

## 複数資産にインプライド分布を用いた最適資産配分モデル

霧生 拓也          枇々木 規雄  
慶應義塾大学

(受理 2014 年 3 月 3 日; 再受理 2014 年 10 月 3 日)

**和文概要** 近年, オプション価格から導出可能な原資産価格に対する確率分布であるインプライド分布を用いて資産配分を行うことが研究され, ヒストリカル分布を用いて資産配分を行う場合に比べて運用パフォーマンスが向上することが複数の先行研究により示されている. しかし, 実務において資産配分にインプライド分布を用いる上で重要な問題である, (1) インプライド分布のリスク調整が与える影響, (2) 満期依存性を解消し複数資産にインプライド分布を適用することの影響, の 2 点について先行研究では十分に検証されておらず, 未だ実務では伝統的なヒストリカル分布を用いた分布推定方法が主流となっている. そこで本研究ではこの 2 点の問題について検証を行う. バックテストの結果から, 既存のヒストリカルデータを用いた方法によるリスク調整は運用パフォーマンスを低下させてしまうことを明らかにした. また, 薄板スプライン平滑化を用いてインプライド分布の満期依存性を解消する方法を提案し, 既存の方法と運用パフォーマンスを比較した. さらに, インプライド分布への適用資産の組み合わせを変えて運用パフォーマンスを比較した. 満期依存性を解消し, 複数資産にインプライド分布を用いることで, 運用パフォーマンスが向上することを示した.

**キーワード:** 金融, 最適資産配分問題, 分布推定, インプライド分布

### 1. 研究の背景と目的

#### 1.1. インプライド分布を用いた最適資産配分とその問題点

投資信託や年金基金など多くの機関投資家が投資を行う場合, まず株式や債券といった資産クラスに対する投資比率を決定し, その後各資産クラスの中で個別資産に対する投資比率を決定する 2 段階のアプローチが取られることが多い. この 1 段階目の資産クラスに対して最適な組み合わせ比率を決定する問題を最適資産配分問題という. 資産配分を決定する際に想定する投資対象資産の収益率分布が資産配分や運用パフォーマンスに大きな影響を与えるため, 収益率分布の推定は最適資産配分問題を考える上で重要である. この分布の一般的な推定方法は分布の形状を仮定した上で過去の時系列データから分布のパラメータを推定する方法であり, 推定された分布をヒストリカル分布という. 一方で近年になり, 市場で取引されているオプションの価格情報から推定可能な分布である, インプライド分布を資産配分に用いることが研究されるようになってきた. インプライド分布を資産配分に用いることのメリットとして, インプライド分布はオプション市場参加者の将来の原資産価格に対する予想分布であるため将来の市場に関する見通しが分布に反映される, 意思決定時点において取引されているオプション価格を用いて分布を推定するため意思決定時点で利用可能なすべての情報が分布に反映される, といったことが挙げられる.

インプライド分布を用いて資産配分を行い運用パフォーマンスを検証している研究として, Kostakis *et al.*[11], 木村・枇々木 [10], Zdorovenin and Pezier[18] が挙げられる. Kostakis *et al.*[11] では株式オプションからインプライドリスク中立分布を推定し, リスク調整を行っ

た上で株式と無リスク資産の2資産を対象とする最適資産配分問題を解き、運用パフォーマンスを検証している。木村・枇々木[10]はコンピュータを用いることで資産ごとにインプライド分布とヒストリカル分布を混在させることを可能にした多期間の資産配分モデルを構築し、内株にインプライド分布を適用した場合の運用パフォーマンスを検証している。また、線形計画問題として定式化しているため、実務で用いるうえで必要であると考えられる制約式も柔軟に追加できるモデルとなっている。これら2つの研究では、インプライド分布を用いた場合の運用パフォーマンスがヒストリカル分布を用いた場合の運用パフォーマンスを上回ることが示されている。Zdorovenin and Pezier[18]でも株式にインプライド分布を適用し、無リスク資産を加えた2資産を投資対象として運用パフォーマンスを比較している。この研究では分析期間を2つに分けて検証を行っており、分析期間の前半においてはインプライド分布、後半においてはヒストリカル分布を用いた場合のパフォーマンスが優れるとしている。

このようにインプライド分布の利用により多くの場合に運用パフォーマンスが向上することが先行研究で示されている。しかし、実際に資産配分にインプライド分布を用いるにあたっては2つの問題が残されている。

1つ目の問題点はインプライド分布のリスク調整が資産配分に対してどのような影響を与えるのか十分に検証されていないことである。リスク調整とはオプション価格から直接推定できる分布はリスク中立世界における投資家の予測分布であるリスク中立分布(Risk Neutral Density; RND)であるため、この分布を投資家のリスク選好を考慮して調整することを指す。このリスク調整は直感的に理解し難い概念であることから、実務で用いるにあたってはリスク調整により具体的に分布がどのように調整され、運用パフォーマンスに対してどのような影響を与えるかについて明らかにする必要があると考えられる。

2つ目の問題点はインプライド分布を複数の資産に対して同時に適用した場合の運用パフォーマンスが検証されていないことである。インプライド分布はオプションの満期時点における原資産価格の予測分布であるため、分布を推定できるのはオプションの満期日までの分布に限られるという満期依存性の問題が存在する。このため、満期が異なる資産に同時にインプライド分布を適用できないことが原因で、複数資産に対してインプライド分布を適用して運用パフォーマンスを検証した先行研究は存在しない。Ait-Sahalia and Brandt[1]では、Practitioner Black-Scholes モデルを用いて満期依存性を解消することで株式と債券の2資産に対してインプライド分布を適用した場合の最適消費戦略の解を解析的に導出している。しかし、解の導出に主眼が置かれているため運用パフォーマンスの検証はされておらず、満期依存性を解消することや複数資産にインプライド分布を適用することの有効性については不明である。実務において投資対象資産を増やして問題を解く場合に1資産にしかインプライド分布が適用できないのではインプライド分布を用いる魅力は薄くなる。このことから、満期依存性を解消し複数資産にインプライド分布を適用して運用パフォーマンスを検証することは重要であると考えられる。

インプライド分布を資産配分に用いるにはこのような問題があるため、未だ実務ではヒストリカル分布の利用が主流になっている。

## 1.2. 本研究の目的と位置づけ

本研究ではこの現状を踏まえて、前に挙げた2つの問題について検証することを目的とする。具体的には伝統的4資産を対象とした最適資産配分問題において、リスク調整と満期依存性解消による複数資産へのインプライド分布の適用のそれぞれが運用パフォーマンスに与える影響を検証する。

また、インプライド分布はその性質上、その資産を原資産とするオプションが十分な流動性を持って取引されていないと推定することができない。よって、オルタナティブ資産などオプションが十分な流動性を持って取引されていない資産クラスに対してはヒストリカル分布を用いることになる。このため、インプライド分布とヒストリカル分布を資産ごとに混在させることは実務で用いる上で重要な要素である。このことを考慮し、本研究では木村・枇々木 [10] により提案されたコピュラを用いて同時分布を推定する方法を採用する。

図 1 に本研究の概要 (内株と外株にインプライド分布を用いる場合) を示し、表 1 に先行研究と本研究の違いをまとめた。

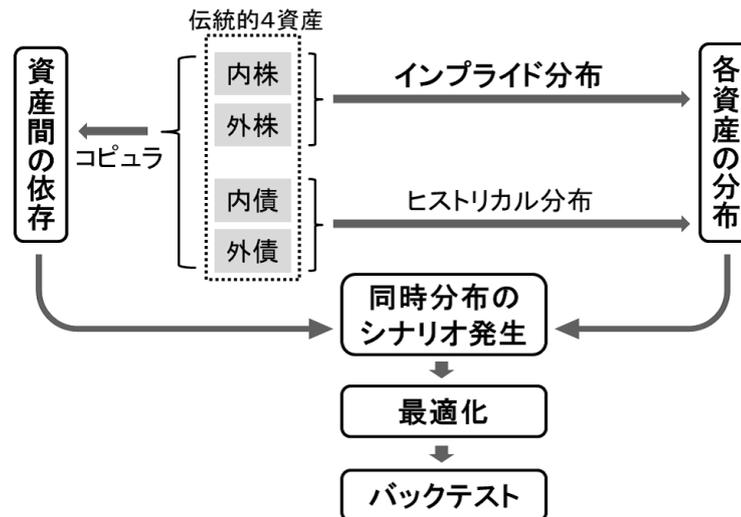


図 1: 本研究の概要 (内株と外株にインプライド分布を用いる場合)

表 1: 本研究の位置づけ

	本研究	木村 [10]	Kostakis[11]	Zdrovenin[18]
投資対象資産数 (リスク資産数)	4 (4)	4 (4)	2 (1)	2 (1)
ヒストリカル分布の混在			×	×
リスク調整の影響の検証		×	×	†
複数資産へのインプライド分布の適用		×	×	×

† リスク調整による分布の平均の変化を考慮した運用パフォーマンスの検証がなされていない

### 1.3. 本稿の構成

本稿の構成は以下の通りである。まず、2~4節で本研究における資産配分決定の方法について示す。具体的には2節でインプライド RND の推定方法や満期依存性の解消方法、リスク調整法など分布の推定方法について説明する。3節ではコピュラを用いた資産間の依存関係のモデル化を示し、4節で最適資産配分モデルについて述べる。そして、5節で分析 (バックテスト) の概要を説明した上で、6節で分析の結果を示し考察を行う。最後に7節で結論と今後の課題を述べる。

2. 分布の推定

2.1. インプライドリスク中立分布の推定 (満期日のみを対象とする方法)

満期依存性を考慮せず，オプションの満期日でのみ原資産価格に関するインプライド RND を推定する方法について述べる．オプション価格は，リスク中立的な投資家の想定する原資産価格分布における満期日でのペイオフの期待値を無リスク金利で割り引いた値として表現できる．つまり，行使価格  $K$  のヨーロピアンコールオプションの価格  $C(K)$  は RND の密度関数  $q(x)$ ，無リスク金利  $r$ ，満期までの期間  $T$  を用いて (2.1) 式のように記述できる．

$$C(K) = e^{-rT} \int_0^\infty \max(x - K, 0)q(x)dx \tag{2.1}$$

この式を  $K$  について 2 回偏微分することにより理論上はインプライド RND を計算できる．しかし，実際の市場で取引されているオプションの行使価格数は有限なので  $q(x)$  に何らかの確率分布を仮定して分布を補間する．本研究ではインプライド RND の推定やリスク調整の容易さといった観点から先行研究で最も多く用いられている，2 成分の混合対数正規 (Double Log Normal;DLN) 分布を仮定した方法を採用する．

DLN 分布は対数正規分布  $q_{LN}(x)$  を用いて (2.2) 式のように 5 つのパラメータで記述される分布である．

$$q_{DLN}(x) = wq_{LN}(x|S_1, s_1) + (1 - w)q_{LN}(x|S_2, s_2) \tag{2.2}$$

$S_j, s_j (j = 1, 2)$  はそれぞれ，対数正規分布のロケーションとスケールを表現するパラメータであり， $w$  は混合分布の重みを意味するパラメータで  $0 \leq w \leq 1$  を満たす．また，無裁定条件より RND の期待収益率は無リスク収益率に一致するため，(2.3) 式が成立する．

$$E(S_\tau) = wS_1e^{\frac{s_1^2}{2}} + (1 - w)S_2e^{\frac{s_2^2}{2}} = Se^{r\tau} \tag{2.3}$$

ただし  $S, \tau$  はそれぞれ原資産の価格，満期までの期間であり， $E(S_\tau)$  は満期時点での原資産価格の期待値を表す．この関係式より推定すべきパラメータが 1 つ減り，4 つとなる．

DLN 分布のパラメータ推定には相対的に流動性の高いアウトオブザマネー (OTM) のオプションデータのみを用いる．市場で取引されている満期までの期間が  $\tau$  の OTM のオプションの価格が  $N$  個得られるとする．このとき，DLN 分布のパラメータから計算した行使価格  $K$  におけるオプションのモデル価格  $V_{model}(K, S_1, s_1, s_2, w)$  と行使価格  $K$  のオプションの市場価格  $V_{market}(K)$  の誤差 2 乗和が最小となるパラメータを推定する．この問題は次のように定式化できる．

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^N (V_{model}(K_i, S_1, s_1, s_2, w) - V_{market}(K_i))^2 \tag{2.4}$$

$$\text{subject to} \quad S_2 = \frac{Se^{r\tau} - wS_1e^{\frac{s_1^2}{2}}}{1 - w}e^{-\frac{s_2^2}{2}} \tag{2.5}$$

$$0 \leq w \leq 1 \tag{2.6}$$

$$S_j > 0 \quad (j = 1, 2) \tag{2.7}$$

$$s_j > 0 \quad (j = 1, 2) \tag{2.8}$$

## 2.2. インプライドリスク中立分布の推定 (満期依存性を解消する方法)

前に述べたように、インプライド分布には分布を推定できるのはオプションの満期日までの分布に限られるという満期依存性の問題が存在する。このため、日経 225(オプション満期日：各月第 2 金曜日) と S&P500(オプション満期日：各月第 3 金曜日) のようにオプションの満期日が異なる資産に対しては投資期間やリバランス日の選択に関わらず同時にインプライド分布を適用して最適資産配分問題を解くことができない。そこで、この問題を解決するため、市場で取引されているすべての満期のオプションのデータを用いることにより任意の時点までの分布を補間して推定し、満期依存性を解消する。

本研究では先行研究で提案されている 2 つの方法 (パラメトリック法・Practitioner Black-Scholes 法) と本研究で提案する方法 (薄板スプライン平滑化法) の 3 通りで満期依存性を解消してインプライド RND を推定し、運用パフォーマンスを比較する。

### 2.2.1. パラメトリック法

Alentorn and Markose[2] では分布のパラメータに対して期間構造を仮定することで、(2.2) 式を時間  $T$  の関数として記述し満期依存性を解消している。具体的には、DLN 分布のロケーションとスケールを表すパラメータに対して新たな単位期間あたりのロケーションとスケールを表すパラメータ  $\mu_i, \sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ) を用いて、それぞれ  $S_i = e^{\mu_i T}$  ( $i = 1, 2$ )、 $s_i = \sigma_i \sqrt{T}$  ( $i = 1, 2$ ) という期間構造を仮定する。このとき、DLN 分布は

$$q_{DLN}(x, T) = w q_{LN}(x | e^{\mu_1 T}, \sigma_1 \sqrt{T}) + (1 - w) q_{LN}(x | e^{\mu_2 T}, \sigma_2 \sqrt{T}) \quad (2.9)$$

と、時間  $T$  の関数の形で表現できる。また、分布を推定する任意の満期  $T = \tau$  における無裁定条件より  $\mu_2$  は、(2.10) 式のように表される<sup>1</sup>。

$$\mu_2 = \frac{1}{\tau} \left\{ \log \left( \frac{e^{r\tau} - w e^{(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2})\tau}}{1 - w} \right) - \frac{\sigma_2^2}{2} \tau \right\} \quad (2.10)$$

推定すべきパラメータは  $\mu_1, \sigma_1, \sigma_2, w$  の 4 つである。市場で取引されている全ての満期のオプションデータを用いて、DLN 分布のパラメータから計算したオプションのモデル価格  $V_{model}(K, \mu_1, \sigma_1, \sigma_2, w)$  とオプションの市場価格  $V_{market}(K)$  の誤差 2 乗和を最小にする最適化問題を解き、パラメータを推定する。

### 2.2.2. Practitioner Black-Scholes 法

Ait-Sahalia and Brandt[1] では Dumas *et al.*[6] によって提案されたボラティリティサーフェスに関するモデルである Practitioner Black-Scholes モデル<sup>2</sup>を用いた方法 (以下、PBS 法と記載する) で満期依存性を解消し、2 資産にインプライド分布を適用した場合の最適戦略を導出している。

PBS 法では 3 つのステップで任意の時点での補間されたオプション価格を計算する。まず初めに市場で取引されているオプションのそれぞれのデータの組 { 行使価格・満期までの期間・オプション価格 } をマネネスの定義式<sup>3</sup>と Black-Scholes 公式を用いて { マネネス・満期までの期間・インプライドボラティリティ } の組に変換する。次にインプライドボラティリティ

<sup>1</sup> $T = \tau$  以外の時点では無裁定条件は成立しない。

<sup>2</sup>Christoffersen and Jacobs[5] や Singh *et al.*[15] では、Practitioner Black-Scholes モデルをオプションプライシングに用いた場合について分析している。

<sup>3</sup>Ait-Sahalia and Brandt[1] と同様にオプションのマネネス  $X$  を  $X = \frac{Se^{rT}}{K}$  と定義する。

IV をマネネス  $X$  と満期までの期間  $T$  による回帰で補間する．具体的には  $a_k(k = 0, \dots, 5)$  を回帰のパラメータとして

$$IV = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3X + a_4X^2 + a_5TX \quad (2.11)$$

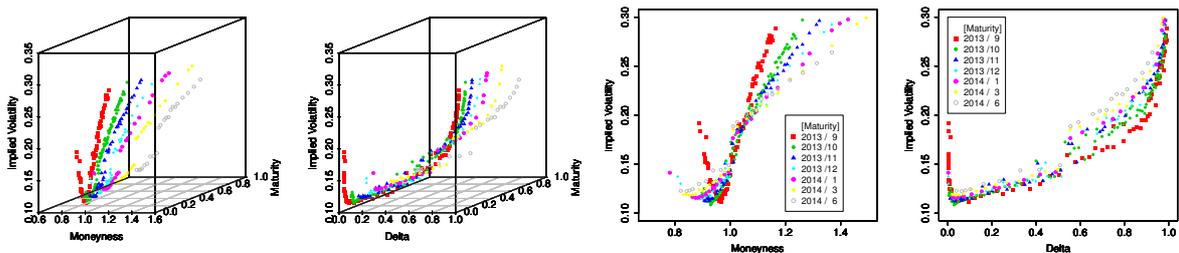
なる回帰式からステップワイズ法 (変数減少法) を用いて当てはまりのよいファクターのみを残して回帰を行い,  $T = \tau$  におけるインプライドボラティリティを推定する．最後に推定した { マネネス・満期までの期間・インプライドボラティリティ } の組を再び Black-Scholes 公式を用いて { 行使価格・満期までの期間・オプション価格 } の組に戻すことで  $T = \tau$  における補間されたオプション価格が得られる<sup>4</sup>．

このようにして得られたオプション価格を用いて 2.1 節で述べた満期日のみを対象とする方法と同様の方法で RND を推定する．

### 2.2.3. 薄板スプライン平滑化法

パラメトリック法と PBS 法ではデータの補間を行う際にそれぞれ RND のパラメータとボラティリティサーフェスの形状に比較的強い仮定をおいており, オプション価格が持つ市場参加者の予測に関する情報が RND に適切に反映できているか疑問が残る．そこで本研究では, 薄板スプライン (Thin Plate Spline; TPS) を用いてボラティリティサーフェスを平滑化することによりノンパラメトリックに満期依存性を解消できる方法 (以下, TPS 法と記載する) を提案する．

TPS 法の場合も 3 つのステップで任意の時点での (補間された) オプション価格を計算する．まず, オプションデータにおける { 行使価格・満期までの期間・オプション価格 } の組を Black-Scholes 公式を用いて { デルタ・満期までの期間・インプライドボラティリティ } の形に変換する．ただし, プットオプションのデルタについてはコールオプションのデルタに換算した値を用いる<sup>5</sup>．



[a] 立体図：マネネス      [b] 立体図：デルタ      [c] 平面図：マネネス      [d] 平面図：デルタ

図 2: 補間を行うボラティリティサーフェスの比較 (外株：2013 年 9 月 3 日)

ここでマネネスではなくデルタを用いて補間を行った理由について説明する．図 2 のようにマネネスを用いた場合とデルタを用いた場合でボラティリティサーフェスの形状を比較するとマネネスを用いた場合には満期によってデータの形状 (並び方) が異なりボラティリティサーフェスの歪みが大きいのに対して, デルタを用いた場合のほうが歪みが小さかった．この特徴は内株のオプションでも外株のオプションでも分析期間を通して観察された．

<sup>4</sup>この方法では Black-Scholes 公式を用いるが原資産価格の変動に幾何ブラウン運動を仮定しているのではなく, 補間のための単なる数値的な変換に Black-Scholes 公式を用いている．

<sup>5</sup>デルタ ( $\Delta$ ) の換算には  $\Delta_{call} = \Delta_{put} + 1$  の関係式を利用する．

そこで、デルタを用いたボラティリティサーフェスの方が平滑化に適していると考え、TPS法ではマネネスではなくデルタを用いて補間を行う<sup>6</sup>。

次に薄板スプラインによる平滑化を用いて任意の満期でのインプライドボラティリティを推定する。ある関数  $m(T, \Delta)$  が満期までの時間  $T$  とデルタ  $\Delta$  を予測変数とする、3次のスプライン関数とする。このとき (2.12) 式を最小にする  $m(T, \Delta)$  を薄板スプラインといい、これがインプライドボラティリティの推定値を返す関数である<sup>7</sup>。

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (IV_i - m(T_i, \Delta_i))^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{\partial^2 m(T, \Delta)}{\partial T^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 m(T, \Delta)}{\partial T \partial \Delta} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 m(T, \Delta)}{\partial \Delta^2} \right)^2 \right) dt d\Delta \quad (2.12)$$

(2.12) 式の第1項はフィッティングの誤差を表す項で、第2項が凸凹ペナルティと呼ばれるオーバーフィッティングを抑制する項であり、この2つの項を平滑化パラメータ  $\lambda$  で重み付けしている<sup>8</sup>。平滑化パラメータの与え方については6.2.1項で議論する。最後に推定されたデータを、再び Black-Scholes 公式で { 行使価格・満期までの期間・オプション価格 } の形に戻す。

このように推定した  $T = \tau$  でのオプション価格から 2.1 節の満期日のみを対象とする方法と同様に RND を推定する。

#### 2.2.4. 市場データに対するフィッティングの比較

TPS法が他の2つの満期依存性の解消方法と比較してオプションの価格が持つ情報が RND に反映できていることを確認するため、市場価格とそれぞれの満期依存性の解消方法におけるモデル価格の誤差二乗和を比較した。なお、TPS法の平滑化パラメータは  $\lambda = 10^{-6}$  の場合と  $\lambda = 10^{-5}$  の場合の2通りを掲載した。誤差二乗和を時点ごとに計算し、常用対数をとった値を図3に示す。この値が小さくグラフが下側にあるほど市場データに対するフィッティングが良いことを表している。

内株の場合も外株の場合も同様に、先行研究の2つの方法に比べて TPS法の市場データに対するフィッティングが優れていることがわかる。このことから TPS法を用いることでオプションの価格が持つ投資家の予測に関する情報をより RND に反映できると考えられる。

#### 2.3. インプライド分布のリスク調整

本研究ではリスク調整の影響を検証するため、先行研究において提案されている3通りの方法(効用関数法・ベータ分布法・ノンパラメトリック法)でリスク調整を行う。以下で、それらの方法を簡単に説明する。

<sup>6</sup>Bliss and Panigirtzoglou[3]によるとインプライドボラティリティを1変数のスプライン関数で平滑化する場合、デルタを用いて補間するのが良いとしている。TPS法はこの方法をデルタと満期の2変数による平滑化に拡張したモデルであると考えられる。

<sup>7</sup>TPS平滑化による薄板スプライン  $m(T, \Delta)$  の形状は薄い弾性板に力を加えて曲げたときの形状と対応しており、 $\lambda$  は弾性板の硬さに対応する。詳しくは竹澤[16]を参照されたい。

<sup>8</sup>通常の薄板スプラインの定義では(2.12)式の第1項の  $\frac{1}{N}$  は入らない。しかし、本研究では満期依存性を解消する時点ごとにオプションのデータ数  $N$  が異なるため  $\frac{1}{N}$  を導入することで残差の二乗の平均値を考えている。

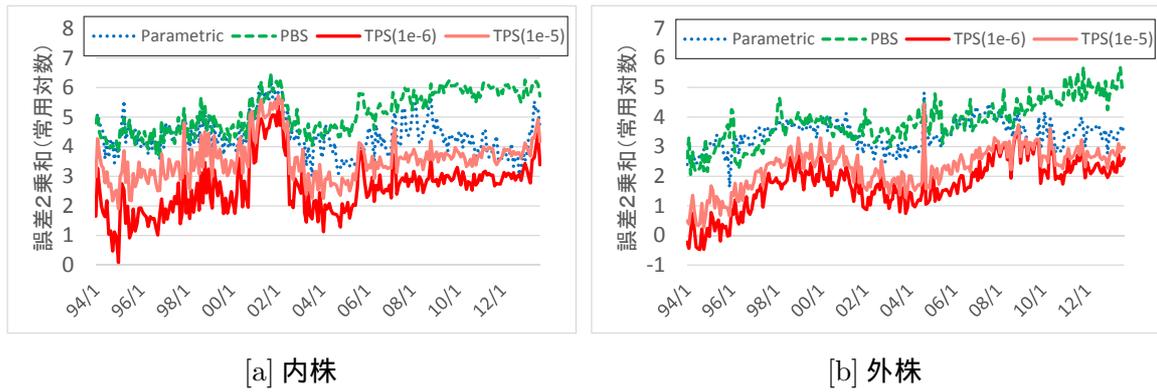


図 3: 市場データに対するフィッティング

### 2.3.1. 効用関数法

完備な市場の下では市場参加者の効用関数  $U(x)$  , RND の密度関数  $q(x)$  , 実分布の密度関数  $p(x)$  の間に次の関係が成立する .

$$p(x) = \frac{q(x)/U'(x)}{\int_0^\infty (q(y)/U'(y)) dy} \tag{2.13}$$

さらに市場参加者の効用関数に CRRA 型効用関数  $U(x) = x^{1-\gamma}/(1-\gamma)$  を仮定し , (2.13) 式に代入することで

$$p(x) = \frac{x^\gamma q(x)}{\int_0^\infty y^\gamma q(y) dy} \tag{2.14}$$

を得る .  $\gamma$  は市場参加者の相対的リスク回避係数 (RRA) を表すパラメータである .

(2.13) 式は分母に積分計算を含んでいるが , Liu *et al.*[12] では , リスク調整後の分布を積分計算を含まない形で簡潔に表現している . リスク調整後の分布も 2 成分の混合正規分布となり , リスク調整後のパラメータ  $\tilde{\theta}^* = (\tilde{S}_1^*, \tilde{S}_2^*, \tilde{s}_1^*, \tilde{s}_2^*, \tilde{w}^*)$  は RND のパラメータ  $\theta^* = (S_1^*, S_2^*, s_1^*, s_2^*, w^*)$  を用いて ,

$$\tilde{S}_i^* = S_i^* \exp(\gamma s_i^{*2}) \quad (i = 1, 2) \tag{2.15}$$

$$\tilde{s}_i^* = s_i^* \quad (i = 1, 2) \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{\tilde{w}^*} = 1 + \frac{1-w^*}{w^*} \left( \frac{S_2^*}{S_1^*} \right)^\gamma \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) (s_1^{*2} - s_2^{*2}) \right\} \tag{2.17}$$

と表すことができる .

### 2.3.2. ベータ分布法

(2.18) 式のように RND の分布関数  $Q(x)$  を実分布の分布関数  $P(x)$  に変換する関数を  $C(\cdot)$  とする .

$$P(x) = C(Q(x)) \tag{2.18}$$

この式の両辺を微分することにより (2.19) 式を得る .

$$p(x) = C'(Q(x))q(x) \tag{2.19}$$

$C(\cdot)$  はキャリブレーション関数と呼ばれ、自身も分布関数の性質を満たしている必要がある。このキャリブレーション関数としてベータ分布の分布関数を仮定する<sup>9</sup>。このとき、リスク調整後の分布はベータ分布のパラメータ  $j, k (> 0)$  を用いて

$$p(x) = \frac{Q(x)^{j-1}(1-Q(x))^{k-1}}{B(j, k)}q(x) \quad (2.20)$$

と表すことができる。ただし、 $B(j, k)$  はベータ関数を表す。

この方法は Fackler and King[7] で提案され、Liu *et al.*[12] や Humphreys and Noss[9] で用いられた。

### 2.3.3. ノンパラメトリック法

Shackleton *et al.*[14] では (2.18) 式におけるキャリブレーション関数をノンパラメトリックに推定しリスク調整を行っている。

$L$  をパラメータ推定の期間数として、満期  $\tau$  の RND の分布関数の系列を  $\{Q_{t,\tau}(x; \theta_t^*)\}$  ( $t = 1, \dots, L$ ) とおく。また、原資産価格の系列を  $\{S_{t+\tau}\}$  ( $t = 1, \dots, L$ ) とおく。このとき、実現した価格の分位点 (quantile) の系列は  $\{u_{t+\tau}\} = \{Q_{t,\tau}(S_{t+\tau}; \theta_t^*)\}$  ( $t = 1, \dots, L$ ) と表せる。また、 $\phi(\cdot), \Phi(\cdot)$  をそれぞれ、標準正規分布の密度関数と分布関数とする。先ほどの系列  $\{u_{t+\tau}\}$  に対して変換を行った新たな系列  $\{y_{t+\tau}\} = \{\Phi^{-1}(u_{t+\tau})\}$  を定義し、この系列に対してカーネル密度推定を行う。この方法によって推定された系列  $\{y_{t+\tau}\}$  が従う分布の密度関数は、

$$h(y) = \frac{1}{LB} \sum_{i=1}^L \phi\left(\frac{y - y_i}{B}\right) \quad (2.21)$$

と表すことができる。 $B$  はバンド幅と呼ばれる分布の平滑化の度合いを表すパラメータである<sup>10</sup>。

このとき、リスク調整された分布の密度関数は、 $y = \Phi^{-1}(Q(x))$  として (2.23) 式のように表せる。

$$p(x) = \frac{h(y)}{\phi(y)}q(x) \quad (2.23)$$

## 2.4. リスク調整のパラメータ推定

効用関数法とベータ分布法でリスク調整する場合にはリスク調整のパラメータを推定する必要がある。ここでリスク調整パラメータのベクトルを  $\delta$  と表す。すなわち、効用関数法の場合は  $\delta = (\gamma)$  で、ベータ分布法の場合は  $\delta = (j, k)$  である。最適な  $\delta$  は評価関数の置き方によって変わるため、本研究では2通りの方法でパラメータを推定した。

### 2.4.1. 最尤推定

Liu *et al.*[12] や Shackleton *et al.*[14] では最尤推定 (MLE) でリスク調整のパラメータを推定している。

<sup>9</sup>ベータ分布には  $j = k = 1$  の場合に一様分布になり、リスク調整の前後で分布が変わらない場合も表現できるなどリスク調整に用いるのに好ましい性質がある。詳しくは Humphreys and Noss[9] を参照せよ。

<sup>10</sup>一般にバンド幅はデータ数が増えるほど小さくするのが良いとされている。本研究では Shackleton *et al.*[14] と同様に

$$B = \frac{0.9\sigma_y}{L^{0.2}} \quad (2.22)$$

とした。ここで、 $\sigma_y$  は系列  $\{y_{t+\tau}\}$  の標準偏差である。

最尤推定により最適なパラメータ  $\delta$  を求める問題は次のように定式化できる。

$$\text{Maximize} \quad \sum_{t=1}^L \log(p_t(S_{t+\tau}; \theta_t^*, \delta)) \quad (2.24)$$

$$\text{subject to} \quad \Xi(\delta) > 0 \quad (2.25)$$

$p_t(S_{t+\tau}; \theta_t^*, \delta)$  は  $t$  時点でのリスク調整した分布を表し、 $\Xi(\delta)$  は  $\delta$  の取りうる値に関する制約式である。

#### 2.4.2. Berkowitz 検定を用いた推定

Bliss and Panigirtzoglou[4] や Kostakis *et al.*[11] では将来に対する予測力の検定である Berkowitz 検定の統計量を利用して最適なリスク調整のパラメータ  $\delta$  を推定している。

$\delta$  でリスク調整された満期  $\tau$  の分布関数の系列を  $\{P_{t,\tau}(x; \theta_t^*, \delta)\}$  とする。この系列に対して (2.26) 式のような変換を施す。

$$z_t = \Phi^{-1}(P_{t,\tau}(S_{t+\tau}; \theta_t^*, \delta)) \quad (2.26)$$

この変換した系列  $\{z_t\}$  に対して (2.27) 式のような AR(1) の自己回帰モデルを当てはめる。そのパラメータを  $\eta = (a, \mu, V)$  とおく。

$$z_{t+1} = az_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(\mu, V) \quad (2.27)$$

予測と実現値の間に時系列相関が存在しないならば  $a = 0$  となり、さらに予測に偏りがなく、実現値が従う分布がリスク調整された分布と完全に一致するならば  $\{z_t\}$  は標準正規分布に従うため  $\mu = 0, V = 1$  となる。よって、このモデルの厳密最尤推定量が  $\eta_\delta^* = (0, 0, 1)$  であるかの検定を行う。この検定は帰無仮説を  $\eta_0^* = (0, 0, 1)$  とする尤度比検定を用いて行い、尤度比を表す統計量 LR3 は  $l_{AR(1)}$  を AR(1) モデルの厳密対数尤度関数として

$$LR3(\delta) \equiv -2(l_{AR(1)}(z_t; \eta_0) - l_{AR(1)}(z_t; \eta_\delta)) \quad (2.28)$$

と定義される。この帰無仮説のもとで、LR3 統計量は自由度 3 の  $\chi^2$  分布に従うので最適な  $\delta$  を求める問題は、Berkowitz 検定の p 値を最大化、すなわち LR3 統計量を最小化する問題となり次のように定式化される。

$$\text{Minimize} \quad LR3(\delta) \quad (2.29)$$

$$\text{subject to} \quad \Xi(\delta) > 0 \quad (2.30)$$

### 2.5. ヒストリカル分布の推定

ヒストリカル分布としては分析の目的に応じて DLN 分布または GH(一般化双曲型) 分布のどちらかを仮定する。分布のパラメータはどちらの場合も最尤法で推定する。

#### 2.5.1. DLN 分布

インプライド分布との比較対象としてヒストリカル分布を用いる場合には、インプライド RND と分布形をそろえて比較を行うために、資産価格の分布に DLN 分布を仮定する。EM アルゴリズムを用いて尤度最大化問題を解きパラメータを推定した<sup>11</sup>。

<sup>11</sup>EM アルゴリズムは局所的最適解に到達することが保証されるアルゴリズムであるが、その解が大域的最適解になっていることは保証されない。実際に EM アルゴリズムを用いてパラメータ推定を行うと与える初期値によって異なる解を返すことが確認された。そこで本研究では初期値を乱数で 1000 セット発生させ得られた解の中で最も対数尤度の大きい解を用いることでパラメータ推定を安定させた。

### 2.5.2. GH 分布

インプライド分布との比較対象とならない資産クラスの分布推定には GH 分布を用いる。GH 分布はよく知られている金融商品の性質であるリターンの非対称性やファットテール性を表現可能な柔軟な分布であり、(2.31) 式のように 5 つのパラメータ  $(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$  で記述される。

$$p_{GH}(x|\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}} \left( \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right)^{\lambda - \frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda \left( \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)} K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left( \alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) e^{\beta(x - \mu)} \quad (2.31)$$

ただし、 $K_\lambda(\cdot)$  は指数  $\lambda$  を持つ第三種ベッセル関数である。

GH 分布はパラメータを定め方により、H, VG, NIG, t, 正規分布などの複数の確率分布を表現することができる。本研究では GH, H, VG, NIG, t 分布の 5 つの分布において非対称性を表すパラメータ  $\beta$  を 0 と固定するか否かの 10 通りに加えて正規分布の計 11 通りの分布においてパラメータの推定を行う。これらの推定した分布の中で AIC が最小となるものを資産配分に用いる周辺分布として採用する。こうすることで資産や時点ごとに適切な分布が選択できると考えられる。

### 3. 資産間の依存関係の推定

木村・枇々木 [10] では複数の確率変数の間の依存関係を表す関数であるコピュラを用いて資産間の依存関係を記述している。コピュラを用いることで周辺分布とそれらの依存構造を分離して推定できるため、インプライド分布とヒストリカル分布を資産ごとに混在させることができるようになる。本研究では、t コピュラを用いて依存構造を記述する<sup>12</sup>。

t コピュラの自由度を  $\nu$ 、相関行列を  $\Sigma$ 、ガンマ関数を  $\Gamma(\cdot)$  とする。また、 $u_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は  $u_i \in [0, 1]$  となる確率変数とする。このとき、 $n$  変数の場合の密度関数は  $\omega^\top = (\omega_1, \dots, \omega_n) = (t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n))$  ( $t_\nu^{-1}(\cdot)$  は自由度  $\nu$  の t 分布の分布関数の逆関数) として、(3.1) 式のように表すことができる。

$$c_\nu(u_1, \dots, u_n; \Sigma, \gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right) \left\{ \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right\}^n \left(1 + \frac{1}{\nu} \omega^\top \Sigma^{-1} \omega\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\sqrt{|\Sigma|} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left\{ \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \right\}^n \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\omega_i^2}{2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}} \quad (3.1)$$

t コピュラでは相関行列により資産ごとの依存関係を表現できる一方で、変数の数に対してパラメータ数が 2 乗のオーダーで増加してしまう。そこで、順位相関係数の 1 つであるケンドールの  $\tau$  を用いたパラメータ推定法を利用する。この方法では、(3.2) 式のようにケンドールの  $\tau$  の行列  $\tau$  を用いて相関行列の推定量  $\hat{\Sigma}$  を求める。

$$\hat{\Sigma} = \sin \frac{\pi}{2} \tau \quad (3.2)$$

このように  $\hat{\Sigma}$  をあらかじめ推定することで、最尤法で推定すべきパラメータは自由度  $\nu$  の 1 つとなる。時点  $t$  における資産  $j$  の収益率データ  $m_{j,t}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) ( $t = 1, \dots, L$ ) を  $P_j$

<sup>12</sup>リーマン・ショックによる世界同時株安のように分布の局所的な部分において資産間の依存が強まるという性質が知られている。t コピュラは裾依存性を持ったコピュラであるため、こうした性質もモデル化することができる。コピュラの具体的な方法については、戸坂・吉羽 [17] を参照されたい。

を資産  $j$  の周辺分布の分布関数として  $u_{j,t} = P_j(m_{j,t})$  に変換する．このとき，最適な自由度  $\nu$  を求める問題は以下のように定式化できる．

$$\text{Maximize} \quad \sum_{t=1}^L \log \left( c_\nu(u_{1,t}, \dots, u_{n,t}; \hat{\Sigma}, \nu) \right) \quad (3.3)$$

$$\text{subject to} \quad \nu > 2 \quad (3.4)$$

#### 4. 最適資産配分

推定した同時分布は，非常に複雑な形となるため解析的に最適資産配分を求めるのは困難である．そこで，本研究ではモンテカルロシミュレーションを用いて収益率シナリオを発生させ，そのシナリオに対して最適化を行うことで最適資産配分を導出する．

また，本研究で推定した分布は非対称な分布であるため，最適化に用いるリスク指標は下方リスクを考慮したものが望ましい．そこで本研究では  $\beta$ -Conditional Value at Risk ( $\beta$ -CVaR) をリスク尺度として用いて線形計画問題として定式化し，最適解を導出する． $\beta$ -CVaR とはポートフォリオの収益率の損失がある確率水準  $\beta$  のパーセント点 ( $\beta$ -VaR) を上回るときの平均損失を表す下方リスク尺度である．以下に具体的な最適資産配分問題の定式化について記述する<sup>13</sup>．線形計画問題として定式化を行っているため，実務で用いる際に重要であると考えられる上下制限約などの制約式を追加しても容易に問題を解くことができる．

##### 添字と集合

$i$  : シナリオを表す添字 ( $i = 1, \dots, I$ )

$j$  : リスク資産を表す添字 ( $j = 1, \dots, J$ )

$F$  : 外貨建て資産を表す集合

##### パラメータ

$r_d$  : 円貨無リスク金利

$r_f$  : 外貨無リスク金利

$\beta$  : CVaR の確率水準

$\rho_j^i$  : 資産  $j$  のシナリオ  $i$  での収益率 ( $i = 1, \dots, I$ ;  $j = 1, \dots, J$ )

##### 決定変数

$x_j$  : 資産  $j$  への投資比率 ( $j = 1, \dots, J$ )

$\alpha_\beta$  : 確率水準  $\beta$  の VaR ( $\beta$ -VaR)

$q^i$  : シナリオ  $i$  における収益率の損失が  $\beta$ -VaR を上回る量 (中間変数) ( $i = 1, \dots, I$ )

<sup>13</sup> 下方リスクを用いたポートフォリオ最適化問題に対する定式化は，枇々木・田辺 [8] を参照されたい．

定式化

$$\text{Minimize} \quad \alpha_\beta + \frac{1}{(1-\beta)I} \sum_{i=1}^I q^i \quad (4.1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^J x_j + \sum_{j \in F} (r_f - r_d)x_j = 1 \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^J \rho_j^i x_j + \alpha_\beta + q^i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, I) \quad (4.3)$$

$$q^i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, I) \quad (4.4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, J) \quad (4.5)$$

(4.1) 式の目的関数は  $\beta$ -CVaR を表している。また、外貨建ての資産については、金利差分のヘッジコストを支払うことで為替に対する不確実性は完全にヘッジする。(4.2) 式の左辺第 2 項が為替のヘッジコストに対応する。

## 5. 分析の概要

本研究ではリスク調整と満期依存性解消による複数資産へのインプライド分布の適用のそれぞれが運用パフォーマンスに与える影響について数値分析により検証する。このうち、リスク調整に関する分析を分析 A、満期依存性解消による複数資産へのインプライド分布の適用に関する分析を分析 B と記載する。さらに、分析 B では比較対象を変えて 2 つの分析を行うため、それぞれを分析 B-1、分析 B-2 というように記載する。

### 5.1. データ

分析に用いたデータはすべての分析において共通で以下の通りである。なお、1994 年 1 月 4 日から 2013 年 9 月 20 日までの日次データの終値を用いている。

#### 資産価格データ

- 内株：日経 225
- 外株：S&P500
- 内債：Citigroup JP GBI
- 外債：Citigroup US GBI

#### オプション価格データ

- 内株：日経 225 オプション (大阪証券取引所)
- 外株：S&P500 オプション (シカゴ・オプション取引所)

#### 無リスク金利データ

- 円貨無リスク金利：JPY LIBOR 1ヶ月物
- 外貨無リスク金利：USD LIBOR 1ヶ月物

### 5.2. 設定条件

設定条件は以下の通りである。

- 分析期間：2000 年 1 月～2013 年 9 月 (165ヶ月)
- リバランス：月次

- パラメータ推定期間<sup>14</sup>：4年・5年・6年・Long (4通り)
- CVaRの確率水準： $\beta = 80\%$
- シミュレーションのシナリオ数：20,000個<sup>15</sup>
- 空売り：禁止

### 5.3. 推定した資産分布とシミュレーションによる同時分布

前に示した設定条件の下で推定した各資産の分布と、シミュレーションにより発生させた同時分布の散布図(内株と外株にインプライド分布を用いる場合：2013年9月3日のデータから計算)を図4に示した。これは図1の「同時分布のシナリオ発生」のところまでに対応した結果である。これらのシナリオに対して最適化を行うことで最適資産配分を計算し、バックテストにより運用パフォーマンスを検証する。

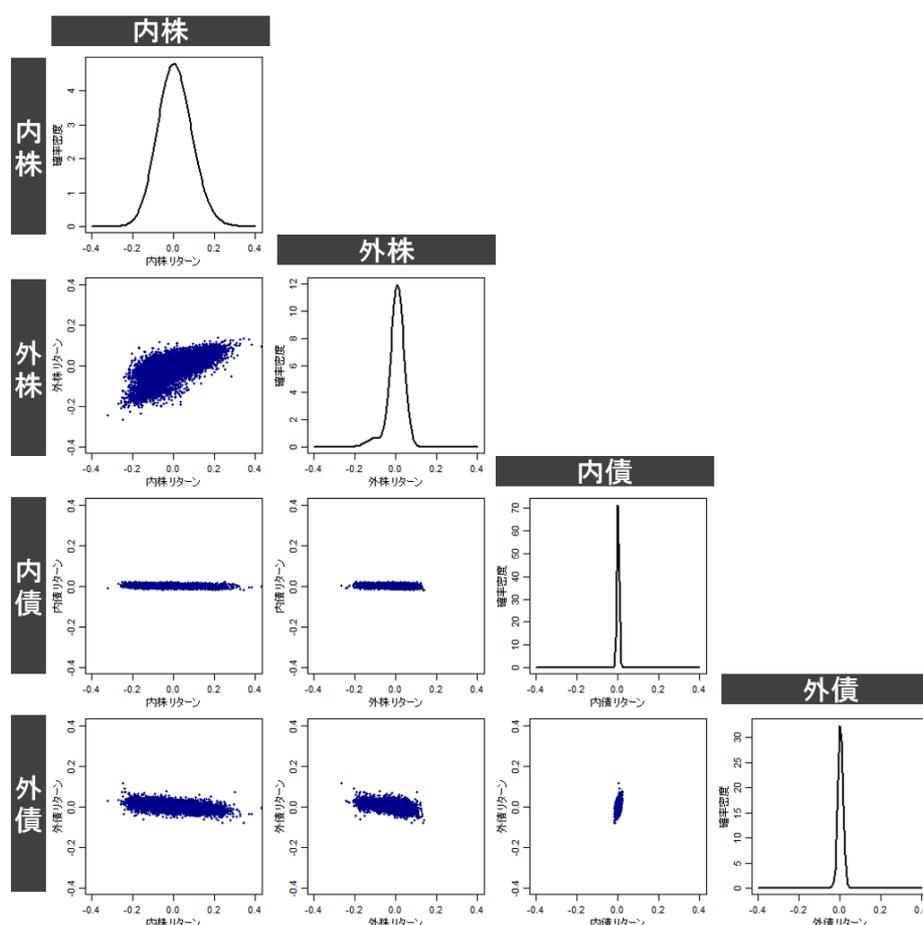


図 4: 推定した各資産の分布とシミュレーションによる同時分布の散布図

<sup>14</sup> パラメータ推定期間とはリスク調整、コピュラ、ヒストリカル分布のパラメータを推定する場合に意思決定時点から遡って用いたデータ期間を表す。Long はパラメータ推定期間をローリングせず、できる限り長く(常に1994年1月から意思決定時点まで)パラメータ推定期間を取る場合である。また、今回の分析では複数のパラメータ推定期間で運用パフォーマンスを比較する。ただし、得られた結果がパラメータ推定期間に対してロバストであるかを検証することが目的であるため、パラメータ推定期間の違いにおけるパフォーマンスの優劣に関する考察は行わない。

<sup>15</sup> シミュレーションにより発生させたシナリオに対して最適化を行うためサンプリングエラーの影響が発生する可能性がある。シナリオ数を増やして問題を解くことも可能ではあるが、本研究では様々な条件下でバックテストを行う都合上、計算時間を考慮して20,000シナリオに設定した。シナリオ数を増やして分析を行うことは今後の課題である。

## 5.4. 比較対象

### 5.4.1. 分析 A：リスク調整が運用パフォーマンスに与える影響

分析 A ではリスク調整が運用パフォーマンスに与える影響について検証する．比較対象は表 2 に示した 7 通りである．

表 2: 分析 A における比較対象

方法	分布	リスク調整	パラメータ推定
Historical DLN	ヒストリカル DLN	-	-
RND	インプライド DLN	-	-
Utility MLE	インプライド DLN	効用関数法	最尤推定 (MLE)
Utility Berkowitz	インプライド DLN	効用関数法	Berkowitz 検定
Beta MLE	インプライド DLN	ベータ分布法	最尤推定 (MLE)
Beta Berkowitz	インプライド DLN	ベータ分布法	Berkowitz 検定
Nonparametric	インプライド DLN	ノンパラメトリック法	カーネル密度推定

この 7 通りの方法を内株のみにインプライド分布を用いる場合 (内株インプライドモデル)、外株のみにインプライド分布を用いる場合 (外株インプライドモデル) のそれぞれの場合について比較した．分析 A では満期依存性の解消は行わないため、インプライド分布として推定できるのは満期時点での分布のみである．そこで内株インプライドモデルではリバランス日を毎月第 2 金曜日、外株インプライドモデルでは毎月第 3 金曜日とした．また、インプライド分布を用いない資産 (例えば、内株インプライドモデルにおける外株・内債・外債) についてはヒストリカル GH 分布で推定を行う．

### 5.4.2. 分析 B：満期依存性解消と複数資産へのインプライド分布の適用

分析 B-1 では本研究で提案する TPS 法と先行研究によって提案された 2 つの満期依存性解消法 (パラメトリック法・PBS 法) の比較を行うため、それぞれの方法で満期依存性を解消し、内株と外株の 2 資産にインプライド分布を適用した上で運用パフォーマンスを比較する．

分析 B-2 では TPS 法で満期依存性を解消した上でインプライド分布を用いる資産を変えて運用パフォーマンスを比較する．具体的には表 3 に示した 5 通りを比較対象とする．ヒストリカル分布で推定を行う場合には仮定する分布形の自由度が増すことを考慮して全資産に対して GH 分布を用いた場合も比較対象に加えている．

分析 B においては満期依存性を解消した上でインプライド分布の推定を行うため、リバランス日を任意に設定することが可能である．そこで分析 B では毎月の最初の取引日にリバランスを行う (月初リバランス) ものとして 2 つの分析を行った．また、内債と外債についてはいずれの場合もヒストリカル GH 分布を用いる．なお、分析 A の結果を踏まえ分析 B でインプライド分布を用いる場合はリスク調整を行わない<sup>16</sup>．

## 5.5. 評価尺度

それぞれの比較対象における運用パフォーマンスの優劣を、ポートフォリオの効率性尺度である実現リターンのシャープレシオと  $\beta$ -CVaR レシオを用いて比較する．

<sup>16</sup>6.1.2 項を参照せよ．ただし、紙面の都合で結果は省略するが効用関数法でリスク調整を行った場合でも同様の分析を行い、分析 B で得られた結果がリスク調整の有無によらないことを確認している．

表 3: 分析 B-2 における比較対象

分布名	インプライド資産数	内株	外株
Historical DLN	0	ヒストリカル (DLN)	ヒストリカル (DLN)
Historical GH	0	ヒストリカル (GH)	ヒストリカル (GH)
Implied JP	1	インプライド (RND)	ヒストリカル (DLN)
Implied US	1	ヒストリカル (DLN)	インプライド (RND)
Implied JPUS	2	インプライド (RND)	インプライド (RND)

実現リターンに対する  $\beta$ -CVaR は時点  $t$  におけるポートフォリオの実現リターンを  $r'_t$  とすると、

$$\beta\text{-CVaR} = -\frac{\sum_{t=1}^M r'_t I_{\beta,t}}{\sum_{t=1}^M I_{\beta,t}} \quad \text{ただし,} \quad I_{\beta,t} = \begin{cases} 1 & (-r'_t > \beta\text{-VaR}(r'_t)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5.1)$$

と表される。ここで、 $M$  は実現リターンの個数、 $\beta\text{-VaR}(r'_t)$  は  $r'_t$  に対する実現  $\beta\text{-VaR}$  である。実現リターンに対する  $\beta\text{-CVaR}$  レシオは実現超過リターンと実現  $\beta\text{-CVaR}$  の比である。

## 6. 分析結果と考察

### 6.1. 分析 A：リスク調整が運用パフォーマンスに与える影響

#### 6.1.1. リスク調整による分布の変化

インプライド分布を用いる資産に対して推定された分布の統計量の推移を図 5(内株インプライドモデル) と図 6(外株インプライドモデル) に示す<sup>17</sup>。

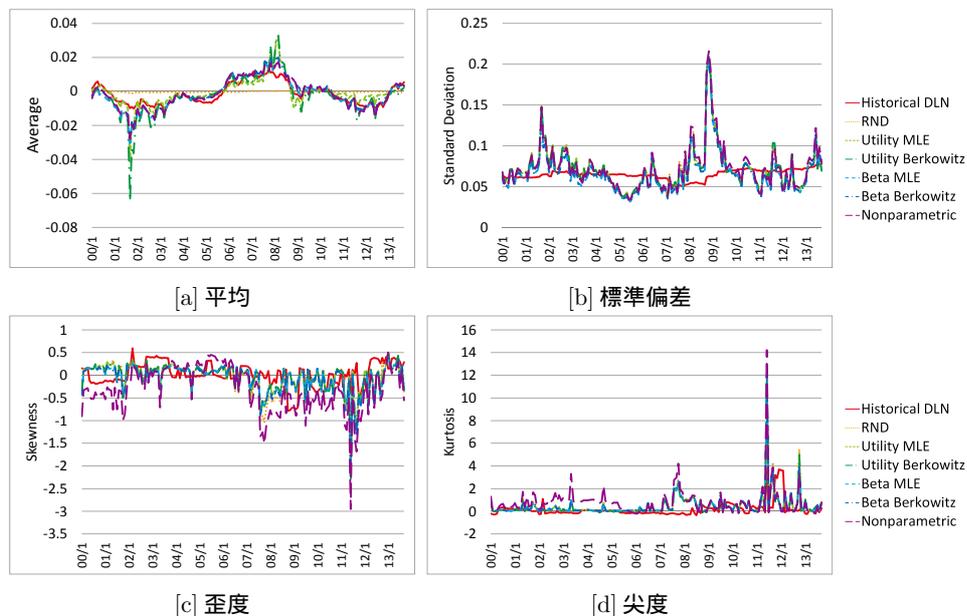


図 5: 分布の統計量 (内株インプライド・5年)

<sup>17</sup> リスク調整の手法によってはリスク調整後の分布の統計量を解析的に求めることは困難であるため、シナリオを 20,000 個発生させたときの統計量を計算している。

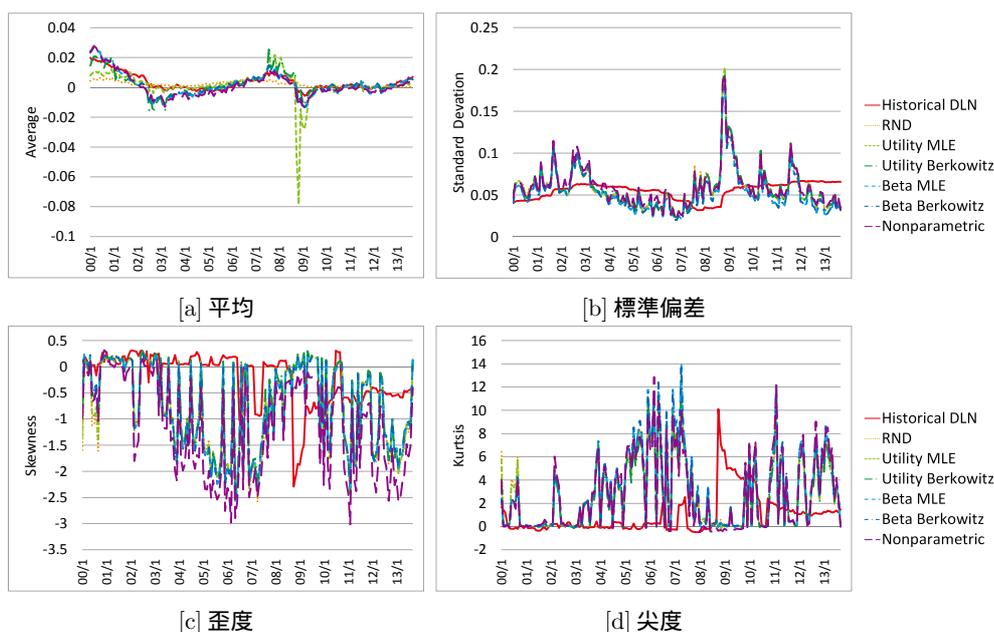


図 6: 分布の統計量 (外株インプライド・5年)

インプライド分布を内株に用いた場合でも外株に用いた場合でもリスク調整をしていない RND は平均の情報 (リスクプレミアム) を含んでいないため平均がほぼ一定となっている。それに対してリスク調整された分布はリスク調整の手法に関わらず、平均がヒストリカル分布とほぼ同様に変化している。RND の標準偏差については現在の情報や状況が分布に反映されるため、ヒストリカル分布の場合と比較して時点ごとに大きく変化していることがわかる。そして、リスク調整された分布の標準偏差はリスク調整前の RND からほとんど変化していなかった。また、歪度や尖度に関しても標準偏差の場合と同様にリスク調整による変化は平均の場合と比較して小さい。このようにリスク調整ではその手法に依らず分布の統計量のうち平均の変化が特に大きかったことから、リスク調整は平均の情報を含まない RND に対してヒストリカルデータから推定される平均の情報を付け加える役割があるといえる。

どちらも紙面の都合でパラメータ推定期間が 5 年の場合のみを掲載したが、パラメータ推定期間を変化させても同様の傾向が観察された。

### 6.1.2. リスク調整が運用パフォーマンスに与える影響

分析 A における実現リターンの効率性尺度を表 4(内株インプライドモデル) と表 5(外株インプライドモデル) に示す。値が大きいほど効率的な運用ができていることを表す。

まず、ヒストリカル分布を用いたモデルとインプライド分布を用いたモデルを比較すると内株インプライドモデルの場合も外株インプライドモデルの場合も同様にリスク調整の方法に関わらず、インプライド分布を用いた場合のシャープレシオや CVaR レシオの値が高かった。これは 1 節で述べた先行研究と整合的な結果である。

また、内株インプライドモデルでは分析を行った 4 ケース中 2 ケース、外株インプライドモデルでは 4 ケースすべてにおいてリスク調整しない RND を用いた場合の CVaR レシオが比較対象の中で最も優れていた。さらに内株インプライドモデルの残り 2 ケースでも比較対象の中で 2 番目に優れていたことから多くの場合でリスク調整をしない方が CVaR レシオで見た場合の運用パフォーマンスが優れていたことがわかる。シャープレシオに関しても多くのケースでリスク調整をせず RND を用いた場合が優れていた。このことから運用パフォー

マンズはリスク調整により低下する傾向にあったといえる。

表 4: 分析 A : 運用パフォーマンス (内株インプライドモデル)

方法	シャープレシオ				CVaR レシオ			
	4年	5年	6年	Long	4年	5年	6年	Long
Historical DLN	0.227	0.229	0.255	0.286	0.181	0.182	0.207	0.236
RND	0.249	0.267	0.281	0.302	0.207	0.226	0.237	0.262
Utility MLE	0.240	0.261	0.274	0.302	0.198	0.218	0.229	0.260
Utility Berkowitz	0.245	0.264	0.277	0.304	0.204	0.223	0.233	0.261
Beta MLE	0.247	0.251	0.273	0.302	0.207	0.209	0.228	0.260
Beta Berkowitz	0.245	0.249	0.276	0.301	0.204	0.207	0.235	0.259
Nonparametric	0.254	0.260	0.281	0.304	0.214	0.219	0.241	0.261

表 5: 分析 A : 運用パフォーマンス (外株インプライドモデル)

方法	シャープレシオ				CVaR レシオ			
	4年	5年	6年	Long	4年	5年	6年	Long
Historical DLN	0.256	0.257	0.293	0.312	0.213	0.217	0.250	0.282
RND	0.276	0.291	0.310	0.317	0.238	0.252	0.271	0.290
Utility MLE	0.269	0.286	0.308	0.317	0.231	0.247	0.269	0.290
Utility Berkowitz	0.270	0.288	0.308	0.316	0.231	0.247	0.268	0.287
Beta MLE	0.257	0.275	0.299	0.310	0.220	0.235	0.258	0.280
Beta Berkowitz	0.257	0.275	0.299	0.317	0.220	0.234	0.259	0.288
Nonparametric	0.266	0.284	0.303	0.314	0.227	0.243	0.262	0.285

表 6: ヒストリカルデータから推定した期待収益率と実現リターンの相関係数

	4年	5年	6年	Long
内株	-0.001	-0.107	-0.185	-0.116
外株	-0.109	-0.189	-0.201	-0.146

このような結果となった理由として、適切なリスク調整のパラメータが推定できていないことが考えられる。前節で見た分布の統計量の変化から考えるとリスク調整のパラメータを推定することは将来の分布の平均（期待収益率）を推定することとほぼ同値である。しかし、表6に示したようにヒストリカルデータから推定した期待収益率と実現リターンの相関が負であることから、ヒストリカルデータから適切な期待収益率の推定（つまり、適切なリスク調整パラメータの推定）をすることは困難であることがわかる。このため、適切なリスク調整のパラメータが推定できず、結果的にRNDに対してリスク調整でノイズを加えてしまう形となり運用パフォーマンスが低下したと考えられる。

## 6.2. 分析 B：満期依存性解消と複数資産へのインプライド分布の適用

### 6.2.1. TPS 法の平滑化パラメータの感度分析

TPS 法では平滑化パラメータを与える必要があるがこの平滑化パラメータの設定がどの程度運用パフォーマンスに影響を与えるのか調べるため感度分析を行った．感度分析を行う平滑化パラメータの値は図 7 のような薄板スプラインにより平滑化したボラティリティサーフェスの形状をもとに平滑化が弱いと思われる水準の  $\lambda = 10^{-7}$  から平滑化が強いと思われる水準の  $\lambda = 10^{-5}$  までの 5 通りで行った．この感度分析の結果を表 7 に示す<sup>18</sup>．

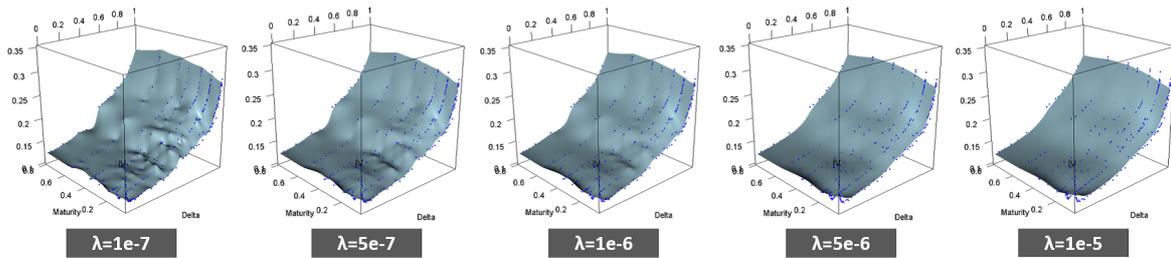


図 7: 平滑化パラメータと平滑化したボラティリティサーフェス (S&P500 : 2013 年 9 月 3 日)

表 7: 平滑化パラメータの感度分析：運用パフォーマンス

平滑化パラメータ	シャープレシオ				CVaR レシオ			
	4 年	5 年	6 年	Long	4 年	5 年	6 年	Long
1e-7 ( $= 10^{-7}$ )	0.288	0.312	0.318	0.345	0.275	0.307	0.319	0.347
5e-7 ( $= 5 \times 10^{-7}$ )	0.288	0.310	0.317	0.344	0.276	0.305	0.318	0.346
1e-6 ( $= 10^{-6}$ )	0.289	0.312	0.318	0.346	0.276	0.307	0.320	0.349
5e-6 ( $= 5 \times 10^{-6}$ )	0.288	0.312	0.317	0.343	0.275	0.306	0.317	0.344
1e-5 ( $= 10^{-5}$ )	0.290	0.313	0.318	0.345	0.277	0.308	0.318	0.347

分析を行った範囲では平滑化パラメータの違いによる運用パフォーマンスの違いはシャープレシオで見ても CVaR レシオで見てもわずかであった．平滑化したボラティリティサーフェスの形状をみれば今回設定したように，平滑化パラメータを自然な範囲で設定する限り運用パフォーマンスへの影響はほとんどないといえる．よって，TPS 法の平滑化パラメータの影響は実用上は十分に小さいと判断し，以降の分析では平滑化パラメータの値を  $\lambda = 10^{-6}$  に設定した場合の結果を記載する．

### 6.2.2. 分析 B-1：満期依存性の解消方法の違いによる運用パフォーマンスの比較

表 8 に既存の 2 つの満期依存性解消法と本研究で提案する TPS 法のリターンの効率性を示す．

分析を行ったすべてのケースにおいて，実現リターンのシャープレシオも CVaR レシオも TPS 法により満期依存性を解消した場合が最も高かった．また，既存の 2 手法を比較するとパラメトリック法が PBS 法と比較して優れていた．この結果は，2.2.4 項で示した市場データに対するフィッティングの優れた順と一致している．このことから TPS 法では，市

<sup>18</sup>分析 B ではインプライド分布はリスク調整を行わないため，パラメータ推定期間はインプライド分布自体には影響せず，ヒストリカル分布とコピュラのパラメータに影響する．

表 8: 分析 B-1 : 運用パフォーマンス

満期依存性解消法	シャープレシオ				CVaR レシオ			
	4年	5年	6年	Long	4年	5年	6年	Long
パラメトリック法	0.284	0.306	0.311	0.337	0.271	0.299	0.309	0.338
PBS 法	0.283	0.303	0.309	0.332	0.268	0.293	0.301	0.326
TPS 法	0.289	0.312	0.318	0.346	0.276	0.307	0.320	0.349

場参加者の予測をより適切に反映できるようになったことにより、運用パフォーマンスを向上させることができたと考えられる。

### 6.2.3. 分析 B-2 : インプライド分布の適用資産の違いによる運用パフォーマンスの比較

TPS 法において満期依存性を解消した上でインプライド分布を適用する資産を変更した場合のリターンの効率性を表 9 に示す (分布名は表 3 を参照せよ)。

表 9: 分析 B-2 : 運用パフォーマンス

分布名	シャープレシオ				CVaR レシオ			
	4年	5年	6年	Long	4年	5年	6年	Long
Historical DLN	0.238	0.251	0.258	0.314	0.219	0.232	0.238	0.307
Historical GH	0.241	0.252	0.285	0.315	0.223	0.235	0.272	0.307
Implied JP	0.265	0.297	0.307	0.341	0.252	0.287	0.302	0.339
Implied US	0.261	0.265	0.266	0.317	0.245	0.250	0.249	0.313
Implied JPUS	0.289	0.312	0.318	0.346	0.276	0.307	0.320	0.349

すべての資産にヒストリカル分布を用いた場合と、満期依存性を解消して1資産にインプライド分布を適用した場合を比較すると実現リターンのシャープレシオも CVaR レシオもほとんどのケースで1資産にインプライド分布を用いた場合が優れていた。さらに、インプライド分布を1資産に適用した場合と比べ、2資産に適用した場合が分析を行ったすべてのケースでシャープレシオ、CVaR レシオ共に優れていた。この結果から、満期依存性を解消してインプライド分布の適用資産数を増やすことで運用パフォーマンスが向上することがわかった。また、1資産にインプライド分布を適用する場合、外株にインプライド分布を適用した場合に比べて内株にインプライド分布を利用した場合の運用パフォーマンスが優れていたが、分析期間における平均投資比率が内株は4%程度、外株は1%程度であったことから単に投資比率の差による影響度の違いによるものであると考えられる。

## 7. 結論と今後の課題

本研究では、インプライド分布を実務において用いる際に大きな問題となる、(1) インプライド分布のリスク調整が与える影響、(2) 満期依存性を解消し複数資産にインプライド分布を適用することの影響、という2点について検証を行うために、バックテストで運用パフォーマンスを比較した。

まず、リスク調整に関しては将来の予測分布に対してヒストリカルに推定した分布の平均の情報を付け加える役割があるが、ヒストリカルデータから適切な調整パラメータを推

定することは難しく、リスク調整することにより運用パフォーマンスは低下する傾向にあることがわかった。また、リスク調整をしない場合には分布推定の手順が減り、推定される分布もパラメータ推定期間に依らないといった資産配分に用いる上でのメリットも存在する。このことから資産配分問題にインプライド分布を用いる場合にはリスク調整せず、RNDを用いることが最適な戦略であるという結論を得た。

満期依存性を解消し複数資産にインプライド分布を適用することに関してはノンパラメトリックな手法である薄板スプラインを用いてボラティリティサーフェスを平滑化することにより満期依存性を解消する方法を提案し、既存の手法に比べて投資家の予測を適切に推定でき運用パフォーマンスが向上することを示した。さらに提案手法を用いて満期依存性を解消し、インプライド分布を適用する資産の組み合わせを変更して運用パフォーマンスを比較した。その結果、複数資産にインプライド分布を適用することにより、運用パフォーマンスが向上することを明らかにした。

今後の課題としては株式以外の他の資産クラスに対してもインプライド分布を適用し、運用パフォーマンスを検証することが考えられる。特に、債券に対してインプライド分布を適用した研究は少ないため、債券にインプライド分布を適用することで株式と同様に運用パフォーマンスが向上するか検証する必要がある。また、Ross[13]で示されているデリバティブの価格のみを用いて実世界における将来の原資産価格に関する分布を推定できるという理論 (Recovery Theorem) も興味深い。ヒストリカルデータを用いずにデリバティブ価格から実世界におけるインプライド分布を推定することで将来の期待収益率を適切に推定することができれば、RNDを用いた場合に比べて優れた運用パフォーマンスが実現することが期待される。

## 参考文献

- [1] Y. Ait-Sahalia and M.W. Brandt: Consumption and portfolio choice with option-implied state price. *NBER Working Paper*, **13854** (2008).
- [2] A. Alentorn and S. Markose: Removing maturity effects of implied risk neutral densities and related statistics. *Economics Discussion Papers*, **609** (2006).
- [3] R.R. Bliss and N. Panigirtzoglou: Testing the stability of implied probability density functions. *Journal of Banking & Finance*, **26-2** (2002), 381–422.
- [4] R.R. Bliss and N. Panigirtzoglou: Option-implied risk aversion estimates. *The Journal of Finance*, **59-1** (2004), 407–446.
- [5] P. Christoffersen and K. Jacobs: The importance of the loss function in option valuation. *Journal of Financial Economics*, **72-2** (2004), 291–318.
- [6] B. Dumas, F. Fleming, and R. Whaley: Implied volatility functions: empirical tests. *Journal of Finance*, **53** (1998), 2059–2106.
- [7] P.L. Fackler and R. King: Calibration of option-based probability assessments in agricultural commodity markets. *American Journal of Agricultural Economics*, **72-1** (1990), 73–83.
- [8] 枇々木規雄, 田辺隆人: ポートフォリオ最適化と数理計画法 (朝倉書店, 2005).
- [9] V. Humphreys and J. Noss: Estimating probability distributions of future asset prices: empirical transformations from option-implied risk-neutral to real-world density func-

- tions. *Bank of England Working Paper*, 455 (2012).
- [10] 木村嘉明, 枇々木規雄: インプライド分布を用いた多期間最適資産配分モデル. 日本金融・証券計量・工学学会 夏季大会予稿集, (2010), 215–226.
- [11] A. Kostakis, N. Panigirtzoglou, and G. Skiadopoulos: Asset allocation with option-implied distributions: a forward-looking approach. *Working Paper*, (2009).
- [12] X. Liu, M.B. Shackleton, S.J. Taylor, and X. Xu: Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions. *Journal of Banking & Finance*, **31-5** (2007), 1501–1520.
- [13] S.A. Ross: The recovery theorem. *Journal of Finance*, Forthcoming, Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2199487>.
- [14] M.B. Shackleton, S.J. Taylor, and P. Yu: A multi-horizon comparison of density forecasts for the S&P 500 using index returns and option prices. *Journal of Banking & Finance*, **34-11** (2010), 2678–2693.
- [15] V. K. Singh, N. Ahmad, and P. Pachori: Empirical analysis of GARCH and practitioner Black-Scholes model for pricing S&P CNX Nifty 50 index options of India. *Decision*, **38-2** (2011), 51–67.
- [16] 竹澤邦夫: みんなのためのノンパラメトリック回帰(上・下)(吉岡書店, 2003).
- [17] 戸坂凡展, 吉羽要直: コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説. *金融研究*, **24-2** (2005), 115–162.
- [18] V. Zdrovenin and J. Pezier: Does the information content of option prices add value for asset allocation?. *ICMA Centre Discussion Papers in Finance*, **3** (2011).

枇々木 規雄

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1

E-mail : hibiki@ae.keio.ac.jp

## ABSTRACT

OPTIMAL ASSET ALLOCATION MODEL  
WITH IMPLIED DISTRIBUTIONS FOR MULTIPLE ASSETS

Takuya Kiriu    Norio Hibiki  
*Keio University*

Recently, asset allocation problems with implied probability distribution have been studied. Implied distribution can be derived from option prices of the underlying asset. These studies showed that the use of the implied distribution is superior to the historical distribution from the viewpoint of investment performance. However, there are no previous works with respect to the two important practical problems, (1) the effect of risk adjustment to the implied distribution and (2) the effect of using implied distributions of multiple assets with maturity effects removed. This is one of the reasons that historical distributions are mainly employed for asset allocation problem in practice. Therefore, we conduct the analysis for these two problems in our paper. The results of several back tests show the risk adjustment using historical data makes investment performance worse. We propose the alternative method of removing maturity effect associated with implied distributions. The method is based on thin plate splines, which is a spline-based technique for data interpolation and smoothing. We compare it with existing methods from the viewpoint of investment performances. Moreover, we examine the investment performances for some combinations of assets with implied distributions. The results show that investment efficiency can be improved by utilizing implied distribution for multiple assets.