 $B(p, q)$  はベータ関数で、パラメータ  $b$  はスケール、 $a$  は分布の形状を表すパラメータである。

どちらの手法も仮定された分布のもとでのオプション価格と観測されたオプション価格のクロスセクションデータの間の重み付き誤差二乗和が最小となるパラメータを求める。推定には流動性を考慮して、アウトオブザマネー (OTM) のオプションのクロスセクションデータのみを用いる。OTM のオプション価格が  $N$  個得られるとすると、モデルのパラメータ  $\theta$  での重み付き誤差二乗和  $\Psi(\theta)$  は(5)式のように記述できる。

$$\Psi(\theta) = \sum_{i=1}^N \psi_i (V_{model}(K_i, \theta) - V_{mkt}(K_i))^2 \quad (5)$$

ここで  $V_{model}(K_i, \theta)$  は行使価格  $K_i$  におけるモデルパラメータ  $\theta$  から導出した OTM のオプション価格、 $V_{mkt}(K_i)$  は市場で観測された OTM のオプション価格である。本研究では、誤差に対する重みを  $\psi_i = 1/N$  として、 $\Psi(\theta)$  を最小とする  $\theta^*$  を求める最適化問題を解き、インプライド RND を推定する。

## 2.3 インプライドリスク中立分布に対するリスク調整

完備な市場の下では、市場参加者の効用関数  $U(x)$ 、インプライド RND  $q(x)$ 、実確率分布  $p(x)$  の間には(6)式が成立する。

$$p(x) = \frac{q(x)/U'(x)}{\int_0^\infty q(y)/U'(y)dy} \quad (6)$$

Liu *et al.*[14] は DLN 法と GB2 法で求めたインプライド RND に対し、べき型効用関数の相対リスク回避係数 (RRA)  $\gamma^*$  を推定することによって、最適なリスク調整分布を(6)式から解析的な形で導出している。インプライド RND と原資産価格の系列をそれぞれ、 $\{q_t(x; \theta_t^*)\}$ ,  $\{S_{t+\tau}\}$  ( $t = 1, \dots, L$ ) とおく。 $t$  は時点であり、 $L$  はサンプルのウィンドウ期間数を表す。最適な  $\gamma^*$  を求める問題は評価関数  $f(\gamma; \{q_t(x; \theta_t^*)\}, \{S_{t+\tau}\})$  を最大化もしくは最小化することで得られる。評価関数としてリスク調整分布の尤度を最大化する最尤推定法と尤度比 LR3 統計量を最小化する Berkowitz 検定の統計量 [4] を利用する推定法を以下に示す。

### 2.3.1 最尤推定法

Liu *et al.*[14] は以下の定式化に対し、最尤推定法を用いて  $\gamma$  を推定し、リスク調整を行っている。

$$\text{最大化} \quad f(\gamma; \{q_t(x; \theta_t^*)\}, \{S_{t+\tau}\}) = \sum_{t=1}^L \log(p_t(S_{t+\tau}; \theta_t^*, \gamma)) \quad (7)$$

$$\text{制約条件} \quad \Xi(\gamma, \theta_t^*) \geq 0, \quad \Upsilon(\gamma, \theta_t^*) > 0 \quad (8)$$

ここで  $\{p_t(S_{t+\tau}; \theta_t^*, \gamma)\}$  は  $t$  時点のリスク調整した分布の系列、 $\Xi(\gamma, \theta_t^*)$ ,  $\Upsilon(\gamma, \theta_t^*)$  は  $\gamma$  の取りうる値に関する制約式を表す。

### 2.3.2 Berkowitz 検定の統計量を利用した推定

Bliss and Panigirtzoglou[6]、Kang and Kim[12]、Kostakis *et al.*[13] は将来の予測能力に関する検定である Berkowitz 検定の統計量を利用してリスク調整を行っている。Berkowitz 検定では実現値を用いて確率分布の変換を行った系列に対して検定を行う。 $\gamma$  でリスク調整された満期  $\tau$  の分布関数の系列を  $\{P_{t,\tau}(x; \theta_t^*, \gamma)\}$  とすると、原資産価格が  $\{S_{t+\tau}\}$  以下になる実現確率に対して(9)式を用いた変換を行う。

$$z_t = \Phi^{-1}\left(P_{t,\tau}(S_{t+\tau}; \theta_t^*, \gamma)\right) \quad (9)$$

ここで、 $\Phi^{-1}$  は標準正規分布の分布関数の逆関数である。この変換した系列  $\{z_t\}$  に対して AR(1) の自己回帰モデルを当てはめると

$$z_{t+1} = az_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(\mu, V) \quad (10)$$

となる。パラメータを  $\boldsymbol{\eta} = (a, \mu, V)$  とおくと、厳密最尤推定量  $\boldsymbol{\eta}_\gamma^*$  が  $\boldsymbol{\eta}_0 = (0, 0, 1)$  であるかの検定を行う。  $a = 0$  により予測の間の時系列相関の有無を検定し、  $\mu = 0, V = 1$  により予測に偏りが無いかの検定を行う。帰無仮説  $\boldsymbol{\eta}_0 = (0, 0, 1)$  が成立するとき、予測により生じた系列には偏りと時系列相関が存在しないため、検定対象の予測モデルは予測可能な成分を全て反映しているとみなすことができる。

この帰無仮説のもとで、検定に用いる尤度比を表す統計量  $LR3$  は自由度3の  $\chi^2$  分布に従い、以下のよう  $\gamma$  の関数として定義される。

$$LR3(\gamma) \equiv -2 \left( l_{AR(1)}(z_t; \boldsymbol{\eta}_0) - l_{AR(1)}(z_t; \boldsymbol{\eta}_\gamma^*) \right) \quad (11)$$

ここで、  $l_{AR(1)}(\cdot)$  はAR(1)モデルの厳密対数尤度関数である。したがって、最適な  $\gamma$  を求める問題は、Berkowitz検定の  $p$  値を最大化、つまりLR3統計量を最小化する問題に帰着される。

$$\text{最小化 } LR3(\gamma) \quad (12)$$

$$\text{制約条件 } \Xi(\gamma, \boldsymbol{\theta}_t^*) \geq 0, \quad \Upsilon(\gamma, \boldsymbol{\theta}_t^*) > 0 \quad (13)$$

### 2.3.3 データに重なりがある場合のBerkowitz検定

月次データを用いて満期1カ月を超えるインプライド分布に対してリスク調整を行う場合、データ間で予想している期間に重なりが生じる。そのため、累積実現確率を変換した系列である  $\{z_t\}$  にデータの重なり由来する正の相関が生じてしまい、Berkowitz検定の帰無仮説が棄却されやすくなる (Bliss and Panigirtzoglou[6])。この重なりによる正の相関はインプライド分布の予測能力自体とは無関係であるが、Berkowitz検定に基づくリスク調整では、予測期間の重なりによる相関と分布の予測に関連する相関を分離できない。ゆえに、満期1カ月を超える場合には従来の方法を直接適用することはできない。

紙面の都合で結果は省略するが、1993年1月～2008年12月の月次データを用いてウィンドウ期間4年でBerkowitz検定を利用し、リスク調整を行った場合の  $p$  値をみると、  $\tau = 1$  カ月の場合には有意水準10%において全てのケースで仮説は棄却されないが、  $\tau = 2, 3$  カ月の場合では  $p$  値が非常に低く、ほとんどの場合において有意水準10%で帰無仮説が棄却される。しかし、  $p$  値が低くなる理由が「予測能力を持たないから」か「データの重なりがあるから」かを判別できないため、推定された  $\gamma^*$  がリスク回避度を適切に表していると評価することはできない。また、ウィンドウ期間数を変えても同様の結果が得られた。

本研究では重なりによる影響を排除するために、以下のようにBerkowitz検定を拡張する手法を提案する。満期が  $M$  カ月 ( $M \geq 2$ ) のオプション価格の月次データから推定したインプライド分布の系列に対してリスク調整を行う。ここでは、ある自然数  $N$  に対して  $L = MN$  を満たす  $L$  個の実現値系列  $v_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) を検定に用いるサンプルとする。このサンプルにおいて、ある時点のデータを基準にすると、そこから  $M-1$  個先の系列まではデータの予想期間に重なりが生じていることがわかる。そこで、以下のように  $v_l$  を  $M$  個の部分系列  $\mathbf{w}_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) に分割する。ここで  $\top$  は転置を表す。

$$\mathbf{w}_m = (v_m, v_{M+m}, \dots, v_{(N-1)M+m})^\top \quad (14)$$

これらの部分系列  $\mathbf{w}_m$  に対して同時にBerkowitz検定を実行することを目的にモデル化を行う。各部分系列  $\mathbf{w}_m$  の  $n$  番目の要素をまとめたベクトルを  $\mathbf{z}_n$  とおく。このベクトル系列  $\mathbf{z}_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) に対して以下の1次の自己回帰モデルをあてはめる。

$$\mathbf{z}_n = a\mathbf{z}_{n-1} + \mu\mathbf{1} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \sim N(0, V\Omega) \quad (15)$$

ここで、  $V$  は分散を意味するパラメータ、  $\Omega$  は部分系列  $\mathbf{w}_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) の相関係数行列、  $\mathbf{1}$  はすべての要素が1のベクトルである。このモデルパラメータの厳密最尤推定量  $\boldsymbol{\eta}_\gamma^*$  を用いて、拡張されたBerkowitz検定 (以降、拡張Berkowitz検定と呼ぶ) の統計量は以下のように定義される。

$$LR3'(\gamma) \equiv -2 \left( l(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\eta}_0) - l(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\eta}_\gamma^*) \right), \quad \boldsymbol{\eta}_0 = (0, 0, 1) \quad (16)$$

ここで、  $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N)$  である。パラメータの自由度は3であるので、統計量  $LR3'$  は自由度3の  $\chi^2$  分布に従う。ゆえに満期までの期間が1カ月を超えてデータに重なりが生じる場合に  $\gamma$  を求める問題は(13)式の制約条件のもとで  $LR3'(\gamma)$  を最小化する問題として定式化される。

DLN法で求めたインプライドRNDに対して、拡張Berkowitz検定を利用してリスク調整をしたときの  $p$  値を図1に示す。有意水準を10%とすると、  $\tau = 2, 3$  カ月においても、ウィンドウ期間数によらず多くの場合で帰無仮説は棄却されない。この結果を従来の方法と比較すると、Berkowitz検定ではデータの重なりがゆえに検定が棄却されていたと判断できる。

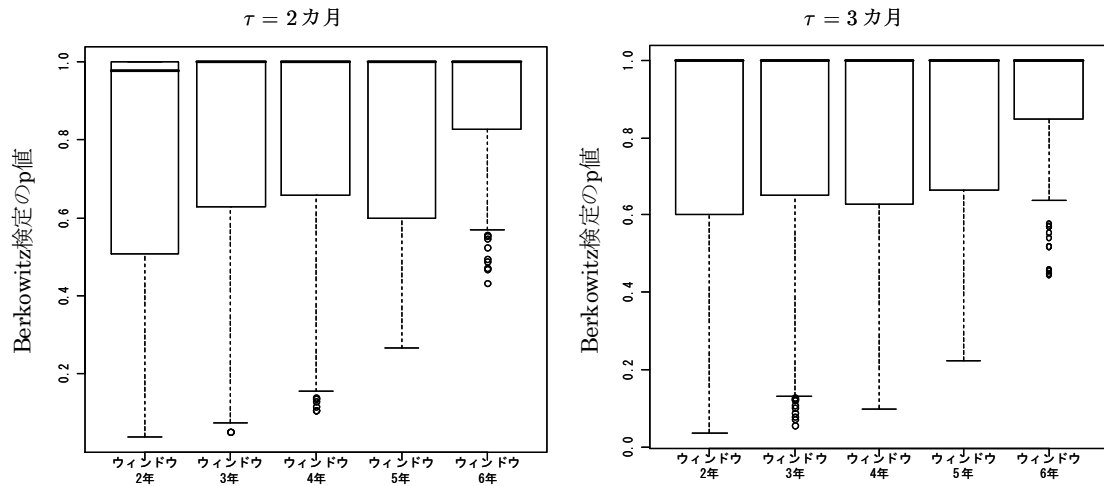


図 1: 拡張 Berkowitz 検定でのリスク調整結果: DLN 法

2種類のインプライドRNDに対して、 $\tau = 1$ カ月は Berkowitz 検定、 $\tau = 2, 3$ カ月は拡張 Berkowitz 検定を利用して問題を解いた。紙面の都合上、ウィンドウ期間が4年の場合の  $\gamma^*$  の推移のみを図 2に示す。満期時点によらずほぼ同水準の RRA の推移が得られている。他のウィンドウ期間でも同様である。市場参加者のリスク回避度は満期の長さには依存しないと考えるのは自然であり、拡張 Berkowitz 検定を利用することによって、Berkowitz 検定の場合と同様のリスク調整が実現されていると考えてよいだろう。

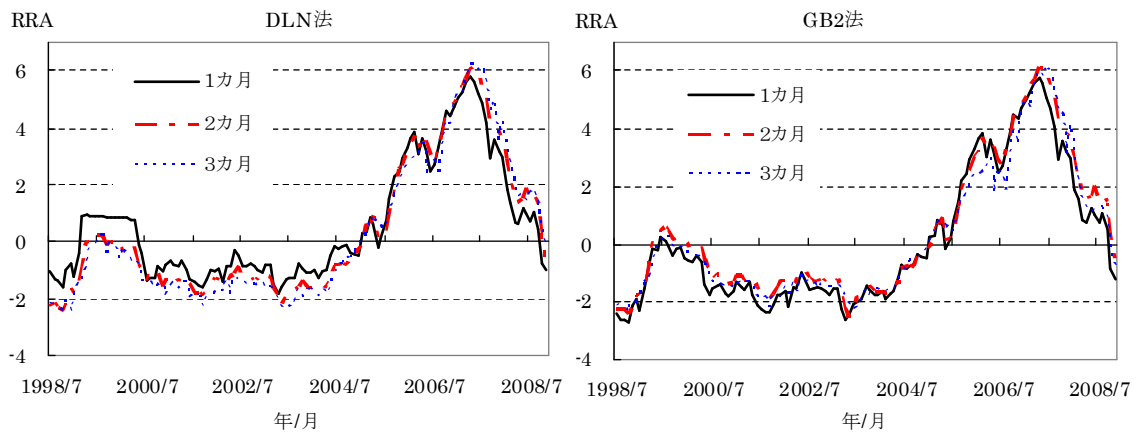


図 2: RRA( $\gamma$ )の推移: ウィンドウ期間4年

## 2.4 ヒストリカル分布の推定

本研究では、インプライド分布を推定しない資産クラスに対してはヒストリカルデータを用いて収益率分布の推定を行う。資産配分問題における投資対象である株式や為替において知られている性質として、リターンの非対称性・ファットテール性がある。これらの性質を再現でき、様々な確率分布の形状を表現できる GH 分布を用いて収益率の推定を行う。GH 分布は5つのパラメータ ( $\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu$ ) で記述できる。一変数の GH 分布の確率密度関数を (17) 式に示す。

$$p_{GH}(x|\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2} \left( \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right)^{\lambda-1/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda-1/2} \delta^\lambda K_\lambda \left( \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)} K_{\lambda-1/2} \left( \alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) \exp \{ \beta(x - \mu) \} \quad (17)$$

ここで、 $K_\lambda(\cdot)$  は指数  $\lambda$  を持つ第三種ベッセル関数である。 $\mu$  はロケーション、 $\delta$  はスケール、 $\beta$  は非対称性、 $\alpha, \lambda$  は分布の形状を記述するパラメータである。

資産の月次対数収益率をウィンドウ化して、GH、H、VG、NIG、 $t$  分布の5つの分布において非対称性パラメータ  $\beta$  を0と固定するか否かの10個に正規分布を加えて、合計11個の確率分布のパラメータを推定する。これらの中から、AICが最小となる分布を資産収益率の周辺分布として採用する。

ところで、4節の分析では、内株の分布としてインプライド分布を用いる場合とヒストリカル分布を用いる場合を比較する。その際に用いる内株のヒストリカル分布はGH分布ではなく、インプライド分布と同じ分布形である2成分の混合対数正規分布(DLN法)、もしくは一般化ベータ分布(GB2法)であり、それらに対するパラメータを最尤推定する。

## 2.5 コピュラの推定

コピュラは多変数(多次元)の分布関数とその周辺分布関数の関係を示す関数のことである。本研究ではインプライド分布とヒストリカル分布の依存関係を表現するために $t$ コピュラを用いる。 $t$ コピュラとは $t$ 分布を介して表現されるコピュラであり、 $n$ 変量の確率密度関数は

$$c_\nu(u_1, \dots, u_n; \Sigma, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^n \left(1 + \frac{1}{\nu} \omega^\top \Sigma^{-1} \omega\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\sqrt{|\Sigma|} \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right]^n \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\omega_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}\right.} \quad (18)$$

$$\omega^\top = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = (t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2), \dots, t_\nu^{-1}(u_n)) \quad (19)$$

と記述できる。ここで、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数、 $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )は $u_i \in [0, 1]$ なる確率変数である。 $\nu$ は $t$ 分布の自由度に相当し、 $\Sigma$ は相関行列を表すパラメータで各変数間の依存構造を表す。 $t$ コピュラは各確率変数ごとの依存関係を表現できる反面、変数が増えるにつれてパラメータ数が二乗のオーダーで増加してしまう。そこで、Demarta and McNeil[8]で用いられているノンパラメトリックなパラメータ推定法を利用する。この方法では一般の楕円コピュラの相関行列 $\Sigma$ をケンドールの $\tau$ を用いて(20)式で推定する。

$$\hat{\Sigma} = \sin \frac{\pi}{2} \tau \quad (20)$$

この推定量 $\hat{\Sigma}$ を用いて、残りのパラメータである自由度 $\nu$ を最尤推定する。この問題は以下の最適化問題として定式化される。

$$\text{最大化} \quad l(\nu) \equiv \sum_{t=1}^{L-T} \log \left( c_\nu(u_{1,t}, \dots, u_{nT,t}; \hat{\Sigma}, \nu) \right) \quad (21)$$

$$\text{制約条件} \quad \nu > 2 \quad (22)$$

## 3 多期間最適資産配分モデル

### 3.1 モデルの概要

本研究では、インプライド分布とヒストリカルデータから推定したGH分布に対してコピュラを用いて相関を考慮し、収益率分布を記述する。同時分布は非常に複雑な形の式となるため、モンテカルロシミュレーションを用いて収益率を発生し、枇々木[16]が提唱しているシミュレーション・ツリー混合型モデルを用いて資産配分を決定する。このモデルは、シミュレーションによる多期間・多資産の資産価格変動パスを記述して最適化を行うモデルである。各パスを複数のグループ(決定ノード)に分け、決定ノードに属するパスでは同一の意思決定を行うことにより、非予想条件を満たした上で将来に対する条件付意思決定を可能としている。本研究ではHibiki[10]を参考にノード分けを行う。

このモデルにおいて投資比率を決定変数とすると、モデルは大規模な非凸非線形計画問題として定式化されるため、問題を解くことは困難である。この問題を解決するために、Hibiki[11]は投資量関数を導入し、最適投資比率を求める反復アルゴリズムを提唱している。このアルゴリズムは大域的な最適性を保証しないが、線形計画問題として定式化できるので、大規模な問題でも比較的高速に解くことができる。

### 3.2 目的関数

本研究ではCVaRに基づいたポートフォリオの効率性を表すCVaRレシオ(Biglova *et al.*[5])を評価指標とし、モデルの目的関数に利用する。 $r_f$ を無リスク金利とすると、多期間モデルの初期時点から計画最終時点 $T$ までの全期間を1期間とみなした収益率 $r_T$ (対数収益率ではない)のCVaRレシオは

$$\frac{E[r_T] - r_f}{CVaR(r_T - r_f)} = \frac{E[W_T] - W_{rf}}{W_0} \frac{W_0}{CVaR(W_T - W_{rf})} = \frac{E[W_T] - W_{rf}}{CVaR(W_T - W_{rf})} \quad (23)$$

と資産額を用いて記述できる。ここで、 $W_0$ は初期時点の保有資産額、 $W_T$ は最終時点の資産額、 $W_{rf} = W_0 e^{r_f T}$ である。CVaR レシオはCVaRを分母とする分数式であるが、変数変換を行うことによって、線形計画問題として記述することができる。以下では具体的な定式化について記述する。

### 3.2.1 モデルの定式化

#### (1) 添字と集合

$i$  : パスを表す添字 ( $i = 1, \dots, I$ )。  $I$  はパスの本数を表す。

$j$  : リスク資産を表す添字 ( $j = 1, \dots, J$ )。  $J$  はリスク資産数を表す。

$t$  : 時点を表す添字 ( $t = 1, \dots, T$ )。  $T$  は計画期間数を表す。

$s$  : 決定ノードを表す添字

$s^-$  :  $s$ につながる1時点前の決定ノードを表す添字

$V_t^s$  :  $t$  時点のノード  $s$  に属するパスの集合

$S_t$  :  $t$  時点の決定ノード  $s$  の集合

#### (2) パラメータ

$\rho_{j0}$  : 0時点のリスク資産  $j$  の価格 ( $j = 1, \dots, J$ )

$\rho_{jt}^{(i)}$  :  $t$  時点のパス  $i$  のリスク資産  $j$  の価格 ( $j = 1, \dots, J; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$ )

$\beta$  : CVaRの確率水準 (ex. 80%)

#### (3) 決定変数

$z'_{j0}$  : 0時点のリスク資産  $j$  の投資量 ( $j = 1, \dots, J$ )

$z'_{jt}{}^s$  :  $t$  時点のノード  $s$  における投資量のベースとなる変数 ( $j = 1, \dots, J; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t$ )

$v_t^{(i)}$  :  $t$  時点のパス  $i$  の無リスク金利での運用額 ( $t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I$ )

$q^{(i)}$  : 計画最終時点のパス  $i$  の富がVaRを下回る偏差(中間変数) ( $i = 1, \dots, I$ )

$V'_\beta$  : 確率水準  $\beta$  のバリュエ・アット・リスク ( $\beta$ -VaR)

$u$  : 変数変換のために用いる中間変数

#### (4) 定式化

目的関数のCVaR レシオをそのまま用いると分数計画問題となるが、

$$uz'_{j0} = z_{j0}, uz'_{jt}{}^s = z_{jt}{}^s, uv_t^{(i)} = v_t^{(i)}, uq^{(i)} = q^{(i)}, uV'_\beta = V_\beta \quad (24)$$

と変数変換することにより、以下に示すように線形計画問題として記述できる。

$$\text{最小化} \quad V_\beta + \frac{1}{(1-\beta)I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (25)$$

$$\text{制約式} \quad \sum_{j=1}^J \rho_{j0} z_{j0} = uW_0 \quad (26)$$

$$\left( W_1^{(i)} = \right) \quad \sum_{j=1}^J \rho_{j1}^{(i)} h^{(i)}(z_{j1}^s) + v_1^{(i)} = \sum_{j=1}^J \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} \quad (s \in S_1; i \in V_1^s) \quad (27)$$

$$\left( W_t^{(i)} = \right) \quad \sum_{j=1}^J \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{jt}^s) + v_t^{(i)} = \sum_{j=1}^J \rho_{jt}^{(i)} h^{(i)}(z_{j,t-1}^{s^-}) + (1+r_f)v_{t-1}^{(i)} \quad (t = 2, \dots, T-1; s \in S_t; i \in V_t^s) \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^J \rho_{jT}^{(i)} h^{(i)}(z_{jT}^{s^-}) + (1+r_f)v_{T-1}^{(i)} - uW_{rf} + V_\beta + q^{(i)} \geq 0 \quad (s^- \in S_{T-1}; i \in V_{T-1}^{s^-}) \quad (29)$$

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left\{ \sum_{j=1}^J \rho_{jT}^{(i)} h^{(i)}(z_{jT}^{s^-}) + (1+r_f)v_{T-1}^{(i)} \right\} - uW_{rf} = 1 \quad (30)$$

$$z_{j0} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, J); \quad z_{jt}^s \geq 0 \quad (j = 1, \dots, J; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (31)$$

$$\sum_{i \in V_t^s} v_t^{(i)} = 0 \quad (t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (32)$$

$$q^{(i)} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, I) \quad (33)$$

(31)式はリスク資産の非負制約式、(32)式は平均投資比率としてはフルインベストメント(無リスク資産への平均投資額は0)を表す制約式である。 $h^{(i)}(z_{j,t}^s)$ は投資量関数を表し、決定変数 $z_{j,t}^s$ によってパス*i*における資産の投資量を表現する関数である。投資量関数を $h^{(i)}(z_{j,t}^s) = \left(\frac{W_t^{(i)}}{\rho_{j,t}^{(i)}}\right) z_{j,t}^s$ とする投資比率決定モデルの場合、(32)式によって、どのパスにおいても無リスク資産への投資額 $v_t^{(i)}$ はほぼ0となり、(32)式は平均的にではなくリスク資産へのフルインベストメントを行うための制約式を示すことになる。また、実際の投資行動を表す最適解を示すためには、(24)式に基づいて再度変数変換を行う必要がある。

## 4 数値分析

### 4.1 データ

数値分析に用いたデータは以下の通りである。

#### 投資対象資産の価格データ(月次)

- 内株：日経平均株価 終値
- 内債：Citigroup JP GBI
- 外株：S&P500 終値 円ベース
- 外債：Citigroup US GBI 終値 円ベース

データ期間は、1993年1月から2008年12月までである。内株のインプライド分布は日経225オプションの満期時点の日経平均株価に対する分布であるため、資産配分のリバランス時点も日経225オプションの満期日とする。内株以外の他の資産価格も同じ日(月の第二金曜日)のものを利用する。

**オプション価格データ** 大阪証券取引所で取引されている日経225オプションの1993年1月から2008年12月までの日次データ(終値)を用いる。継続的に存在している直近から3カ月前までの満期のデータを用いる。流動性を考慮して、OTMのオプション価格のみを用いてインプライド分布を推定する。本研究では簡単のため、配当のない株式オプションとしてインプライド分布のキャリブレーションを行う。

**オプション関連データ** 金利はオプション価格の評価、最適化モデルにおける無リスク収益率の計算、およびバックテストにおける無リスク金利からの超過リターン計算に用いられる。金利は円LIBOR一カ月物の日次データを利用する。データの期間は1991年1月から2008年12月末日までである。

### 4.2 分析方法

**設定条件** 数値分析における最適化モデルの設定は以下の通りである。

- CVaRの確率水準： $\beta = 80\%$
- 計画期間とリバランス期間：月次で3カ月(3期間)
- 決定ノードの構造：ツリー型で、1時点は分岐、2時点でも2分岐(計4分岐)
- 売買コスト：無し

**比較する投資戦略** 以下に示す7種類の運用パフォーマンスを比較する。

- 内株にインプライド分布を用いたモデルから得られた投資戦略(4種類)
  - パラメータ推定法(2種類：DLN法、GB2法) × リスク調整法(2種類：最尤推定、Berkowitz検定)
- 内株にヒストリカル分布を用いたモデルから得られた投資戦略(2種類：DLN法、GB2法)
- 均等リバランス戦略

内株以外の分布はヒストリカル分布(GH分布)を用いるので、それらの推定法は共通である。ただし、ヒストリカル分布のみの場合とインプライド分布を含む場合ではコンピュータの推定法が異なる。



**運用パフォーマンスの評価** 7種類の投資戦略に対し、サンプルデータ期間の最終時点である2008年12月までアウトサンプルでバックテストを行い、運用パフォーマンスの評価を行う。表1に評価期間を示す<sup>1</sup>。DLN法とGB2法のバックテスト期間が異なるため、均等リバランス戦略においては両方の期間に対してバックテストを行う。ウィンドウ期間数によって期間は異なるが、以降では総称して、DLN法のバックテスト期間を期間D、GB2法のバックテスト期間を期間Gと呼ぶ。

表1: バックテスト期間

ウィンドウ 期間	DLN法(期間D)			GB2法(期間G)		
	開始時点	終了時点	データ数	開始時点	終了時点	データ数
2年	1996/07/12	2008/12/12	149			
3年	1997/07/11	2008/12/12	137	2000/06/09	2008/12/12	102
4年	1998/07/10	2008/12/12	125	2000/06/09	2008/12/12	102
5年	1999/07/09	2008/12/12	113	2000/06/09	2008/12/12	102
6年	2000/07/14	2008/12/12	101	2000/07/14	2008/12/12	101

**評価尺度** それぞれの投資戦略での配分を用いて運用を行った際のポートフォリオの実現リターン $r'_{p,t}$ に対して様々な評価尺度を用いて比較を行う。実現リターンの平均や標準偏差に加えて、実現リターンのシャープレシオ、CVaRレシオの大小を比較することでパフォーマンスの優劣を検証する。

実現リターンに対する $\beta$ -CVaRは

$$\frac{\sum_{t=1}^N r'_{p,t} \mathbf{1}\{r'_{p,t} < \text{VaR}_{\beta,p}(r'_{p,t})\}}{\sum_{t=1}^N \mathbf{1}\{r'_{p,t} < \text{VaR}_{\beta,p}(r'_{p,t})\}} \quad (34)$$

である。ここで、 $N$ は実現リターンの個数、 $\text{VaR}_{\beta,p}(r'_{p,t})$ は $r'_{p,t}$ の実現 $\beta$ -VaRである。実現リターンに対する $\beta$ -CVaRレシオは、無リスク金利からの実現超過リターンと実現 $\beta$ -CVaRとの比で求める。

## 4.3 分析結果

### 4.3.1 運用パフォーマンス(実現リターン)

多期間モデルの実現リターンの統計量(平均、標準偏差、シャープレシオ、CVaRレシオ)を表2に示す。

表2: リターンの統計量

ウィンドウ期間		平均					標準偏差				
		2年	3年	4年	5年	6年	2年	3年	4年	5年	6年
DLN	最尤推定	0.26%	0.07%	-0.05%	-0.03%	0.05%	1.95%	1.67%	1.58%	1.10%	0.96%
	Berkowitz検定	0.29%	0.07%	-0.03%	-0.02%	0.03%	1.92%	1.66%	1.49%	1.05%	0.96%
	ヒストリカル	0.26%	0.05%	-0.05%	-0.11%	-0.01%	2.09%	1.90%	1.57%	1.46%	1.14%
均等リバランス(期間D)		0.02%	-0.07%	-0.20%	-0.23%	-0.22%	3.21%	3.24%	3.31%	3.05%	3.15%
GB2	最尤推定		0.05%	0.01%	-0.03%	0.05%		1.25%	1.32%	1.30%	0.99%
	Berkowitz検定		0.04%	0.02%	-0.02%	0.05%		1.26%	1.32%	1.27%	0.99%
	ヒストリカル		0.02%	-0.03%	-0.09%	-0.02%		1.25%	1.32%	1.44%	1.11%
均等リバランス(期間G)			-0.20%	-0.20%	-0.20%	-0.22%		3.14%	3.14%	3.14%	3.15%
ウィンドウ期間		シャープレシオ					CVaRレシオ				
		2年	3年	4年	5年	6年	2年	3年	4年	5年	6年
DLN	最尤推定	0.123	0.029	-0.044	-0.046	0.035	0.099	0.021	-0.030	-0.030	0.025
	Berkowitz検定	0.137	0.030	-0.035	-0.035	0.011	0.111	0.022	-0.024	-0.023	0.007
	ヒストリカル	0.111	0.016	-0.048	-0.092	-0.031	0.085	0.011	-0.032	-0.059	-0.021
均等リバランス(期間D)		-0.003	-0.029	-0.067	-0.083	-0.078	-0.002	-0.021	-0.046	-0.056	-0.052
GB2	最尤推定		0.027	-0.008	-0.038	0.028		0.019	-0.006	-0.026	0.020
	Berkowitz検定		0.018	-0.001	-0.030	0.028		0.012	-0.001	-0.020	0.019
	ヒストリカル		0.002	-0.035	-0.079	-0.032		0.001	-0.024	-0.051	-0.022
均等リバランス(期間G)			-0.071	-0.071	-0.071	-0.078		-0.049	-0.049	-0.049	-0.052

<sup>1</sup>GB2法ではリスク調整(RRAを推定すること)ができず、結果としてインプライド分布の価格バスを発生できない場合があった。このような失敗はウィンドウ期間が短い、もしくは株価の変動が激しく、結果的に $\gamma$ の変動も激しくなる場合に生じると考えられる。今回のケースでは、実施した全てのウィンドウ期間で2000年5月のRRAを推定できずにバスを発生できなかった。また、ウィンドウ2年の場合では2008年11月でもRRAを推定できなかったため、バックテストによる評価を行わない。

インプライド分布やヒストリカル分布を用いる多期間モデルで求められる投資戦略によるリターンは均等リバランス戦略に比べて平均は高く、標準偏差は低い。インプライド分布を用いたモデルとヒストリカル分布のみを用いたモデルを比べると、DLN法、GB2法合わせて9ケース中、6ケースでBerkowitz統計量を用いたモデル、3ケースで最尤推定を用いたモデルの平均リターンが最も高く、全ケースでインプライド分布を用いたモデルの平均リターンが高かった。標準偏差を比較すると、ヒストリカル分布のみを用いたモデルはインプライド分布を用いたモデルより多くのケースで大きくなっている。その結果、全ケースでインプライド分布を用いたモデルのシャープレシオやCVaRレシオも同様に高くなり、ヒストリカル分布のみを用いたモデルに比べて効率的で、運用パフォーマンスが向上することを確認できた。

#### 4.3.2 推定分布と投資比率の比較検証

前項の結果より、インプライド分布を利用した資産配分を行うことでポートフォリオのパフォーマンスが向上することを確認した。しかし、見かけ上のパフォーマンスがヒストリカル分布を用いたモデルに比べて優れていたとしても、予測方法が優れていることによって運用パフォーマンスの向上が実現されていないならば、インプライド分布の優位性を示すことはできない。そこで本項では、資産配分の差が生じる要因を考察することによって、それらがモデルの設定上意図された結果であるかどうかについて考察を行う。

インプライド分布を用いたモデルとヒストリカル分布のみを用いたモデルによる最適配分の違いを生じさせる要因は、分布の予測方法の違いの他にもコピュラの違いとモンテカルロシミュレーションによるサンプリングエラーの2つの要因が考えられる。以降では、DLN法でインプライド分布を推定し、Berkowitz統計量を用いる方法でリスク調整したモデルと、ヒストリカル分布のみを用いたモデルに対する最適配分、推定分布のモーメント統計量、運用結果の比較を行い、それらの関係性が直感的に妥当なものと言えるかについて考察する。紙面の都合上、ウィンドウ期間4年の場合の結果のみを記載する。

資産配分の推移を図3に示す。どちらのモデルにも共通している点は内債が配分の多くを占めていることである。これはモデルの目的関数として、運用の効率性を表す指標にCVaRレシオを採用したためであると思われる。バックテストの期間中に国内・国外の株式市場の暴落局面が含まれているため、これらの資産は内債と比較して相対的に非効率であるとみなされる。また、外貨建資産は円ベース換算したものを利用しており、為替リスクをヘッジしていない。ゆえに、外債も為替リスクの分だけ内債に対して非効率になる。これらの理由により内債が配分の多くを占めることになったと推察できる。

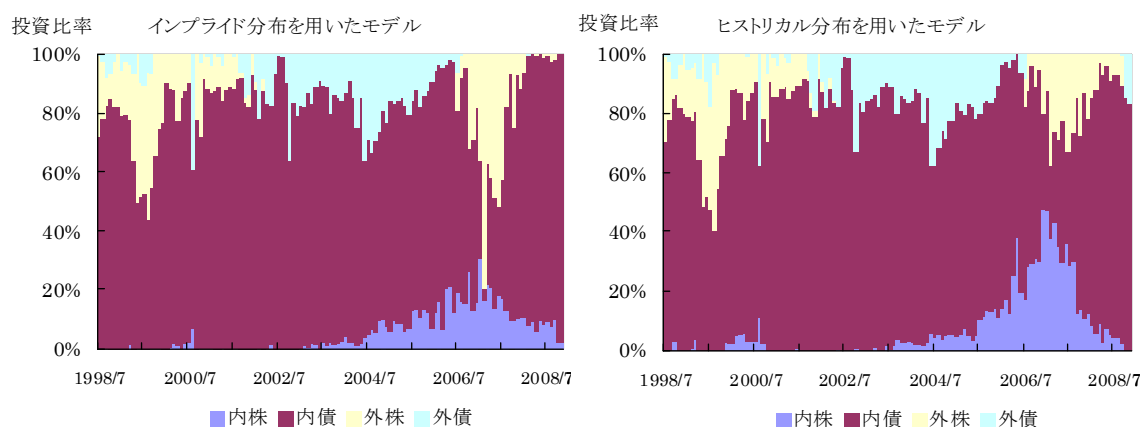


図 3: 配分の比較: ウィンドウ期間4年

モデルの違いによる資産配分の差異に注目するために、それらの差を図4に示す。この値が負になっているとき、インプライド分布を用いたモデルはヒストリカル分布のみを用いたモデルに対して、その資産をアンダーウェイトしていることを示す。2005年以前の配分はほとんど差がみられず、モデルの違いによる資産配分の差異は10%にも満たないことが分かる。特に2003年以前は二つのモデルの違いである内株に対する投資がほとんど行われていない。その理由はこの期間の内株は下落傾向にあり、ヒストリカル分布、インプライド分布のどちらの手法においても、推定される内株の収益率分布は他の資産と比較して相対的に悪いパフォーマンスとなっていたからである(空売りを禁止しているため、内株が配分の中に現れていない)。

しかし、2003年頃からの内株市場の上昇傾向を踏まえ、2005年以降では内株に対する配分が生じたためモデルの違いによる資産配分の違いが生じている。大まかな傾向としては、インプライド分布を用いたモデルはヒストリカル分布のみを用いたモデルと比べて内株をアンダーウェイトし、内債が外債を代わりに

組み入れていることが分かる。

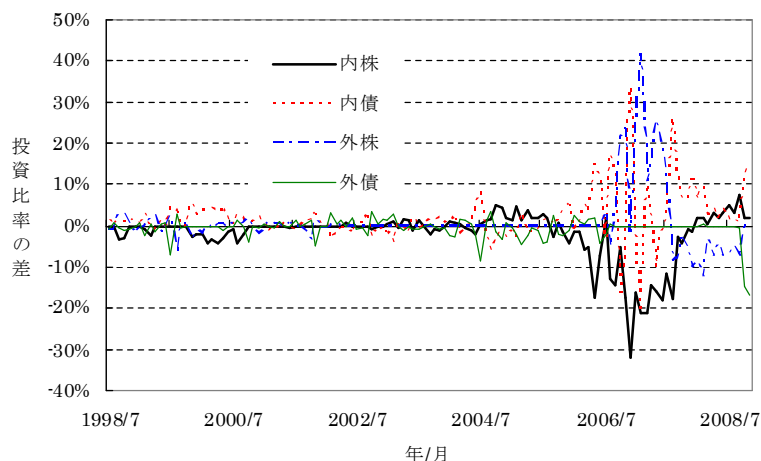


図 4: 配分の差: ウィンドウ期間 4年

これらのモデル間での配分の違いは、前述のどの要因によって生じているのだろうか。まず、内株への投資が行われていない期間(2003年以前)について考える。この期間では、二つのモデルで推定している内株の分布が異なっていたとしても、他の資産へと投資されるために内株の配分の違いとして現れない。そのため、モデルの違いによる配分の差はコピュラとサンプリングエラーが要因だと考えられるが、他の資産もあまり違いはないため、これらの要因の影響もそれほど大きくないと考えられる。一方、内株に投資が行われている期間(2003年以降)では要因を分離できないが、前述の考察により、コピュラとサンプリングエラーが配分に与える影響は、内株の分布の違いが与える影響に比べると小さいと考えられる。

次に、配分の差と実際のパフォーマンスとの関係を調べる。内株の投資比率に差がある(内株分布の違いが配分に影響を及ぼす)期間とない期間に分けて、2つのモデルの運用パフォーマンスの違いが期間によって異なるかを比較する。ヒストリカル分布のみを用いたモデルをベンチマークとして、情報レシオ(ベンチマークからの超過リターンに対するシャープレシオ)を評価の指標として用いる。情報レシオが高いほど、インプライド分布を用いたモデルがベンチマークに対して効率的に超過リターンを実現できることを意味する。DLN法によるモデルの情報レシオを表3に示す。

表 3: 情報レシオの比較 (×10<sup>-5</sup>)

内株投資比率差	ウィンドウ期間				
	2年	3年	4年	5年	6年
「あり」の期間	-0.0975	35.6	14.0	108.0	46.0
「なし」の期間	21.5	-98.2	-56.6	-64.6	-64.2

ウィンドウ期間2年以外の場合では、内株の投資比率に差がある期間の情報レシオが正で、そうでないときの情報レシオは負である。これは、内株分布にインプライド分布を利用することにより、ヒストリカル分布のみからの超過リターンが実現できていることを示している。パフォーマンスの観点からは直感的にも妥当な結果であるといえる。

## 5 結論

本研究では、インプライド分布を用いた多期間最適資産配分モデルを構築した。インプライド分布がポートフォリオに与える影響について検証するために、運用パフォーマンスのバックテストを行い、ヒストリカル分布のみを用いた場合と比較した。検証に用いたデータ期間において、ポートフォリオのシャープレシオはヒストリカル分布のみの場合と比較して有意に優れていた。かつインプライド分布の推定手法やリスク調整の方法を変えても同様の結果が得られた。本研究では、インプライド分布を用いることでポートフォリオの効率性が向上する可能性があることを示せたが、インプライド分布を推定するための適切な手法の選択については何も評価していない。これらについては今後の課題である。また、リスク調整に関して本研究ではべき型効用という一つの場合しか検証を行っていないため、得られた結果が効用関数の選択に対して

頑健性があるかは不明である。この点に関しては、Kang and Kim[12] でなされているように、様々な効用関数でのリスク調整を行った場合でのインプライド分布を用いて検証を行う必要があるだろう。

また、インプライド分布を用いる資産を増やす場合、満期が異なるオプションへの対処方法は重要な課題である。米国株式市場のインプライド分布の推定にS&P500 オプションを用いる場合、その満期日は月の第三金曜日であり、日本株の日経225 オプションとは異なる。したがって、任意の時点の資産価格に対するインプライド分布を推定することが必要となる。この問題に対する解決策の一つとしては、Alentorn and Markose[2] が提案しているインプライド分布の満期依存性を取り除く手法の応用が考えられるが、これも今後の課題である<sup>2</sup>。

## 参考文献

- [1] Ait-Sahalia, Y. and M. W. Brandt (2008), Consumption and Portfolio Choice with Option-Implied State Prices, *NBER Working Paper*.
- [2] Alentorn, A. and S. Markose (2006), Removing Maturity Effects of Implied Risk Neutral Densities and Related Statistics., *Economics Discussion Papers 609, University of Essex, Department of Economics*.
- [3] Anagnou, I., M. Bedendo, S. Hodges, and R. Tompkins (2005), Forecasting accuracy of implied and GARCH-based probability density functions, *Review of Futures Markets*, **11** pp.41-66.
- [4] Berkowitz, J. (2001), Testing Density Forecasts with Applications to Risk Management., *Journal of Business and Economic Statistics*, **19** pp.465 – 474.
- [5] Biglova, A., S. Ortobelli, S. Rachev, and S. Stoyanov (2004), Different approaches to risk estimation in portfolio theory, *The Journal of Portfolio Management*, **31**(1) pp.103-112.
- [6] Bliss, R. R. and N. Panigirtzoglou (2004), Option-Implied Risk Aversion Estimates., *Journal of Finance*, **59**(1) pp.407 – 446.
- [7] Breeden, D. T. and R. H. Litzenberger (1978), Prices of state-contingent claims implicit in option prices, *The Journal of Business*, **51**(4) pp.621-651.
- [8] Demarta, S. and A. McNeil (2005), The t copula and related copulas, *International Statistical Review*, **73**(1) pp.111-130.
- [9] DeMiguel, V., Y. Plyakha, R. Uppal, and G. Vilkov (2009), Improving Portfolio Selection Using Option-Implied Volatility and Skewness, *SSRN eLibrary*.
- [10] Hibiki, N. (2003), Hybrid Simulation/Tree Stochastic Optimization Model for Dynamic Asset Allocation, Chapter 14 in” Asset and Liability Management Tools: A Handbook for Best Practice” edited by B. Scherer, Risk Books, pp.269-294.
- [11] Hibiki, N.(2006), Multi-period Stochastic Optimization Models for Dynamic Asset Allocation, *Journal of Banking and Finance*, **30**(2), pp.365-390.
- [12] Kang, B. and T. Kim (2006). Option-implied risk preferences: an extension to wider classes of utility functions, *Journal of Financial Markets*, **9**(2) pp.180-198.
- [13] Kostakis, A., N. Panigirtzoglou, and G. Skiadopoulos (2009). Asset Allocation with Option-Implied Distributions: A Forward-Looking Approach, *SSRN eLibrary*.
- [14] Liu, X., M. B. Shackleton, S. J. Taylor, and X. Xu (2007). Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions, *Journal of Banking and Finance*, **31**(5) pp.1501 – 1520.
- [15] Melick, W. and C. Thomas (1997). Recovering an asset’s implied PDF from option prices: an application to crude oil during the Gulf crisis, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **32**(1) pp.91-115.
- [16] 枇々木規雄 (2001). 「最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル」. 高橋一編, ジャファイア・ジャーナル [2001] 金融工学の新展開 (東洋経済新報社, 2001), pp. 89-119.

---

<sup>2</sup>この問題を解決できれば、任意の時点でリバランスをする問題を解くことも可能になる。