

多期間確率計画モデルの年金 ALM への適用¹

多田羅 智之 (株)野村総合研究所 tatarata@msj.biglobe.ne.jp

枇々木 規雄 慶應義塾大学理工学部 hibiki@ae.keio.ac.jp

1 はじめに

現在、代表的な企業年金制度である厚生年金基金および適格退職年金では、バブル崩壊以降の景気の低迷、歴史的な低金利政策による運用環境の悪化、そして、急速な少子高齢化社会への移行などによって、一部では年金資産の積立不足が生じ、その不足金の償却費用の発生や保険料率の上昇などの問題が発生している。

このような状況では、多期間にわたり給付債務の発生状況を正確に把握し、適正な流動性を確保したもとの、資産を運用するといった、資産・負債の一元的管理運営、つまり、年金 ALM (Asset and Liability Management) がよりいっそう求められてきている。年金基金は、掛金を集めて株式や債券などで運用し、その運用益を年金の支払いに充当している。これらに対する ALM は、それらのキャッシュ・フローを考慮したモンテカルロ・シミュレーションを行うことによってリスク評価を行う手法が中心である。その一方で、資産運用は将来の負債に関するキャッシュ・フローを考慮して、長期的に最適な資産配分計画が策定される必要がある。年金 ALM 問題は「負債のキャッシュ・フローも考慮した資産配分問題」としてとらえることができ、最適化モデルは明示的に最適な方策 (最適ポートフォリオ) を見出すことができる。

従来、多期間にわたる年金 ALM の最適ポートフォリオを求めるためには、シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルが中心となって発展している。W.T. Ziemba and J.M. Mulvey[12] には、全体的なサーベイを含めて、年金基金や保険会社などの ALM に対する最適化モデルが数多く含まれている。シナリオ・ツリー型最適化モデルは近年、コンピュータの高速化と解法アルゴリズムの発展に伴い、大規模な問題を解くことが可能になったが、それでも、不確実性を詳細に記述しようとする、問題の規模が指数的に大きくなってしまふ。特に、年金 ALM のように取り扱う確率変数が多い場合は、不確実性を詳細に記述することは難しい。

そこで本論文は、取り扱う確率変数が多い場合でも、その確率的変動を詳細に表現することが可能なシミュレーション型最適化モデルを、年金 ALM に適用することを提案する。そして、数値実験を行うことにより、その有用性を検証することを目的とする。

確率計画モデルを組み込んだ年金 ALM のプロセスは図 1 で描くことができる。金融市場モデルをもとに資産モデルおよび負債モデルによって確率計画モデルへの入力パラメータを生成する。そして、問題を解くことによって年金 ALM のための政策ポートフォリオを決定する。

¹本研究は慶應義塾大学大学院理工学研究科 (管理工学専攻) における修士論文作成の際に行われたものである。ここで示された内容は、野村総合研究所としての見解をいかなる意味でも表さない。記述された内容についての責任は著者の一人、枇々木にある。

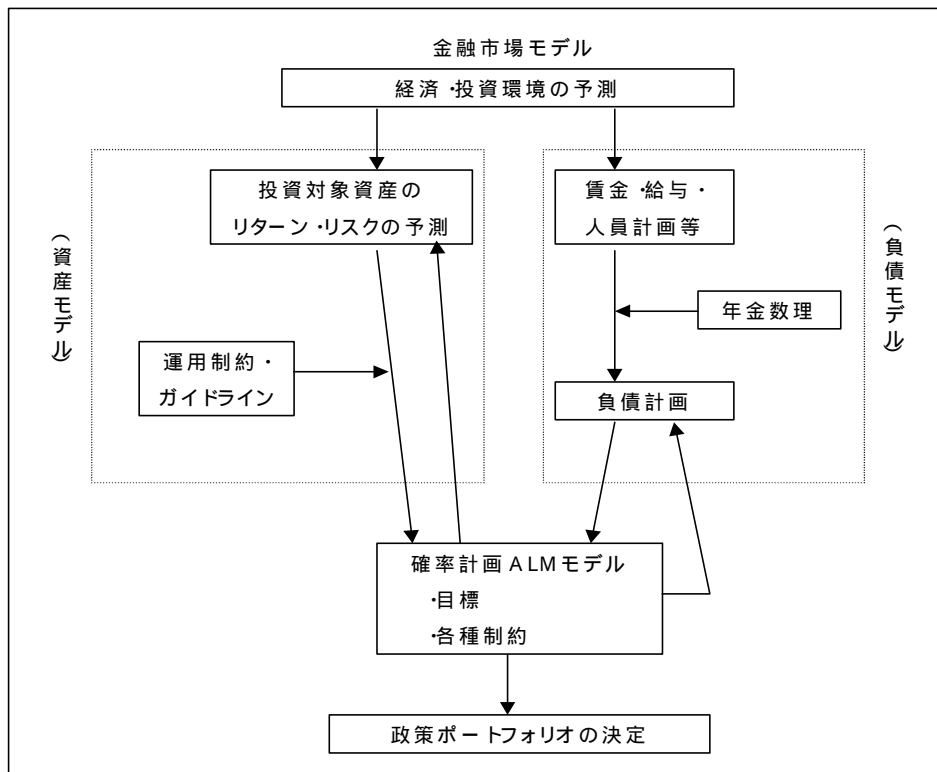


図 1：確率計画モデルを組み込んだ年金 ALM

本論文の構成は以下の通りである。2節では金融市場のモデル化を行い、3節では本研究で用いる仮想的な年金基金を設定し、年金数理計算を示す。4節ではシミュレーション型多期間確率計画モデルの年金 ALM への適用を説明する。最後に5節で数値実験の結果、6節で結論と今後の課題を述べる。

2 金融市場モデル

年金 ALM 分析が、政策アセット・ミックスの決定に有益な情報を提供するには、最適化システム自体の信頼性はもとより、金融市場に関して適切な予測を行う金融市場モデルが必要である。特に年金 ALM においては、投資対象資産の期待リターンとリスク、負債の計算に必要となるインフレ率等を正しく予測する金融市場モデルが必要となる。

本論文では年金 ALM の計画期間は5期間(1期間=1年)とし、運用対象資産を、危険資産として株式(TOPIX)、債券(NomuraBPI)、無リスク資産としてコール運用・調達(有担保翌日物)の3資産とする。本論文では、リスク-リターンのトレードオフ関係を満たし、インフレ率を明示的に扱うことができるビルディングブロック法を採用する。

2.1 要素分解

金融市場モデルの説明の為に以下の記号を定義する²。ただし、チルドは確率変数であることを意味する。

r_1 : 期間1のコールレート。

\tilde{r}_t : 期間 t のコールレート。($t = 2, \dots, 5$)

\tilde{S}_t : 期間 t の株式の投資収益率。($t = 1, \dots, 5$)

\tilde{B}_t : 期間 t の債券の投資収益率。($t = 1, \dots, 5$)

\widetilde{RPs}_t : 期間 t の株式のリスクプレミアム。($t = 1, \dots, 5$)

\widetilde{RPb}_t : 期間 t の債券のリスクプレミアム。($t = 1, \dots, 5$)

\tilde{I}_t : 期間 t のインフレ率。($t = 1, \dots, 5$)

\widetilde{Rr}_1 : 期間1の実質金利。

\widetilde{Rr}_t : 期間 t の実質金利。($t = 2, \dots, 5$)

投資対象資産の収益率を以下の要素に分解する。インフレ率の変動に対して期待リターンを整合的にすることにくわえて、年金基金の負債や掛金・給付金の計算に必要なインフレ率を明示的に扱うために、コールレートを実質金利とインフレ率に分解する。

$$r_1 = \widetilde{Rr}_1 + \tilde{I}_1 \quad (1)$$

$$\tilde{r}_t = \widetilde{Rr}_t + \tilde{I}_t \quad (2)$$

$$\tilde{S}_t = \tilde{r}_t + \widetilde{RPs}_t = \widetilde{Rr}_t + \tilde{I}_t + \widetilde{RPs}_t \quad (3)$$

$$\tilde{B}_t = \tilde{r}_t + \widetilde{RPb}_t = \widetilde{Rr}_t + \tilde{I}_t + \widetilde{RPb}_t \quad (4)$$

(1) 式は $r_1 - \tilde{I}_1$ として求める。

2.2 要素分析

各資産の収益率を(2)~(4)式のような要素に分解する。それぞれの要素の期待値、標準偏差、相関行列を過去データ(1974年~1998年)から推定する。

また、過去のデータの分析から、株式のリスクプレミアムと債券のリスクプレミアムは自己相関係数は小さかったので、期間ごとに無相関とし、実質金利とインフレ率の自己相関係数は大きかったので1次の自己相関モデルを適用することにする。実質金利、インフレ率のモデル化のために、さらに以下の記号を導入する。

α_I : インフレ率の自己相関モデルの切片

β_I : インフレ率の自己相関モデルの係数

$\tilde{\epsilon}_{I,t}$: インフレ率の自己相関モデルの残差

α_{Rr} : 実質金利の自己相関モデルの切片

²すべての記号の単位は年率、%である。

β_{Rr} : 実質金利の自己相関モデルの係数

$\tilde{\epsilon}_{Rr,t}$: 実質金利の自己相関モデルの残差

インフレ率、実質金利は以下のようにモデル化できる。

$$\tilde{I}_t = \alpha_I + \beta_I \times \tilde{I}_{t-1} + \tilde{\epsilon}_{I,t} \quad (t = 1, \dots, 5) \quad (5)$$

$$\tilde{Rr}_t = \alpha_{Rr} + \beta_{Rr} \times \tilde{Rr}_{t-1} + \tilde{\epsilon}_{r,t} \quad (t = 2, \dots, 5) \quad (6)$$

各要素の期待値、標準偏差とインフレ率、実質金利の自己相関モデルのパラメータを過去データ(1975年～1998年)から推定すると以下のようにまとめることができる。

$$\widetilde{RPs}_t \sim N(2.5, 20.4), \quad (t = 1, \dots, 5) \quad (7)$$

$$\widetilde{RPb}_t \sim N(2.5, 4.5), \quad (t = 1, \dots, 5) \quad (8)$$

$$\tilde{I}_t = 1.0 + 0.5 \times \tilde{I}_{t-1} + \tilde{\epsilon}_{I,t}, \quad (t = 1, \dots, 5) \quad (9)$$

$$\tilde{Rr}_1 = r_1 - \tilde{I}_1 \quad (10)$$

$$\tilde{Rr}_t = 1.4 + 0.5 \times \tilde{Rr}_{t-1} + \tilde{\epsilon}_{r,t}, \quad (t = 2, \dots, 5) \quad (11)$$

初期値(1998年を期間1とした場合)

$$I_0 = 1.8$$

$$r_1 = 0.6$$

以上より、モンテカルロシミュレーション法によって発生させた乱数を(7)～(9)式、(11)式に代入することによって各要素を求め、それら各要素を(2)～(4)式に代入することで5期間分の株式の収益率、債券の収益率、コールレート、インフレ率を生成することができる。

2.3 投資家のビューについて

最後に投資家のビュー(投資家が独自に持つ将来像)について説明する。(7)、(8)式からわかるように、株式リスクプレミアムと債券リスクプレミアムについて、標準偏差は株式のほうがはるかに大きいにもかかわらず、期待値はほぼ同じ値³になっている。これは、リスク-リターンのトレードオフ関係を満たしていない。この状況は計測期間を変更することによって解消することが可能である。しかし、この方法は恣意的であり、計測期間も使用可能な最大計測期間よりも短くなる。そこで、各要素の相関行列は過去データから推定するが、各リスクプレミアムに関しては過去の推定値ではなく投資家の持つビューを反映させた値を用いることを提案する。この方法も恣意的であるが、相関構造や自己相関モデルのパラメータを、利用できる最大の計測期間から推定することができるという利点がある。本論文ではリスクプレミアムを過去データ(1975年～1998年)から求めた値と、投資家の持つビューを反映させた値の両方を用いる。

³小数点2桁以上では株式のリスクプレミアムのほうが若干大きくなる。

3 負債モデル

この節では、分析対象とする年金基金を単純化し、確率計画 ALM モデルに必要なインプットデータ (掛金総額、年金給付総額、責任準備金等) の具体的な算出方法を示す。

3.1 設定条件

実際の年金基金を忠実にモデル化するのは複雑である。そこで、本来の目的を損なうことなく、年金財政計算を簡単にするための仮定をおき、分析対象とする年金基金を単純化することが望ましい。まず、はじめに、従業員の生存脱退および死亡はないものと仮定する。この仮定により、従業員の年金基金からの脱退を考える必要がなくなる。規模の大きい年金基金では脱退率や死亡率は安定しているとので、この仮定によって、年金 ALM の本質を損なうことはないと考えられる。

さらに、財政計算を簡単にするために、年金基金を以下のように設定する。

- 確定年金⁴とする。
- 年齢と勤続年数は1対1対応とする。
- 年金給付は最終給与に比例する最終給与比例制を採用する。
- 財政方式を予測単位積増方式を採用する。

年金の種類を確定年金にすることによって、受給者の死亡を考慮する必要がなくなる。また、最終給与比例制と財政方式として予測単位積増方式を採用することによって、給与体系に関して、退職年齢時の給与 (最終給与) 以外は必要なくなる。また、年金財政計算をする際に必要なその他の設定として、最終給与はベースアップによって変動すると設定する。

3.2 年金財政計算

年金財政計算をおこない、各年度ごとの、掛金総額、年金給付総額、責任準備金、そして不足金を以下のように求める (図2)。

3.3 ベースアップ率とインフレ率

給与の増加には、賃金体系に組み込まれ従業員の年齢や勤続年数に応じて自動的に上がる定期昇給と、物価上昇による賃金の目減りを防ぐためのベースアップによる増加が存在する。3.2項では、特にベースアップ率の算出に関して説明しなかったが、ベースアップの存在理由から、ベースアップ率とインフレ率は密接な関係があることがわかる。そこで、この年金財政計算する際に用いるベースアップ率を (12) 式で示すように、1年前のインフレ率の線形関数とすることにする。つまり、前年度のインフレ率に応じて本年度のベースアップ率が決まる仕組みにする。

$$BU_t = \beta \times I_{t-1} \quad (12)$$

ここで、注目すべきことは、現時点では将来のインフレ率は不確定であり、本論文ではモンテカルロシミュレーションによって生成され、シミュレーションパスに依存してきまる確率変数ということである。したがって、インフレ率と線形関係にあるベースアップ率も0時点以降は経路に

⁴年金受給者の生死に関係なく、あらかじめ定めた一定期間支払われる年金のこと。

依存することになる((13)式)。同じ論理で、掛金総額、年金給付総額、責任準備金、そして不足金も現時点以降はシミュレーションパスに依存して決まることになる。

$$BU_t^{(i)} = \beta \times I_{t-1}^{(i)} \quad (13)$$

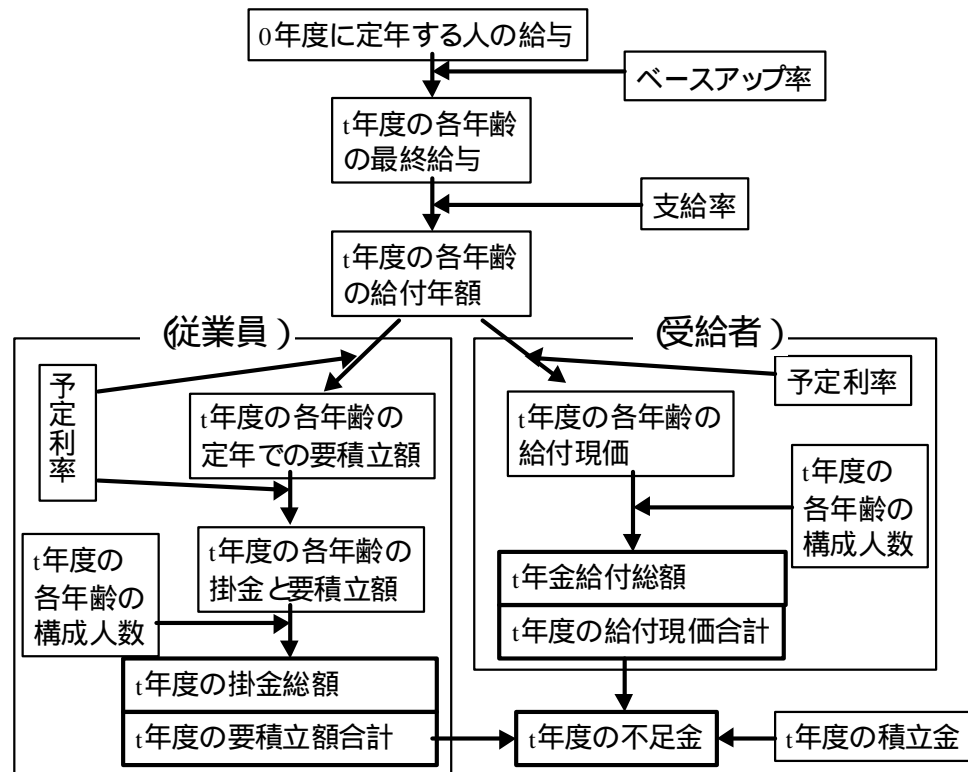


図 2：財政計算のフロー図

4 最適化フレームワーク

この章では、資産モデル、負債モデルからのインプットデータをもとに、最適ポートフォリオを決定するための最適化フレームワークを説明する。

年金 ALM のように、長期的な観点から運用方針を決める必要があり、その期間中に発生するキャッシュフローや計量される不足金等をモデルに明示的に組み込むためには、多期間モデルとして定式化する必要がある。従来、多期間にわたる最適ポートフォリオを求めるためには、シナリオツリー型最適化モデルが用いられてきた。シナリオツリー型最適化モデルは近年、コンピュータの高速化と解法アルゴリズムの発展に伴い、大規模な問題を解くことが可能になったが、それでも、不確実性を詳細に記述しようとする、問題の規模が指数的に大きくなってしまふ。特に、年金 ALM のように取り扱う確率変数が多い場合は、不確実性を詳細に記述することは難しい。

そこで、本論文は、モデルに組み込まれる確率変数が多い場合でも確率的変動を精密に表現することが可能なシミュレーション型多期間確率計画モデル[1]を用いて、年金 ALM の定式化を行う。

4.1 年金 ALM の定式化

年金 ALM の本質は、掛金や年金給付の発生状況と負債を把握し、それらの情報をもとに、積立不足の状態に陥らないような運用方針を決定することである。したがって、目的関数は、不足金の期待値の最小化とする。年金 ALM のモデル化を行うために以下の記号を導入する。

決定変数

z_{jt} : t 時点の取引後の危険資産 j の投資量, ($j = 1, \dots, n$; $t = 0, \dots, T - 1$)

yb_{jt} : t 時点の危険資産 j の購入量, ($j = 1, \dots, n$; $t = 0, \dots, T - 1$)

ys_{jt} : t 時点の危険資産 j の売却量, ($j = 1, \dots, n$; $t = 0, \dots, T - 1$)

vm_0 : 0 時点のコールマネーの額, ($i = 1, \dots, I$)

vl_0 : 0 時点のコールローンの額, ($i = 1, \dots, I$)

$vm_t^{(i)}$: t 時点の経路 (i) のコールマネーの額, ($t = 1, \dots, T - 1$; $i = 1, \dots, I$)

$vl_t^{(i)}$: t 時点の経路 (i) のコールローンの額, ($t = 1, \dots, T - 1$; $i = 1, \dots, I$)

$q_t^{(i)}$: t 時点の経路 (i) の不足金, ($t = 1, \dots, T$; $i = 1, \dots, I$)

従属変数

$W_t^{(i)}$: t 時点の経路 (i) の富, ($t = 1, \dots, T$; $i = 1, \dots, I$)

パラメータ

$\rho_{jt}^{(i)}$: t 時点の経路 (i) の危険資産 j の額面を 1 としたときの相対価格,

($j = 1, \dots, n$; $t = 1, \dots, T$; $i = 1, \dots, I$)

$r_t^{(i)}$: 時点 t の経路 (i) のコールレート, ($t = 1, \dots, T - 1$; $i = 1, \dots, I$)

γ : 取引コスト率

δ : コールスプレッド

λ : コールマネーの借り入れ制約

$CIN_t^{(i)}$: t 時点の経路 (i) の掛金総額, ($t = 1, \dots, T - 1$; $i = 1, \dots, I$)

$COU_t^{(i)}$: t 時点の経路 (i) の年金給付総額, ($t = 1, \dots, T - 1$; $i = 1, \dots, I$)

$d_t^{(i)}$: t 時点の経路 (i) の負債, ($t = 1, \dots, T$; $i = 1, \dots, I$)

Dr : 予定利率

T : 計画最終時点

(1) t 時点での危険資産 j の売買決定 ($t = 1, \dots, T - 1$)

$$z_{jt} = z_{jt-1} + yb_{jt} - ys_{jt} \quad (14)$$

t 時点での危険資産 j の取引後の投資量 z_{jt} は取引前の投資量 z_{jt-1} に購入量 yb_{jt} を加えるか、売却量 ys_{jt} を引いた値として求められる。

(2) t 時点での資産売買に伴うキャッシュフロー・バランス ($t = 2, \dots, T - 1$)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n (1 + \gamma) \rho_{jt}^{(i)} yb_{jt} + (1 + r_{t-1}^{(i)} + \delta) vm_{(t-1)}^{(i)} + vl_t^{(i)} + COUT_t^{(i)} \\ &= \sum_{j=1}^n (1 - \gamma) \rho_{jt}^{(i)} ys_{jt} + (1 + r_{t-1}^{(i)} - \delta) vl_{(t-1)}^{(i)} + vm_t^{(i)} + CIN_t^{(i)} \end{aligned} \quad (15)$$

左辺は危険資産 j の購入、 $t - 1$ 時点のコールマネーの返済、コールローンによる運用、そして年金給付総額であり、資金の使途(キャッシュアウトフロー)を表す。右辺は危険資産 j の売却によるキャッシュインフロー、 $t - 1$ 時点のコールローンの受取、コールマネーによる調達、そして掛金総額を加えたもので、資金の源泉を表す。これは資金の使途と源泉は等しくならなければならないことをあらわす制約式である。

(3) t 時点における富 ($t = 2, \dots, T$)

$$W_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n (1 - \gamma) \rho_{jt}^{(i)} z_{jt-1} + (1 + r_{t-1}^{(i)} - \delta) vl_{t-1}^{(i)} - (1 + r_{t-1}^{(i)} + \delta) vm_{t-1}^{(i)} \quad (16)$$

t 時点の富は t 時点での危険資産の売却価値 $\sum_{j=1}^n (1 - \gamma) \rho_{jt} z_{jt-1}$ に $t - 1$ 時点でのコールローン運用の受取額 $(1 + r_{t-1} - \delta) vl_{t-1}$ を加え、 $t - 1$ 時点でのコールマネー調達の返済額 $(1 + r_{t-1} + \delta) vm_{t-1}$ を差し引いたものとして求められる。

(4) 目的関数

$$\text{Minimize } \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T \frac{q_t^{(i)}}{(1 + Dr)^t} \quad (17)$$

$$\text{subject to } W_t^{(i)} + q_t^{(i)} \geq d_t^{(i)} \quad (18)$$

$$q_t^{(i)} \geq 0 \quad (19)$$

資産が負債を下回る額(不足金)を各時点毎に計算しそれらを予定利率で0時点に割り引いたものを合計する。それらの合計値の経路平均の最小化を目的とする。

(5) その他の制約

$$vm_0 \leq W_0 \times \lambda \quad (20)$$

$$vm_t^{(i)} \leq W_0 \times \lambda \quad (21)$$

ここでは、現金の借入を0時点の資産の λ 倍までという制約を置くことにする。これは、現金を無限に借り入れてより有利な資産に投資する可能性を削除するための制約である。その他に、決定変数の非負条件が必要である。

線形計画モデルは大規模な問題でも高速に最適解を導出することができ、実務的にも有効なモデルである。しかし、規模が増加にともない、最適解を求めるのに要する計算時間も増える。したがって、線形計画モデルの規模の大きさ、特に、制約式の本数、決定変数の個数は実務に応用するうえで非常に重要である。この問題の規模を表1に示す。

表 1 : 問題の規模

	本数・個数
制約式の本数	$T(4n + 5I) + 4(1 - I)$
決定変数の個数	$3T(n + I) + 2(1 - I)$

5 数値実験

この章では、数値実験の結果を示し、この論文で提案した確率計画モデルがうまく機能するかを検証する。数値実験は、数理計画ソフトウェア NUOPT(Ver. 3.1) を用いる⁵。また、乱数の生成には Mersenne Twister を用いる。

5.1 設定条件

① 金融市場モデルに関する設定条件

株式リスクプレミアムと債券リスクプレミアムに関して、過去データからの推定値だけでなく、2タイプの投資家を想定し、表2に示すようなリスクプレミアムのビューを持っていると仮定する。

表 2 : 数値実験で用いるリスクプレミアムのケース

	株式リスクプレミアム (年率、%)	債券リスクプレミアム (年率、%)	説明
ケース1	2.5	2.5	過去データ(1975年～1998年)からの推定値
ケース2	5.0	2.5	想定した投資家1が持つリスクプレミアムの予想
ケース3	7.5	2.5	想定した投資家2が持つリスクプレミアムの予想

② 負債モデルに関する設定条件

- 予定利率は4.5%とする。
- ベースアップ率を決めるためのインフレ率の係数(β)は0.1とする((12)式,p.5)。

③ 確率計画 ALM モデルに関する設定条件

- 経路数は1000本とする。
- 売買コスト率(γ)の基本値を0.005(0.5%)とする。
- コールスプレッド(δ)の基本値を0.0005(0.05%)とする。
- コールマネーの借り入れ制約(λ)を0.1(10%)とする。
- 0時点の意思決定を行う前に保有する資産(初期富)はすべて現金で持っているとする。初期富は、負債モデルから計算される0時点の負債に対する割合で示し、基本値はその90%とする。これは、現実の年金基金が不足金を抱えていることを反映させるためである。

⁵NUOPTは(株)数理システムの製品である。

5.2 実験の概要

表2にある3つのリスクプレミアムをもとに、初期富の負債に対する比率、売買コスト率、そしてコールスプレッドをそれぞれパラメトリックに動かし、解がどのような動きをするのかを分析することを目的に実験を行う。結果を把握しやすくするため、実験と結果の番号を表3に示す。

表3：実験と結果の番号

実験1	売買コスト=0(%)	…	売買コスト=5.0(%)
ケース1	結果1-1		
ケース2	結果1-2		
ケース3	結果1-3		
実験2	コールスプレッド=0(%)	…	コールスプレッド=2.0(%)
ケース1	結果2-1		
ケース2	結果2-2		
ケース3	結果2-3		
実験3	初期富=0.7	…	初期富=1.2
ケース1	結果3-1		
ケース2	結果3-2		
ケース3	結果3-3		

表3について説明する。実験1は表2の3つのリスクプレミアムのケースに対して、売買コスト率をパラメトリックに動かす実験を行うことを意味する。結果1-1は表2のケース1のリスクプレミアムのもと、売買コスト率0から5.0(%)をパラメトリックに動かした結果を示す。その時、ほかのパラメータ(コールスプレッド、初期富の比率)は基本値を用い、一定とする。

5.3 金融市場モデルと負債モデルのデータ

インフレ率、コールレートは金融市場モデルから生成されるデータである。インフレ率、コールレートのデータを表4に、負債モデルから生成される掛金総額、年金給付総額、負債のデータを表5にまとめる。ただし、表5の0時点の年金給付総額、掛金総額、負債以外はシミュレーションパス1000本の平均値である。

表4：インフレ率(%)とコールレート(%)のシミュレーション結果

		期間1	期間2	期間3	期間4	期間5
インフレ率	平均	1.91	1.97	2.00	2.02	2.03
	標準偏差	1.53	1.76	1.82	1.81	1.79
コールレート	平均	0.59	2.70	3.70	4.17	4.40
	標準偏差	0.00	1.93	2.17	2.12	2.32

表 5 : 負債モデルのシミュレーション結果 (単位:万円)

	時点0	時点1	時点2	時点3	時点4	時点5
年金給付総額	180,000	180,016	180,050	180,101	180,170	-
掛金総額	57,821	58,047	58,218	58,362	58,494	-
負債	2,899,641	2,904,451	2,908,650	2,912,681	2,916,744	2,920,930

5.4 基礎実験

基礎実験は、初期富の比率、売買コスト率、コールスプレッドの基本値を用いた場合の結果を示す。また、グラフで示されている記号の意味は以下のとおりである。

$$z[j\ t] : \begin{cases} j = 1 \text{ の場合 } & t \text{ 時点の株式の保有量 (投資基準価額)} \\ j = 2 \text{ の場合 } & t \text{ 時点の債券の保有量 (投資基準価額)} \end{cases}$$

$$MeanRate[j\ t] : \begin{cases} j = 1 \text{ の場合 } & t \text{ 時点の株式の投資比率の全シミュレーションパスの平均値} \\ j = 2 \text{ の場合 } & t \text{ 時点の債券の投資比率の全シミュレーションパスの平均値} \end{cases}$$

v_l0 : 0時点のコールローン額

$vm0$: 0時点のコールマネー額

$MeanV_l[t]$: t 時点のコールローン額の全シミュレーションパスの平均値

$MeanV_m[t]$: t 時点のコールマネー額の全シミュレーションパスの平均値

$MeanF[t]$: t 時点の富の全シミュレーションパスの平均値

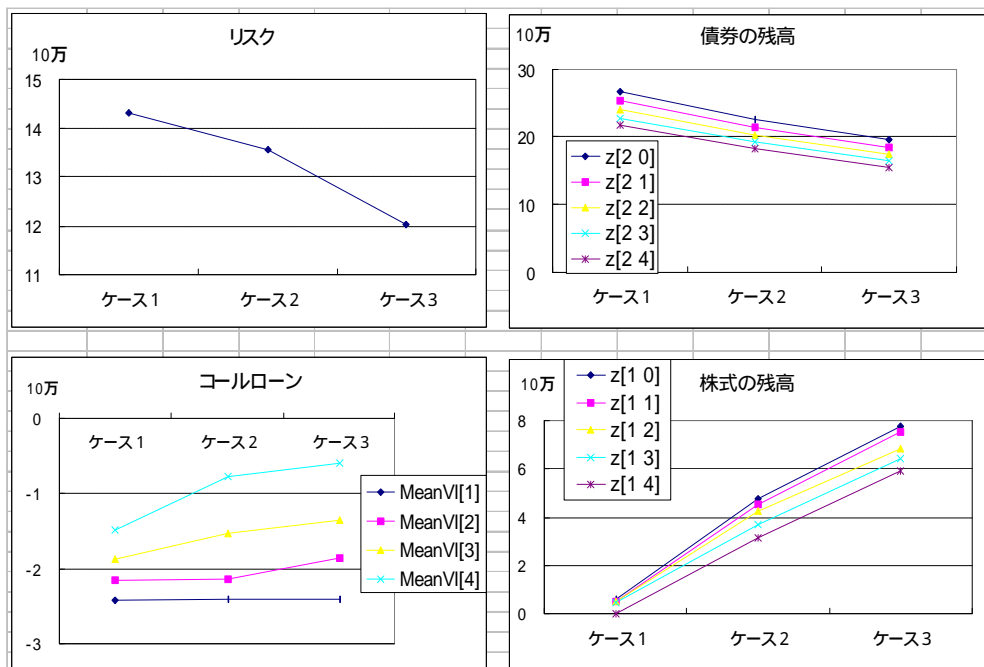


図 3 : 基礎実験

5.5 実験1

3つのリスクプレミアムの組み合わせのもと、売買コスト率をパラメトリックに動かした場合の結果を示す。

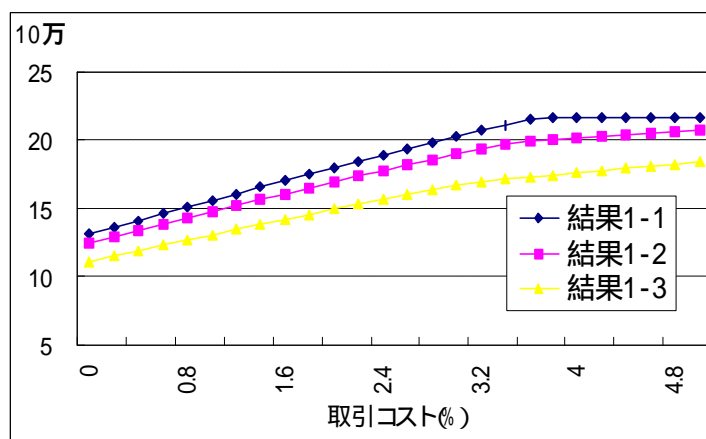


図4：リスク量(実験1)

図4より、リスクプレミアムのケースにかかわらず取引コストが大きくなるにつれ、リスク量は大きくなるのがわかる。リスク量は大きくなるのは、同じ量の危険資産の売買を行った場合、取引コスト率が大きくなれば取引コストもその分だけ大きくなるからである。ただし結果1-1の場合、コスト率が3.8%より大きくなってもしリスク量は増えていない。これは、コスト率が3.8%以上では、すべての時点で株式や債券を保有しないという戦略が最適解となり、売買コストが発生しない。したがって取引コスト率の大小に関係なく、同じリスク量になる(図5)。

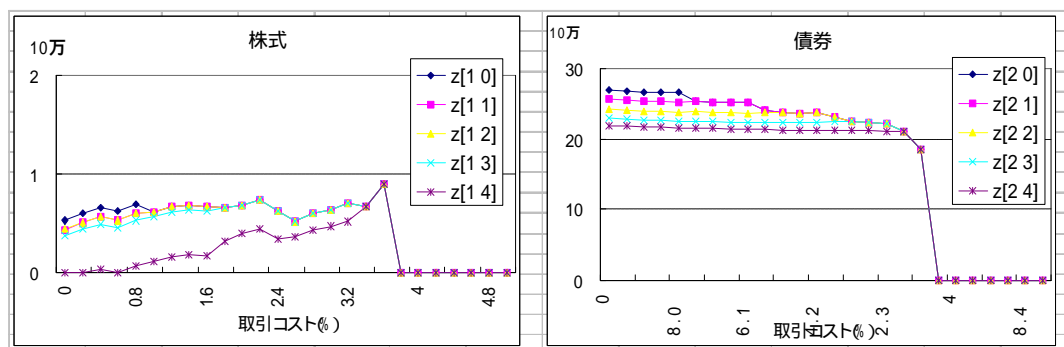


図5：株式と債券の残高(結果1-1)

図5よりケース1のリスクプレミアムの組み合わせでは、株式にはほとんど投資されないことがわかる。このように株式にほとんど投資されないのは、株式の標準偏差は債券の標準偏差よりもかなり大きいにもかかわらず、ケース1では株式と債券のリスクプレミアムが2.5%と同じなので、この設定条件のもとでは、リスクを大きくしてしまうからである。このことは、実験2の結果2-1、実験3の結果3-1についても同じでことがいえる。

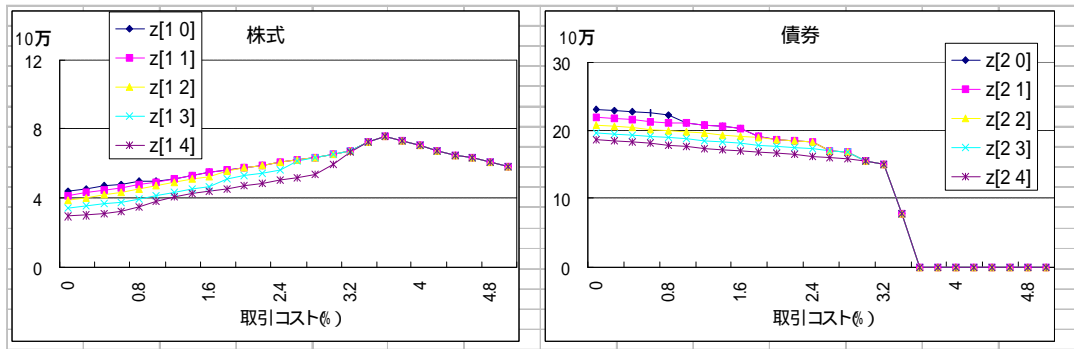


図 6：株式と債券の残高(結果 1-2)

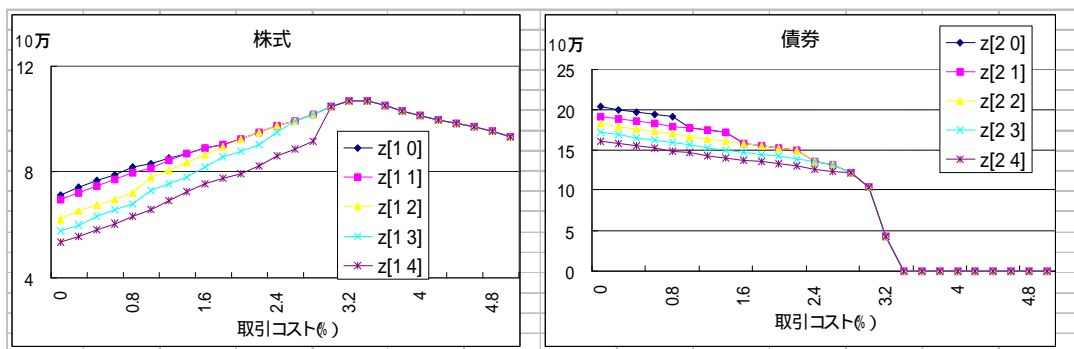


図 7：株式と債券の残高(結果 1-3)

図5～図7より、取引コスト率がある一定以上大きくなると、債券はまったく保有されず、その分コール運用されていることがわかる(図8⁶)。ところで、リスクプレミアムのケース2、売買コスト率4%、富をミッドプライス(売買コスト率を含まない)で評価した場合には、コール運用ではなく債券で運用される。本モデルでは、富を評価するとき用いる価格に、売却価格を用いるのか、ミッドプライスを用いるのかで、大きく結果が変わる。

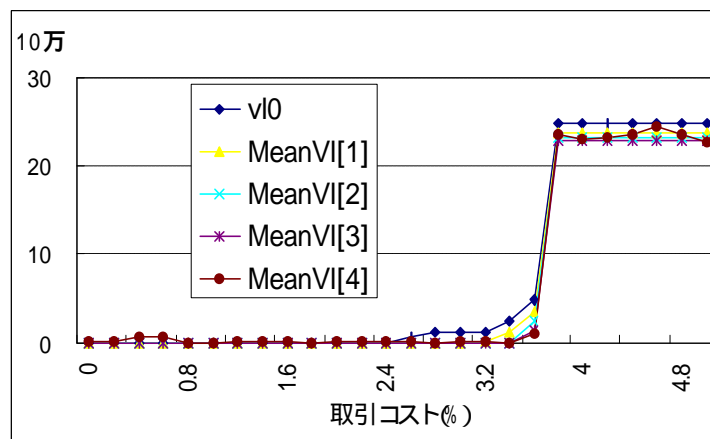


図 8：コール運用量・調達量(結果 1-1)

⁶コール運用の結果は結果1-2、結果1-3ともに結果1-1と同じグラフの形になったのでここでは省略する。

結果1-2の株式の時点ごとの残高および比率を図9に示す。系列1から系列26は順に0%から5.0%まで0.2%刻みの取引コストを示している。このグラフから、株式は保有量が一定、もしくは期間が進むにつれ保有量を減らしていることがわかる。さらにここでは示さないが、結果1-2の債券、結果1-3の株式、債券もこれに似た傾向を示している。ただし、投資比率は時間の経過に対して、一定もしくは、上昇傾向にある。つまり、売買コスト率が小さい場合に残高を減らしていくのは、相対価格の上昇による投資比率の上昇を防ぐためであると考えられる。

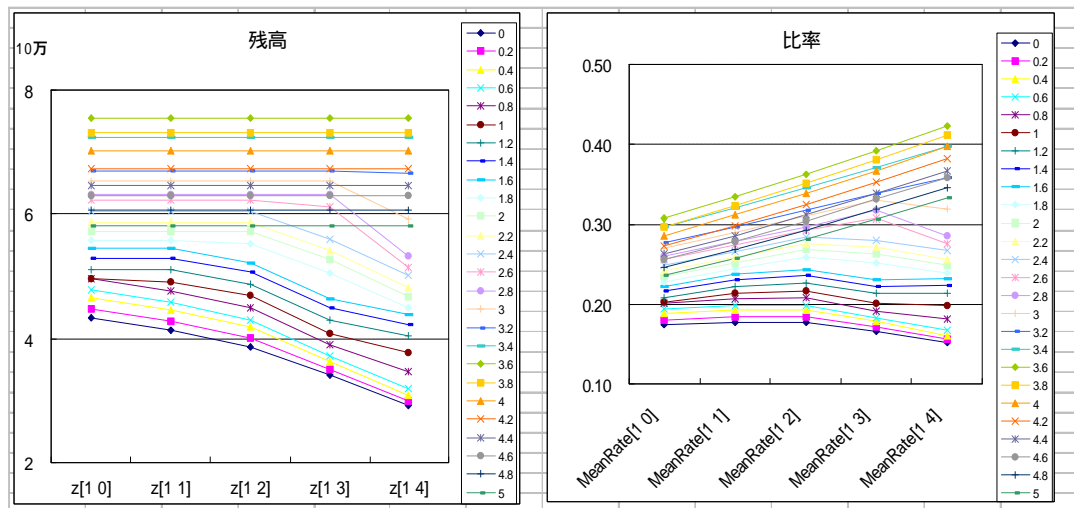


図 9 : 株式の残高および比率 (結果 1-2)

5.6 実験 2

3つのリスクプレミアムの組み合わせのもと、コールスプレッドをパラメトリックに動かした場合の結果を示す。

全般的に、結果2-1～結果2-3の違いがなかったので、グラフとして結果2-2を中心に説明する。

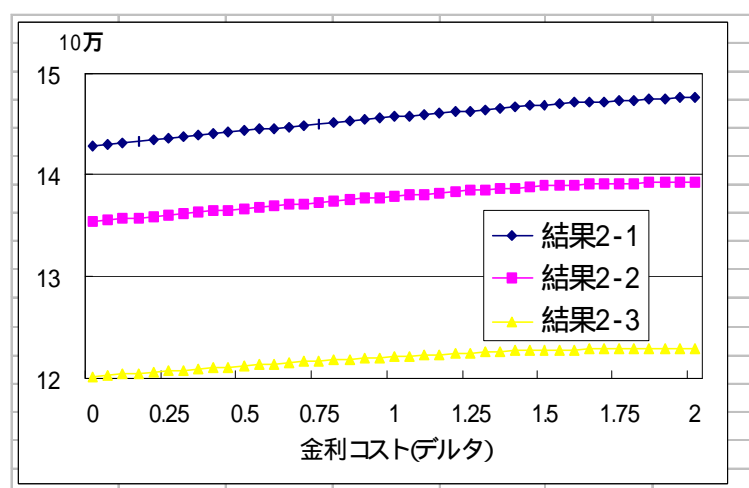


図 10 : リスク量 (実験 2)

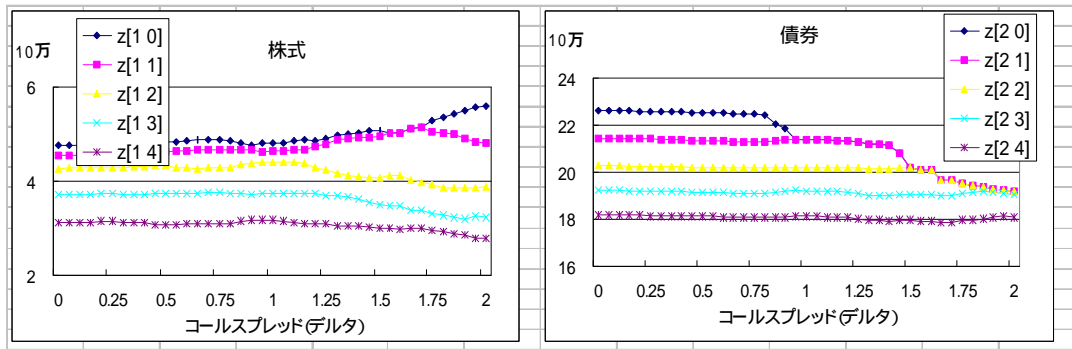


図 11 : 株式と債券の残高 (結果 2-2)

図 10 より、コールスプレッドはある範囲内で動かしても、取引コスト率と異なり、ある値を境に劇的に解の特徴が変化することはない。実際、図 11 よりコールスプレッドが変化したらとって、特に大きく解の特徴は変わらないことがわかる。

ここではのせていないが、結果 2-1、結果 2-3 に関しても、結果 2-2 と同じ特徴であったことから、コールスプレッドが 0% から 2% の変動範囲では、コールスプレッドに対する感応度は小さい事がわかる。現実的に考えて、コールスプレッドが 3% や 4% になる可能性はきわめて低いことから、コールスプレッドの変動範囲をさらに大きくして、解に対するコールスプレッドの感応度を調べる実験を行う意味はないと考えられる。

5.7 実験 3

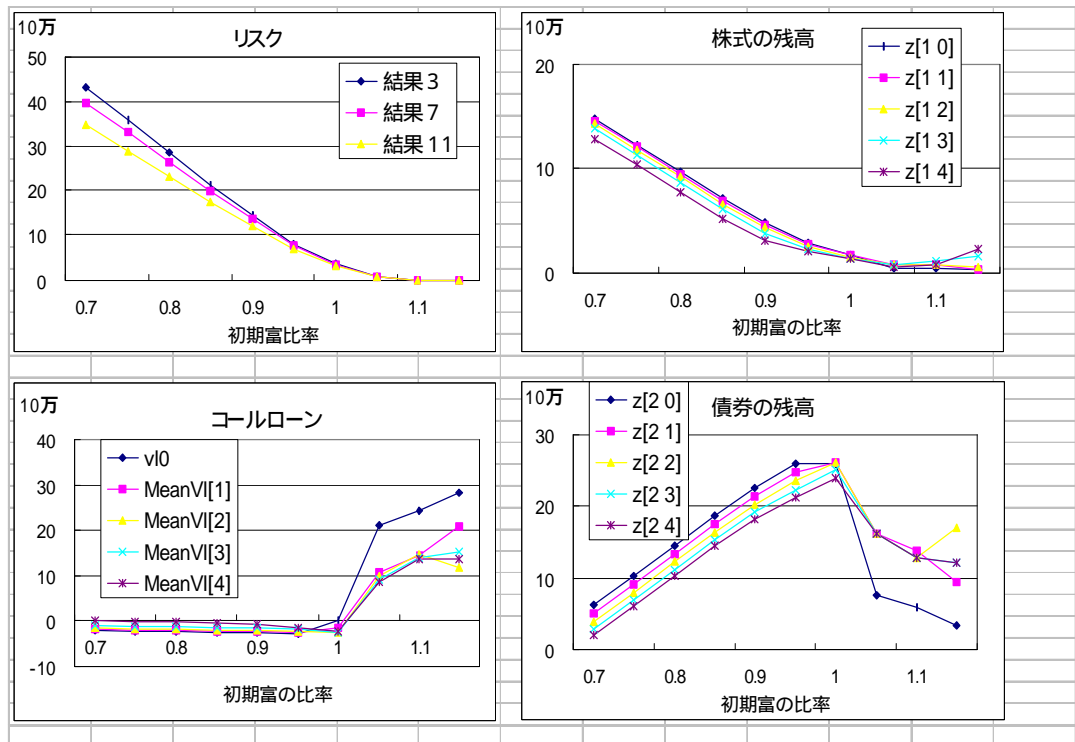


図 12 : 実験 3

3つのリスクプレミアムの組み合わせのもと、初期富をパラメトリックに動かした場合の結果を示す。

図12(左上)より、初期富の比率が大きくなるほど、リスクは小さくなる。結果3-1～結果3-3ともに初期富の比率が1.2のときにリスクは0になる。

図12のその他の図より、本論文の定式化では、年金基金の財政状況が悪いとき(初期富が小さいとき)は、株式中心に運用し、財政状況が良くなるにつれ(年金財政が初期富が大きくなるにつれ)、債券、そしてコール運用へと中心となる投資対象が変わっていくことがわかる。これは、本論文ではリスクを(22)式のように計量するからである。

$$\text{リスク} = \frac{\sum_{i=1}^I (\max\{d - W \times (1 + \mu^{(i)}), 0\})}{I} \quad (22)$$

d : 負債(ここでは単純するため経路に依存させない)

W : 富

$\mu^{(i)}$: 経路(i)の収益率

初期富が負債に対して極めて小さい場合($d \gg W$)、たとえ収益率の標準偏差は大きかったとしても、資産が負債を超えるようなシミュレーションパスはほとんど存在しないため、リスク(不足金)量は(23)式のように収益率の期待値の水準のみで決まる。よって、期待収益率の大きい資産である株式を中心に投資されることになる。

$$\begin{aligned} \text{リスク量} &= \frac{\sum_{i=1}^I (\max\{d - W \times (1 + \mu^{(i)}), 0\})}{I} \\ &\approx d - W \times (1 + \bar{\mu}) \end{aligned} \quad (23)$$

$\bar{\mu}$: 期待収益率

逆に、初期富が負債よりも大きい場合($d \ll W$)、収益率の標準偏差が大きいと富が負債を下回るようなシミュレーションパスが一定割合で存在し、不足金も発生する。しかし、収益率の標準偏差が小さいと富が負債を下回るシミュレーションパスはほとんど存在せず、不足金はほとんど発生しない。よって、標準偏差の小さいコールローンを中心に投資されることになる。

6 結論と今後の課題

本論文は、従来シナリオツリー型最適化モデルが利用されていた年金ALMの最適ポートフォリオ決定に、シミュレーション型最適化モデルを適用することを提案した。

数値実験の結果を見る限り、本論文で提案したモデルからは、直感に合う最適解が得られた。また、リスクプレミアム、売買コスト率、初期富等のパラメータに対して行った感度分析の結果も整合的に説明することができた。これらのことから、シミュレーション型多期間確率計画モデルの年金ALMへの適用は有効であり、現実世界における意思決定に役立つ情報を与えてくれると考えられる。

また、本モデルは、線形計画問題として定式化されるので、大規模な問題を解くことができ、計算機上の実装も容易である。年金ALMを行う実務家にとって、標準的なツールを用いて問題を解

くことができるというのは、非常に重要な意味を持つ。

本論文は、入力パラメータの感度分析が中心に数値実験を行ったが、金融市場モデルや、負債モデル(財政方式)を変更したときにモデルがどのような振る舞いをして、最適解を導き出すかなどの検証をする必要がある。また、シナリオツリー型確率計画モデルとの違いについても数値実験によって調べる必要もあるが、これらの分析は今後の課題としたい。

参考文献

- [1] 枇々木 規雄, 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル, 日本金融・証券計量・工学学会 1999年冬季大会予稿集, pp.36-55.
- [2] 枇々木 規雄, 金融工学と最適化, 朝倉書店, 2000.
- [3] Roger G.Ibbotson and Rex A Siqufield, Stock Bonds Bills and Inflation: Simulations of the Future(1976-2000), *Journal of Business*, 1976.
- [4] 今野浩, 理財工学II—数理計画法による資産運用最適化—, 日科技連, 1998.
- [5] ニッセイ基礎研究所, 年金 ALM : 期待リターンとリスクの予測 (1) ~ (4), 年金ストラテジー, 14-17(1997)
- [6] 反町洋一, 線形計画法の実際, 産業図書, 1992. 000), 64(1991).
- [7] 田村正雄, やさしい年金財政, 社会保険広報社, 1997.
- [8] 中央監査法人, ニッセイ基礎研究所, 企業年金の会計と税務, 日本経済新聞社, 1999.
- [9] 山田正次, 年金基金のための資産運用入門, 東洋経済新報社, 1992.
- [10] 山田正次, 企業年金の運用政策と ALM アプローチ, 証券アナリストジャーナル, 32(1994), pp.1-21.
- [11] 湯前祥二, 鈴木輝好, モンテカルロ法の金融工学への適用, 朝倉書店, 2000.
- [12] W.T. Ziemba and J.M. Mulvey, Worldwide Asset and Liability Modeling, Cambridge University Press, 1998.