市場リスクと信用リスクを考慮した銀行の資産負債管理に対する確率的最適化モデル[1]

齋藤　直紀　　（株）第一勧業銀行　　naosaito@rj8.so-net.ne.jp
枇々木　規雄　慶應義塾大学理工学部　hibiki@ae.keio.ac.jp

Abstract

銀行経営において最も重要な業務であるリスク管理に対する中長期的な意思決定を支援することを目的として、市場リスクと信用リスクおよびそれらの相関まで統合的に考慮した、ALM の考え方に基づく多期間確率計画モデルを提案する。多期間にわたる銀行取引を定式化するとともに、金利や債務者の信用力の将来時点における不確実性に起因する資産価値および負債価値の確率的変動をモンテカルロ・シミュレーションによって表現し、多期間に渡る意思決定によってそれらの制御が可能なモデル化を行う。このモデル上で問題を解くことにより、銀行がリスク制御を行うための最適なポジションを定量的に求めることができる。また、仮想的な設定値の下でいくつかの数値実験を行い、モデルの正当性を検証する。

1．はじめに

現在、市場リスクおよび信用リスクの管理を目的とする ALM 技術は多くの銀行の経営システムに組み込まれている。しかし、それらのリスク管理システムは、市場リスクと信用リスクの２つを同時に管理するものであっても、両者の間に存在する相関まで考慮した統合的なものではない。Barnhill, Maxwell and Shenkman［1］など最近の幾つかの研究ではこの相関の存在を無視することのデメリットの大きさも確認されており、相関まで考慮した市場リスクと信用リスクの厳密な統合的管理システムが真に健全な銀行経営には必要である。田中［16］は金融リスクの統合管理の必要性について述べ、田中、室町［17］は具体的な統合評価モデルについて論じている。

また、従来の ALM 手法はリスクを計量化するための技法が中心であり、リスク制御のための最適な政策（すなわち、ポジション）を定量的に導く数理的技法は依然としてほとんど実務に利用されていない。わが国の銀行では、考えられる幾つかの政策に対してリスク評価を行い、その結果を比較して意思決定を行っているのが現状であり、当然、それでは真に資本効率の良い経営は実現されない。最適化モデルが銀行等の金融機関で利用されてこなかった背景にはその計算量の膨大さが挙げられる。金融機関の中長期的な資産配分および負債配分に対する最適化問題を、複数のリスク･ファクターの下で、多期間にわたる意思決定の可能性まで考慮して取り扱うことは、数年前までは高性能のワークステーションやスーパーコンピュータを利用しない限り難しいと考えられていた。しかし、現在ではコンピュータの性能の向上や解法アルゴリズムの進歩により計算環境が飛躍的に改善されたため、大規模な問題も実用的な時間とコストの範囲内で解けるようになってきている。

以上の点を考慮し、本研究では、「市場リスクと信用リスクの統合管理」と「資産配分および負債配分の多期間最適化」という２つに注目した新しい ALM フレームワークの提案を試みる。

銀行の B/S 管理または、ALM に対する最適化モデルには、Kusy and Ziemba［8］、Korhonen［7］、Giokas and Vassiloglou［2］、枇々木［21］、Guven and Persentili［4］などがある。Kusy and Ziemba［8］は、キャッシュフロー、調達コスト、投資収益率の不確実性を考慮して、法的規制、予算、流動性、銀行政策、預金制約の下で利益の現在価値からペナルティコストを引いたものを最大化する単純リコース確率線形計画モデルを開発している。不確実性を考慮するために流動性、銀行

[1] 本研究は慶應義塾大学大学院理工学研究科(管理工学専攻)における修士論文作成の際に行われたものである。ここで示された内容は、第一勧業銀行としての見解をいかなる意味でも表さない。記述された内容についての責任は著者の一人、枇々木にある。

政策、預金を確率制約として取り扱い、その制約が成立しない場合にペナルティを与える。モデルは多計画期間モデルで、バンクーバー貯蓄信用組合に対して適用している。Korhonen[7] は、フィンランドの銀行における国内および外貨の資産と負債を管理する二段階目標線形計画モデルを開発している。3 年間で 12 シナリオの将来の不確実性を考慮した多期間計画を対象とし、期待収益、リスク、流動性、資本の充実性、預金高、外貨資産負債、貸付高などの多目標を目指すモデル化を行っている。Giokas and Vassiloglou［2］は、ギリシャ商業銀行に対して市場や法的規制などの環境制約、財務指標などの政策制約の下で、総収益、自己資本比率、流動性比率、預金高、貸付高を目標とする目標計画モデルを開発している。枇々木［21］は、最適化手法の特徴や数理計画法によるモデル構築の具体的手順、さらに ALM モデルの基本的な考え方を説明している。そして、シナリオで不確実性を考慮した問題を解くために、その方法論として主に目標計画法を適用できる ALM モデルの定式化を行っている。Guven and Persentili［4］は、トルコの商業銀行のための多期間線形計画モデルについて議論している。1987 年～1990 年のトルコの法的、財務的、組織的な設定のシステマティックな関係を考慮し、感度分析の結果として、モデルの妥当性と計画ツールとしてのモデルの有効性を示している。その他にも確定利付証券を対象にした最適化モデルとして、Golub *et al.*［3］や Zenios［10］等がある。また、年金基金や保険会社などの ALM に対する最適化モデルを多く含む論文集として、Ziemba and Mulvey［11］がある。

本研究では、市場リスクに加えて債務者の信用リスクも取り扱い、さらに日本の金融市場や邦銀の持つ資産負債の特性を考慮した最適化モデルの構築を試みる。

本論文が提案する統合最適化モデルは以下に示されるような構造を持っている。

① はじめに、リスク計量モデルのパラメータを初期時点の市場の状態に合うように推定し、資産価値と負債価値のアンダーグラウンド･ファクター（各種金利や債務者の信用格付け）のシナリオを生成する。
② 次に、生成されたアンダーグラウンド･ファクターのシナリオを資産価値と負債価値のシナリオに変換する。
③ 生成された資産価格と負債価格のシナリオに対して、数理計画法により最適な資産配分および負債配分を算出する。

①および②の部分を統合リスク計量化モデル、③の部分を統合最適化モデルと呼び、それぞれ第 2 節、第 3 節でその詳細を紹介する。

2．統合最適化モデルのための統合リスク計量化モデル

2-1．市場リスク計量化モデル

本モデルでは、市場リスクを「将来時点の金利水準の不確実性を原因とする、計画期間の最終時点におけるポートフォリオ価値の不確実性」と定義する。

無リスク金利の確率的挙動は Hull and White［5］による拡張 Vasicek モデル（Hull -White モデル）によりモデル化する[2]。具体的には、Hull -White モデルを Euler 近似し、モデル化期間中に設定された各時点における金利水準のシナリオをモンテカルロ･シミュレーションにより生成する。コールレートや貸出約定金利、定期預金金利等の各種制度金利は無リスク金利の回帰モデルによりモデル化する[3]。また、初期時点における期間構造のデータが入手可能な社債金利等のモデル化には、回帰モデルの他に Barnhill, Maxwell and Shenkman［1］のアプローチを利用することもできる。

[2] Hull-White モデルにより生成した金利は低金利局面で負の値をとることがあるので、このような場合は非負制約を含むモデルを利用したほうがよいであろう。

[3] 通常、貸出約定金利や定期預金金利は、たとえ市場が逆イールドであっても順イールド構造を維持しており、その点はモデル化の際に十分注意しなければならない。また、線形近似に無理があるときは、より高次の近似モデルを利用すべきである。

2-2．信用リスク計量化モデル

資産の将来の債務履行能力（信用力）は、その資産が属する業種セクターの格付けのみによって捉えられるとして、信用リスクを「業種セクターの格付け[4]推移の不確実性を原因とする、計画期間の最終時点におけるポートフォリオ価値の不確実性」と定義する。

格付け推移の確率的挙動は斉時的吸収マルコフ連鎖によりモデル化する。１期間の格付け推移のシミュレーションは J.P.Morgan［9］によって提唱された企業資産価値モデルを利用する。各業種セクターの資産価値の変化率（当該業種セクターのインデックス収益率をこれとみなす）を標準化したものを考え、その標準化された資産価値変化率とその業種セクターの格付けの間に確定的な関係があることを仮定する。すなわち、将来のある時点における標準化された資産価値変化率が決定されれば、その時点における格付けは一意に決定されるという構造を構築する。この構造の下で各業種セクターの標準化された資産価値変化率を標準正規乱数を用いてシミュレートすることにより、格付けの変動はシミュレートされる。シミュレートされた各業種セクターの標準化された資産価値変化率を格付けに変換するためには、標準化された資産価値変化率に関する標準正規分布上に閾値を設定する必要があるが、この閾値はモデル上の格付け推移確率がヒストリカル・データから統計的に推定された格付け推移確率に等しくなるように設定される。また、信用格付け推移の相関構造のモデル化は、信用格付け推移のアンダーグラウンド･ファクターである資産価値変化率、すなわち、各業種セクターのインデックス収益率間の相関係数行列を推定し、その相関行列を持つ多次元標準正規乱数を用いてモンテカルロ･シミュレーションを行うことにより実現される。相関行列の推定方法に関しては J.P.Morgan［9］を参照されたい。

2-3．市場変動と信用変動の相関構造モデル

金利変動と信用格付け推移の相関構造のモデル化は、信用格付け推移の相関構造のモデル化と全く同様に成される。すなわち、信用格付け推移のアンダーグラウンド･ファクターである各業種の標準化されたインデックス収益率と、無リスク金利との間の相関係数行列を過去のデータから推定し、その相関行列を持つ多次元標準正規乱数を用いて 2-1 項および 2-2 項のモンテカルロ･シミュレーションを実行することによりモデル化される。

2-4．資産価値および負債価値の評価

資産価値や負債価値の変動のアンダーグラウンド･ファクターである各種金利と信用格付けの確率的変動は、2-1 項～2-3 項で示した統合リスク計量化モデルを用いて、モンテカルロ法によりシミュレートされる。このようにして生成されたアンダーグラウンド･ファクターの値を資産および負債の価値に変換すれば、資産価値および負債価値の確率的変動を表すシナリオが生成される。

その変換方法、すなわち資産価値および負債価値の評価方法として、本研究では以下のようなアプローチを採用する。ただし、対象としている資産または負債の満期を m、シナリオ数を S、1 期間の長さをΔt とする。

$$V_X(0) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\sum_{i=1}^{m} C_X(s,i)\cdot DF(s,i,0) \qquad for \quad t=0 \qquad (1)$$

$$V_X(s,t) = \sum_{i=t+1}^{m} C_X(s,i)\cdot DF(s,i,t) \qquad for \quad t=1,\,2,\,\cdots,\,T \qquad (2)$$

ただし、

$V_X(0)$ ：時点 0 における資産 X または負債 X の単位価値。

$V_X(s,t)$ ：シナリオ s 、時点 t における資産 X または負債 X の単位価値。

[4] ここではデフォルトも 1 つの格付けとみなす。

C_X (s, i) ：シナリオ s 、時点 i において１単位の資産 X または負債 X から発生するキャッシュフロー。ただし、信用リスクを含有する資産に関しては、シナリオ s 、時点 i がデフォルト発生時点であれば C_X (s, i) は回収額分のキャッシュフロー、またデフォルト発生時点より後の時点であれば 0 の値を持つ[5]。

DF (s, i, t)：シナリオ s における、時点 i から時点 t までのディスカウント･ファクター。r_f (s, j) をシナリオ s 、時点 j における無リスク金利（ 期間［ j, j+1 ］に対する連続複利率）とすると、

$$DF_x(s,i,t)=\prod_{j=t}^{i-1}\exp\left(-r_f(s,j)\cdot\Delta t\right) \qquad (3)$$

（1）式および（2）式は次のことを表現している。ある１つのシナリオに注目して、そのシナリオ上で当該資産または負債から生じる全キャッシュフローを、そのシナリオ上の無リスク金利で価値算出時点 t までディスカウントし、得られた値をシナリオ s 、時点 t における当該資産または負債の単位価値とみなす。ただし、時点 0 の単位価値は、シナリオごとに計算された単位価値の全シナリオに関する期待値とする。

このようにして算出された単位価値を各資産の単位価格（ミッドプライス）とみなし、それに売買コストを加減したものを単位購入価格および単位売却価格とする。ただし、貸出金や定期預金などの単位売却価格はミッドプライスとし、売買コスト分は減じずに単位価格をそのまま単位売却価格とみなす。

この評価アプローチによって算出された資産や負債の単位価値は、それぞれの満期までの信用変動や金利変動の影響を反映した値となっており、モデルは満期までのリスクを考慮していることになる。

3．統合最適化モデル

3-1．最適化モデル

資産配分問題や ALM 問題に対する数理計画モデルには大きく分けて、１期間確率計画モデルと多期間確率計画モデルがある。前者は資産配分の計画期間を長い１期間と考えて、リスク･ファクターである資産価格ないしはそのアンダーグラウンド・ファクターの期末時点における確率分布をモデル化し、その分布に対して確率的最適化問題を解くことにより最適な意思決定を求めるモデルであり、投資の意思決定は計画期間の最初の時点のみにおいて行われる。それに対し、後者は資産配分の計画期間中に設定された複数の時点における意思決定を認め、それを決定変数としてモデル化された複数の時点における資産価格変動の確率分布に対し確率的最適化問題を解くモデルである。本研究では、中長期的な計画期間においてリバランスが全く行われないとするのは不自然であること、および１期間モデルは多期間モデルより決定変数の自由度が低いために多期間モデルと同等の結果を得られる保証はないことを考慮し、多期間確率計画モデルを採用する。

多期間確率計画モデルは、リスク･ファクターの確率的変動をどのようにモデル化するかにより、次の２つのタイプに分けられる。

シナリオ･ツリー型多期間確率計画モデル

リスク･ファクターの確率的挙動をツリー･モデルにより離散的にモデル化し、構築されたツリーに対して確率的最適化問題を解くモデルである。意思決定は当該ノードから派生する将来の全ノードを考慮したものであり、その点は直感的に納得できるモデルである。ただし、期間数やノードの分岐数、ファクターの次元数が多い場合には問題のサイズが非常に大きくなってしまう。また、一般的に利用されている二項ツリーや三項ツリーでは、本来連続的な資産価格の確率分布

[5] 簡単のため、デフォルトが発生した場合、その発生時点において回収率分が全て回収されるとした。

を２個ないし３個のノードだけで離散近似するため、そのモデル誤差が結果に与える影響は無視できない。

シミュレーション型多期間確率計画モデル

リスク･ファクターの確率的変動のシミュレーションを行い、生成されたシナリオに対して確率的最適化問題を解くモデルである。枇々木［19］により考案されたモデルで、リスク･ファクターのモデル化にシミュレーションを利用しているため、期間数やファクターの次元数の多さにもある程度対応でき、また資産価格の確率分布の離散近似による誤差も少ないという利点を持つ。ただし、このモデルには、全てのシナリオに対して１つの時点に１種類の意思決定しか許さないという、シナリオ･ツリー型多期間確率計画モデルにはない制約がある。シミュレーションでは 1 本のシナリオだけに注目すると将来の状態が確率 1 で確定している。もし、この状況下でシナリオごとに別々の意思決定をさせると、それらは確定条件下での意思決定となってしまい、モデルから得られる結果は歪んでしまう。この問題を回避する方法は幾つか考えられるが、枇々木［19］は１時点に１種類の意思決定しか許さないという制約を加えることにより対応した[6]。この結果として、意思決定の内容がシナリオごとの状況を反映したものにならない。

第 2 節で述べた通り、本研究ではリスク･ファクターとして、無リスク金利（１ファクター）と各業種の標準化された企業資産価値収益率（業種セクター数分のマルチ･ファクター）を考えているが、これら複数のファクターの確率的挙動を多期間にわたってモデル化すると、問題の規模は非常に大きくなってしまい、シナリオ･ツリー型多期間確率計画モデルでは実用的な計算時間内に最適解を得ることが難しくなる。したがって、本研究ではシミュレーション型多期間確率計画モデルを採用する。

また、定式化にあたっては、計算量の少ない線形計画問題に帰着させたいこと、および過去の研究結果から投資量決定モデルの方が投資額決定モデルより好ましい解を与える可能性が高いとされていることを理由として、投資量を決定変数として記述を行う。

目的関数はモデルの利用目的に応じて設定されるものであるが、本研究では、

・銀行の経営においては安全性が最も重要であること
・信用リスクを考慮すると計画最終時点における資産価値分布が大きく歪み、また下方の裾が厚くなるため、標準偏差や VaR では十分にリスクを把握することができないこと
・問題が極めて大規模なので線形計画問題として記述する必要性があること

等を考慮し、目的関数を「計画最終時点の目標収益額に対する１次下方部分積率の最小化」とする。

3-2．銀行資産負債勘定の定式化

3-2-1．定式化のための準備

本研究では、以下に示す銀行の資産負債勘定を最適化の対象とし、その定式化を行う。

・現金勘定 ･･･ コールローン、コールマネー
・トレーディング勘定 ･･･ 債券（国債、公社債）
・バンキング勘定 ･･･ 貸出金、定期預金

定式化にあたり、「残高」のバランスおよび「キャッシュフロー」のバランス[7]は制約条件として必ず記述しなければならない。「残高」とは資産や負債の量（単位数）のことであり、一方「キャッシュフロー」は額である。シミュレーション型多期間確率計画モデルにおいて決定変数を投資量とする場合には、資産や負債の流れを「残高」と「キャッシュフロー」、すなわち量と額の両方

[6] 枇々木[20] はシミュレーション型モデルの枠組みのもとで、1 時点においてある程度シナリオに応じて複数の意思決定を可能にする(似たシナリオに対してのみ同一の意思決定を行う)、シミュレーション/ツリー混合型モデルを開発している。
[7] 「キャッシュフロー」のバランスとはポートフォリオの外部との資金の出入りがないという条件のことである。

で追うことで、より簡潔な定式化が可能となる。また、制約条件および目的関数の記述のために「損益」（期間損益、最終損益）および「最終価値」の項目に関しても定式化を行う。ただし、「損益」に関する定式化は紙面の都合上割愛する。

ところで、離散モデルを構築する場合、実際にはほぼ連続的に生じる資産および負債の売買やキャッシュフロー発生等を幾つかの離散時点に集約させる必要があり、本研究では以下のように定義する。意思決定は計画期間中に設定された複数の時点で行われるとし、意思決定直後（ポジション変化直後、これを期初とする）から次の意思決定直前（ポジション変化前、これを期末とする）までを１つの期間とする。そして、その期間に発生するキャッシュフローは全てその期末に発生すると仮定する。また、時点０を現時点、時点 T を計画期間の最終時点とする[8]。

また、刻み幅を決められているコールレート等の金利の変動幅や資産負債の売買取引単位数（決定変数）は実際には離散的な値をとるが、簡単のため、全ての変数およびパラメータは連続的な値を取り得ると仮定する（連続的な変数、パラメータとして定義する）。

3-2-2．現金勘定の定式化

「現金勘定」は銀行の貸借対照表における現金預け金、コールローン、コールマネーなど極めて流動性の高い資産･負債を指し、これらは主に資産流動性の確保、および各資産の購入や売却、金利の受払等に伴うキャッシュフロー過不足の調整の目的で保有される。本研究では「現金勘定」をコールローンとコールマネーだけに限定し、どちらも無担保オーバーナイト物[9]として、デフォルトは生じないと仮定する。

＜ 記号の定義 ＞

決定変数

${x^{CL}}_0$：時点 0 におけるコールローン運用高。[10]

${x^{CM}}_0$：時点 0 におけるコールマネー調達高。

${x^{CL}}_{t,s}$：シナリオ s、時点 t におけるコールローン運用高。

${x^{CM}}_{t,s}$：シナリオ s、時点 t におけるコールマネー調達高。

補助変数（他の資産および負債の決定変数によって従属的に決まる変数[11]）

${CF^X}_0$：時点 0 における資産 X または負債 X のキャッシュフロー[12]。

---

8 時点１、２、… の１や２はタイムステップ番号を表し、“ 年 ”を表すものではないので注意されたい。例えば、タイムステップが６ヶ月単位のモデルでは、時点１は６ヶ月後を、時点２は１年後を表す。

9 例えば、タイムステップを 6 ヶ月単位でモデルした場合、もし資金の過不足が生じれば、オーバーナイト物のコールローンで 6 ヶ月連続運用することになる。その間のコールレートは一定であると仮定する。

10 シナリオ s、時点 t において、${x^{CL}}_{t,s}$ と ${x^{CM}}_{t,s}$ のどちらか一方は 0 となる。これは、コールマネーで調達した資金をコールローンで運用するという通常ではありえない事態が生じないようにするための処置である。このためには、本来ならば、

$$ {x^{CL}}_{t,s} \cdot {x^{CM}}_{t,s} = 0 $$

という非線形の制約条件が必要である。しかし、

$$ \text{コールローン金利 } {r^{CL}}_{t,s} < \text{ コールマネー金利 } {r^{CM}}_{t,s} $$

というパラメータ値の下で、リターン最大化ないし解が退化しない要求期待収益額に関する制約条件を含めたリスク最小化を行えば、コールマネーで調達した資金をコールローンで運用することは最適ではあり得なくなり、制約条件を加えることなく ${x^{CL}}_{t,s}$ と ${y^{CM}}_{t,s}$ のどちらか一方は 0 となる。また、他の資産および負債の決定変数は全シナリオで同一の値が入るため、添え字にシナリオ番号が入らないが、現金勘定は他の資産および負債から生じるキャッシュフロー等に依存する変数であり、シナリオごとに異なる値が入るので添え字にシナリオ番号がつく。

11 実際にモデル上で問題を解く際、このような変数を決定変数として取り扱うか、従属的な変数として取り扱うかは判断の難しいところである。前者とした場合はモデルの疎大性が高まる一方で決定変数の数が多くなり、後者はその逆となる。どちらを選ぶべきかは利用する数理計画法ソフトウェアの解法アルゴリズムの得手不得手にもよるであろう。

12 添え字 X に関して、業種および満期期間（貸出期間、預入期間のこと）が異なれば別の資産とする。これは、添え字から業種番号 k や満期期間 m を排除して表記を簡潔にするための配慮したためである。

$CF^{X}_{t,s}$：シナリオ s、時点 t における資産 X または負債 X のキャッシュフロー。

（CF はインフローであれば正、アウトフローであれば負の値となる）

$FW^{CLCM}_{T,s}$：シナリオ s におけるコールローンおよびコールマネーの最終価値。

パラメータ

MC_{-1}：時点 0 の取引で投資決定前に考慮可能なものをすべて考慮した上での現金残高[13]。

r^{CL}_{0}：時点 0 におけるコールローン金利（１期間の長さに対応した金利[14]、以下の金利も同様)。

r^{CM}_{0}：時点 0 におけるコールマネー金利。

$r^{CL}_{t,s}$：シナリオ s、時点 t におけるコールローン金利。

$r^{CM}_{t,s}$：シナリオ s、時点 t におけるコールマネー金利。

＜ 定式化 ＞

「残高およびキャッシュフロー」

現金勘定は単位価格が常に 1 であるため、残高とキャッシュフローのバランス式は同等になる。

$t=0$

$$MC_{-1} + \sum_{X} CF^{X}_{0} + x^{CM}_{0} = x^{CL}_{0} \qquad (4)$$

1 £ *t* £ *T*

$$\left.\begin{aligned} x^{CL}_{0} \cdot \left(1 + r^{CL}_{0}\right) + \sum_{X} CF^{X}_{1,s} + x^{CM}_{1,s} &= x^{CM}_{0} \cdot \left(1 + r^{CM}_{0}\right) + x^{CL}_{1,s} \qquad for\ t = 1 \\ x^{CL}_{t-1,s} \cdot \left(1 + r^{CL}_{t-1,s}\right) + \sum_{X} CF^{X}_{t,s} + x^{CM}_{t,s} &= x^{CM}_{t-1,s} \cdot \left(1 + r^{CM}_{t-1,s}\right) + x^{CL}_{t,s} \qquad for\ t > 1 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

「最終価値」

$$FW^{CLCM}_{T,s} = x^{CL}_{T,s} - x^{CM}_{T,s} \qquad (6)$$

3-2-3．トレーディング勘定の定式化

銀行が保有するトレーディング勘定には債券･株式等の有価証券があるが、本研究ではその中から債券のみを取り扱う。トレーディング取引はマーケットを通して行われることから、次のような特徴がある。

① 流動性が高く、任意の時点において売買が可能である。したがって、定式化において売却量と購入量の両方の決定変数を入れ、さらに 1 時点における売買量制約を、後述するバンキング勘定に比べ、緩めに設定する。

② マーケット･プライスが存在する。

債券

銀行が債券を保有するのは第１に資産運用の目的からであり、貸出金と並ぶ銀行の重要な収益資産である。様々な債券のうち、国債には信用リスクがないと考えてよいが、地方債と社債（以下、まとめて公社債と呼ぶ）は信用リスクを内包している。したがって、定式化は国債と公社債で別々に行わなければならない。定式化を容易にするため、以下の仮定を置く。

[13] 時点－1 でのコール運用･調達分に対する時点 0 での利息受払い、期間［－1，0］の債券の期前償還分と利息収入のキャッシュインフロー、時点 0 での貸出金の期前返済分、制御不能な新規実行分および利息収入、時点 0 での定期預金の期前解約分、制御不能な新規預入分および利息支払が含まれる。

[14] 年率や連続複利率ではないので注意されたい。

・発行時点、満期期間の長さ等の種類に関しては、国債および公社債（業種セクターごと）それぞれ 1 種類だけ取り扱う[15]。また、発行時点は初期時点以前、満期は計画期間終了後とする。
・クーポン率は一定（固定利付債券）で、利払いは毎時点行われる。
・期前償還あり。
・公社債に関して、デフォルトが発生した場合には当該期間中の金利支払や期前償還は一切発生せず、直前時点の全残高の回収率分が即時に回収され、キャッシュインフローとして計上される。

＜ 記号の定義 ＞

添え字

k：業種セクターを表す添え字。

決定変数

$x^B_{k,t}$：債券 k の時点 t における購入単位数。
$y^B_{k,t}$：債券 k の時点 t における売却単位数。

補助変数

$B_{k,0}$：債券 k の時点 0 における残高（保有単位数）。
$B_{k,t,s}$：債券 k のシナリオ s、時点 t における残高（保有単位数）。
$CF^B_{k,0}$：時点 0 における債券 k のキャッシュフロー。
$CF^B_{k,t,s}$：シナリオ s、時点 t における債券 k のキャッシュフロー。
$FW^B_{k,T,s}$：シナリオ s における債券 k の最終価値。

パラメータ

r^B_k：債券 k のクーポン率（1 期間の長さに対応する金利）。
$q^B_{k,t,s}$：債券 k のシナリオ s、期間 ［ t-1 , t ］における期前償還率。
$h^B_{k,0}$：債券 k の時点 0 における単位購入価格。
$h^B_{k,t,s}$：債券 k のシナリオ s、時点 t における単位購入価格。
$q^B_{k,0}$：債券 k の時点 0 における単位売却価格。
$q^B_{k,t,s}$：債券 k のシナリオ s、時点 t における単位売却価格。
デフォルト時点においては回収率を表す。
$d^B_{k,t,s}$：債券 k のシナリオ s、時点 t におけるデフォルト・フラグ（表 1 参照）。
（デフォルト発生時点のみ 1、それ以外では 0 の値をとる）
$nd^B_{k,t,s}$：債券 k のシナリオ s、時点 t におけるノン・デフォルト・フラグ（表 1 参照）。
（デフォルト発生以前は 1、デフォルト発生以降は 0 の値をとる）

表 1．デフォルト発生と各フラグの値

	デフォルト発生前	デフォルト発生時点	デフォルト発生後
$d^B_{k,t,s}$	0	1	0
$nd^B_{k,t,s}$	1	0	0

＜ 定式化 ＞

以下では、信用リスクを含有する公社債の定式化のみを示す。国債の定式化は信用リスクに関する記述がないという点を除いて公社債の定式化と全く同様であり、ここでは紙面の都合上割愛する。

[15] 各債券を１種類だけしか取り扱わないのは、例えば発行時点の異なる複数の国債を用意しても、それらは互いに高い代替性を持つ資産となってしまうからである。資産数をいたずらに増やすと問題の規模が大きくなるばかりか、代替性のある資産が複数存在させることになるので、最適解がそれらの資産の間でぶれやすくなり、解が退化してしまう可能性があるので注意が必要である。

「残高」

***t* = 0**

$$B_{k,0} = B_{k,-1} + x^{B}_{k,0} - y^{B}_{k,0} \qquad (7)$$ [16]

1 £ *t* £ *T*

$$\left.\begin{array}{ll} B_{k,1,s} = nd^{B}_{k,1,s} \cdot \left\{ B_{k,0} \cdot \left(1 - q^{B}_{k,1,s}\right) + x^{B}_{k,1} - y^{B}_{k,1} \right\} & for \quad t = 1 \\ B_{k,t,s} = nd^{B}_{k,t,s} \cdot \left\{ B_{k,t-1,s} \cdot \left(1 - q^{B}_{k,t,s}\right) + x^{B}_{k,t} - y^{B}_{k,t} \right\} & for \quad t > 1 \end{array}\right\} \quad (8)$$

「キャッシュフロー」

***t* = 0**

$$CF^{B}_{k,0} = -\boldsymbol{h}^{B}_{k,0} \cdot x^{B}_{k,0} + \boldsymbol{q}^{B}_{k,0} \cdot y^{B}_{k,0} \qquad (9)$$ [17]

1 £ *t* £ *T*

$$\left.\begin{array}{ll} CF^{B}_{k,1,s} = nd^{B}_{k,1,s} \cdot \left\{ -\boldsymbol{h}^{B}_{k,1,s} \cdot x^{B}_{k,1} + \boldsymbol{q}^{B}_{k,1,s} \cdot y^{B}_{k,1} + B_{k,0} \cdot \left(q^{B}_{k,1,s} + r^{B}_{k}\right) \right\} & \\ \qquad + d^{B}_{k,1,s} \cdot \left(B_{k,0} \cdot \boldsymbol{q}^{B}_{k}\right) & for \;\; t = 1 \\ CF^{B}_{k,t,s} = nd^{B}_{k,t,s} \cdot \left\{ -\boldsymbol{h}^{B}_{k,t,s} \cdot x^{B}_{k,t} + \boldsymbol{q}^{B}_{k,t,s} \cdot y^{B}_{k,t} + B_{k,t-1,s} \cdot \left(q^{B}_{k,t,s} + r^{B}_{k}\right) \right\} & \\ \qquad + d^{B}_{k,t,s} \cdot \left(B_{k,t-1,s} \cdot \boldsymbol{q}^{B}_{k}\right) & for \;\; t > 1 \end{array}\right\} \quad (10)$$ [15]

「最終価値」

$$FW^{B}_{k,T,s} = nd^{B}_{k,T,s} \cdot B_{k,T,s} \cdot \boldsymbol{q}^{B}_{k,T,s} \qquad (11)$$ [19]

3-2-4．バンキング勘定の定式化

本研究ではバンキング勘定の中から、銀行最大の収益資産である貸出金と、主要な資金調達源泉である定期預金の２つを取り扱う。バンキング勘定は相対取引であることから、次のような特徴がある。

① 任意の時点においての売却、契約の解除（ポジションのクローズ）ができない。したがって、定式化の際に売却量の決定変数を含めないことにより表現される。

② 制御不能な新規増分が発生する。したがって、新規獲得量（購入量）に関して、決定変数以外に制御不能な新規発生分を表すパラメータを入れ、その分だけ残高が決定変数とは独立に、自然に増加するように記述する必要がある。

③ マーケットプライスが存在しない。

①および②はトレーディング勘定との大きな違いであり、定式化の際に注意しなければならない。

貸出金

貸出金は言うまでもなく銀行の本来的な業務であり、銀行の全収益の約 6 割を占める最大の収益資産である。貸出金には様々な種類があるが、本研究では最も一般的な貸出金のみを想定する。

---

[16] $B_{k,-1}$は期間［−1，0］の期前償還分を織り込んだ残高とする。

[17] 期間［−1，0］の期前償還分と利息収入のキャッシュインフローはMC_{-1}に含まれるとする。

[18] デフォルト発生前は（売買により生じるキャッシュフロー＋期前償還分＋利息収入）、デフォルト発生時点では回収率分がキャッシュインフローとして生じる。デフォルト発生後はキャッシュフローは一切生じない。

[19] 最終時点までにデフォルトが発生しない場合は、最終時点の残高（期前償還分はキャッシュフローとして計上され、残高から差し引かれている）を単位評価価格q で評価した値を最終価値とする。デフォルトした場合は全残高がキャッシュフローとして計上され、最終価値は 0 となる。残高はデフォルト時点で 0 になるため計算上は nd を乗ずる必要はないが、理解を助けるためにこのように定式化した。

定式化を容易にするために以下の仮定を置く。

・変動金利貸出の場合、金利見直しは毎時点行う。

・返済方法は元本満期一括返済タイプのみとし、利息返済は毎時点行われるとする。

・期前返済あり。

・デフォルトが発生した場合は当該期間中の金利支払や期前返済は一切発生せず、直前時点の全残高の回収率分が即時に回収され、キャッシュインフローとして計上される。

＜ 記号の定義 ＞

添え字

k：貸出金の種類（業種）を表す添え字。

m：貸出期間。

u：貸出時点。

LF：固定金利貸出金。

LV：変動金利貸出金。（定式化は固定金利貸出金と同様なので省略する。）

決定変数（以下、変動金利貸出金（LV）も同様）

$x^{LF}_{k,m,t}$：貸出期間 m の貸出金 k の時点 t における新規実行単位数。

補助変数

$LF_{k,m,u,0}$：時点 u に実行した貸出期間 m の固定金利貸出金 k の時点 0 における残高（保有単位数）。

$LF_{k,m,u,t,s}$：時点 u に実行した貸出期間 m の固定金利貸出金 k のシナリオ s、時点 t における残高。

$CF^{LF}_{k,m,0}$：貸出期間 m の固定金利貸出金 k の時点 0 におけるキャッシュフロー。

$CF^{LF}_{k,m,t,s}$：貸出期間 m の固定金利貸出金 k のシナリオ s、時点 t におけるキャッシュフロー。

$FW^{LF}_{k,m,T,s}$：貸出期間 m の固定金利貸出金 k のシナリオ s における最終価値。

パラメータ（変動金利貸出金（LV）も同様）

$q^{LF}_{k,m,u,t,s}$：時点 u に実行した貸出期間 m の固定金利貸出金 k のシナリオ s、期間［ $t-1$, t ］における期限前返済率、$t = u + m$ の場合（ t が満期の場合）は非継続率を表す。

$N^{LF}_{k,m,t,s}$：貸出期間 m の固定金利貸出金 k のシナリオ s、時点 t における新規実行単位数（制御不能な新規実行分）。

$r^{LF}_{k,m,u,0}$：時点 u に実行した貸出期間 m の固定金利貸出金 k の時点 0 における金利（時点 $t+1$ での受取利息）。貸出期間中は一定。

$r^{LF}_{k,m,u,t,s}$：時点 u に実行した貸出期間 m の固定金利貸出金 k のシナリオ s、時点 t における金利（時点 $t+1$ での受取利息）。貸出期間中は一定。

$r^{LV}_{k,m,u,0}$：時点 u に実行した貸出期間 m の変動金利貸出金 k の時点 0 における金利（時点 $t+1$ での受取利息）。

$r^{LV}_{k,m,u,t,s}$：時点 u に実行した貸出期間 m の変動金利貸出金 k のシナリオ s、時点 t における金利（時点 $t+1$ での受取利息）。

$q^{LF}_{k,m,u,0}$：時点 u に実行した貸出期間 m の固定金利貸出金 k の時点 0 における単位評価価格。デフォルト時は回収率を表す。

$q^{LF}_{k,m,u,t,s}$：時点 u に実行した貸出期間 m の固定金利貸出金 k のシナリオ s、時点 t における単位評価価格。デフォルト時は回収率を表す。

$d^{LF}_{k,t,s}$：時点 u に実行した貸出期間 m の固定金利貸出金 k のシナリオ s、時点 t におけるデフォルト・フラグ。

$nd^{LF}_{k,t,s}$：時点 u に実行した貸出期間 m の固定金利貸出金 k のシナリオ s、時点 t におけるノンデフォルト・フラグ。

＜ 定式化 ＞

「残高」

$t = 0$

・$u = 0$（時点 0 が満期時点・新規貸出実行時点）

$$LF_{k,m,0,0} = LF_{k,m,-m,-1} + x^{LF}_{k,m,0} \qquad (12)$$ [20]

・$-m + 1$ £ u £ -1（時点 0 がそれ以外の時点）

$$LF_{k,m,u,0} = LF_{k,m,u,-1} \qquad (13)$$

1 £ t £ T

・$t = u$（時点 0 が満期時点・新規貸出実行時点）

$$\begin{aligned} LF_{k,m,u,t,s} &= nd^{LF}_{k,t,s} \cdot \left\{ LF_{k,m,u-m,t-1,s} \cdot \left(1 - q^{LF}_{k,m,u-m,t,s}\right) + x^{LF}_{k,m,t} + N^{LF}_{k,m,t,s} \right\} \\ &= \begin{cases} nd^{LF}_{k,t,s} \cdot \left\{ LF_{k,m,u-m,0} \cdot \prod_{i=1}^{t} \left(1 - q^{LF}_{k,m,u-m,i,s}\right) + x^{LF}_{k,m,t} + N^{LF}_{k,m,t,s} \right\} & for \;\; t \le m-1 \\ nd^{LF}_{k,t,s} \cdot \left\{ LF_{k,m,u-m,u-m,s} \cdot \prod_{i=u-m+1}^{t} \left(1 - q^{LF}_{k,m,u-m,i,s}\right) + x^{LF}_{k,m,t} + N^{LF}_{k,m,t,s} \right\} & for \;\; t \ge m \end{cases} \qquad (14) \end{aligned}$$ [21]

・$u + 1$ £ t £ $u + m - 1$（時点 0 がそれ以外の時点）

$$\begin{aligned} LF_{k,m,u,t,s} &= nd^{LF}_{k,t,s} \cdot \left\{ LF_{k,m,u,t-1,s} \cdot \left(1 - q^{LF}_{k,m,u,t,s}\right) \right\} \\ &= \begin{cases} nd^{LF}_{k,t,s} \cdot \left\{ LF_{k,m,u,0} \cdot \prod_{i=1}^{t} \left(1 - q^{LF}_{k,m,u,i,s}\right) \right\} & for \;\; u < 0 \\ nd^{LF}_{k,t,s} \cdot \left\{ LF_{k,m,u,u,s} \cdot \prod_{i=u+1}^{t} \left(1 - q^{LF}_{k,m,u,i,s}\right) \right\} & for \;\; 0 \le u \end{cases} \qquad (15) \end{aligned}$$

「キャッシュフロー」

$t = 0$

$$CF^{LF}_{k,m,0} = -x^{LF}_{k,m,0} \qquad (16)$$ [22]

1 £ t £ T

$$\left.\begin{aligned} CF^{LF}_{k,m,1,s} &= nd^{LF}_{k,1,s} \cdot \left\{ \sum_{u=1-m}^{0} LF_{k,m,u,0} \cdot \left(q^{LF}_{k,m,u,1,s} + r^{LF}_{k,m,u,0}\right) - x^{LF}_{k,m,1} - N^{LF}_{k,m,1,s} \right\} \\ &\quad + d^{LF}_{k,1,s} \cdot \left(\sum_{u=1-m}^{0} LF_{k,m,u,0} \cdot \boldsymbol{q}^{LF}_{k,m,u,1,s} \right) \qquad for \;\; t = 1 \\ CF^{LF}_{k,m,t,s} &= nd^{LF}_{k,t,s} \cdot \left\{ \sum_{u=t-m}^{t-1} LF_{k,m,u,t-1,s} \cdot \left(q^{LF}_{k,m,u,t,s} + r^{LF}_{k,m,u,t-1,s}\right) - x^{LF}_{k,m,t} - N^{LF}_{k,m,t,s} \right\} \\ &\quad + d^{LF}_{k,t,s} \cdot \left(\sum_{u=t-m}^{t-1} LF_{k,m,u,t-1,s} \cdot \boldsymbol{q}^{LF}_{k,m,u,t,s} \right) \qquad for \;\; t > 1 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$ [18]

---

[20] $LF_{k,m,-m,-1}$ は期間［－1，0］のロールオーバー分、制御不能な新規実行分を織り込んだ残高とする。

[21] 貸出期間中にデフォルトすれば次の満期時点のフラグ nd は 0 となり、ロールオーバー分および新規実行分は 0 となる。したがって、デフォルト発生時点以降は決定変数の値に依らず残高は増加しない。

[22] 期間［－1，0］の期前返済分、制御不能な新規実行分、利息収入は MC_{-1} に含まれるとする。

「最終価値」

$$FW^{LF}_{k,m,T,s} = nd^{LF}_{k,t,s} \cdot \left(\sum_{u=T-m+1}^{T} LF_{k,m,u,T,s} \cdot q^{LF}_{k,m,u,T,s} \right) \qquad (18)$$

定期預金

預金は銀行の資金調達の最大源泉であり、預金業務は貸出業務と並んで銀行の主要業務である。預金は大きく流動性預金と定期性預金に分けられるが、流動性預金はモデル上の取り扱いが困難なため、本研究では一般的な定期預金だけを取り扱う。定式化を容易にするために以下の仮定を置く。

・変動金利定期預金の場合、金利見直しは毎時点行う。
・利息支払は毎時点行われるとする。
・期前解約金利は通常の定期預金金利と同一とする。

定期預金の定式化は信用リスクに関する記述がないという点を除いて貸出金と全く同様であり、ここでは紙面の都合上割愛する。

3-3．目的関数およびその他の制約条件の定式化

3-1 で述べた通り、本研究では目的関数を「計画最終時点の目標収益額に対する１次下方部分積率の最小化」としている。この目的関数は（19）式のように定式化される。

$$\left.\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} D_s \\ &\text{subject to} \quad W_{T,s} = \sum_{X} FW^{X}_{T,s} \\ &\qquad W_{T,s} + D_s \geq W_G \\ &\qquad D_s \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

ただし、

添え字

S：全シナリオ数。

決定変数

D_s：シナリオ s における最終時点の収益額 $W_{T,s}$ の目標収益額 W_G に対する不足分。

補助変数

$FW^{X}_{T,s}$：各資産 X または負債 X の最終価値（X は資産の種類を表す）。

$W_{T,s}$：シナリオ s の計画最終時点における収益額。

パラメータ

W_G：目標収益額。

また、リスク最小化を表す目的関数だけでは十分なリターンが確保されないので、通常は全シナリオに対する収益額の期待値が要求期待収益額 W_E（パラメータ）以上となるように制約式を加える。すなわち、（20）式を制約条件として記述する。

$$\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} W_{T,s} \geq W_E \qquad (20)$$

---

[23] デフォルト発生前は（期前償還分＋利息収入）、デフォルト発生時点では回収率分がキャッシュインフローとして生じる。デフォルト発生後はキャッシュフローは生じない。

さらに、実経済における制約として、総資産の上限制約、自己資本比率の下限制約、取引量の上限制約等を制約条件に加えることも必要である[24]。

最後に、決定変数と残高の非負制約を記述する。

4．数値実験

モデルの正当性を検証する目的で、幾つかの数値実験を行った[25]。

4-1．条件設定

＜ モデル設定値 ＞

・シナリオ数：1000 本（乱数には Mersenne Twister を用いた）

・計画期間：3 年（1 期間の長さ：0.5 年、計画最終時点：時点 6）

ただし、意思決定は時点 0 から時点 4 の期間のみで行われるとする。

・リスク･ファクターのモデル化期間：10 年後まで（時点 20 まで）

・業種セクター数：2（初期格付け：業種 1　AA、業種 2　BBB）

・回収率：40%

・ビッド･オファー･スプレッド（売買スプレッド）はその影響を明確にさせる目的で若干大きめの値に設定した。

・計画期間直前（時点－1 の意思決定後）の資産および負債の内容

資　産		負　債	
コールローン	0	コールマネー	100
国債	500		
貸出金（6 ヶ月物）	2700	定期預金（6 ヶ月物）	1500
貸出金（5 年物）	1200	定期預金（1 年物）	1000
	4400		2600

（単位：百億単位）

・貸出約定金利の信用リスク･スプレッド

	貸出約定金利（6ヶ月物）	貸出約定金利（5 年物）
AAA	0	0
AA	0.5	0.5
A	1	1
BBB	1.5	2
BB	2	4
B	4	6
CCC	6	8

（単位：%）

・格付け推移確率行列（ データソース：Standard & Poor’s CreditWeek 15,April,1996 ）

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0	0	0
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

（単位：%）

[24] 運用資金の不足額の調達まで考慮している ALM 問題では、モデルが総資産を増加させることによりリターンを確保しようとしてしまう可能性があるが、この問題はこの種の制約式を入れることによって回避される。

[25] 数理計画法ソフトウェア「NUOPT Ver.4」（株式会社数理システム社製）を使用した。

＜ 制約条件 ＞

・目標期待収益額：200 百億円（計画期間合計）

・実経済における制約を表現する制約条件

・１つの時点における取引量の上限[26]

コールローン（動的取引戦略期間）： なし[27]

（固定取引戦略期間）： なし

コールマネー（動的取引戦略期間）： 50 百億単位

（固定取引戦略期間）： 500 百億単位[28]

国債 ： 50 百億単位（売却、購入で共通）

貸出金（6 ヶ月物） ： 300 百億単位（業種セクターごと）

貸出金（5 年物） ： 100 百億単位（業種セクターごと）

定期預金（6 ヶ月物） ： 300 百億単位

定期預金（1 年物） ： 200 百億単位

4-2．数値実験１ ： 効率的フロンティアおよび最適解の例

数値実験例として、以下のモデル設定に対し、効率的フロンティアを算出した。

・初期時点の金利期間構造：5%でフラット

・無リスク金利モデルのボラティリティ・パラメータ：a = 0.03、s = 0.003

・金利変動と信用変動の相関行列（無リスク金利の撹乱項と各業種セクターの標準化されたインデックス収益率の相関行列）

	無リスク金利	業種 1	業種 2
無リスク金利	1	－0.33	－0.33
業種 1	－0.33	1	0.3
業種 2	－0.33	0.3	1

効率的フロンティアは図 2 の通りになった。この効率的フロンティアに見られる若干の歪みは、内点法の収束条件を緩めに設定していることが原因であると思われる。また、リスクとリターンが最小および最大になる最適解を与えたときの計画最終時点における期待収益額の分布を図 3 に示す。さらに、図 4 は効率的フロンティア上の最適解の推移（各時点における投資比率[29]の推移）を表したものである。この数値実験ではモデル化している銀行を恒常的な資金不足状態に設定しており、負債側の制約は常にほぼ 100%まで使用されているので、ここでは資産への投資比率の推移のみを図にしている。図 4 より、全ての時点の意思決定において、要求される期待収益額が低い場合はリスクの低い国債や業種 1（高格付け）の貸出金への投資がほとんどを占め、要求期待収益額が高くなるにつれて、よりハイリスク･ハイリターンの資産である業種 2（低格付け）の貸出金へと投資先が移行する様子が確認できる。このような定量的な情報は信用リスクを考慮した最適化モデルでなければ得られないものである。また、時間の経過とともにコールローンの投資比率が大きくなるのは、計画期間中にデフォルトが生じたシナリオにおいて、発生した回収率分のキャッシュフローのうち、取引量の上限制約により他の資産へ投資しきれなかった分が全て

[26] 運用側に比べて調達側の制約を厳しくし、調達側の取引量上限制約をほぼ 100%まで使われるようにした。

[27] 本モデルでは、コールローンはデフォルト発生により生じる巨額のキャッシュフローの受け皿としての機能があるため、コールローンの取引量上限制約は設けない。

[28] 運用資金の調達を能動的に行うことができない時点 5 および時点 6 では、制御不可能な資産の新規増分をカバーするために、コールマネーの取引量上限制約を緩める必要がある。

[29] 制御可能な新規増分のみを対象として投資比率を算出した。したがって、図中で投資比率が 0%となっていても、その資産に全く投資されないのではなく、制御不可能な分は自動的に投資されている。また、取引額がシナリオごとに異なる値となる資産もあるが、そのような資産に関しては全てのシナリオの期待値を用いて投資比率を算出している。

コールローンへ投資されたことの結果で、このモデルの特有の現象である。

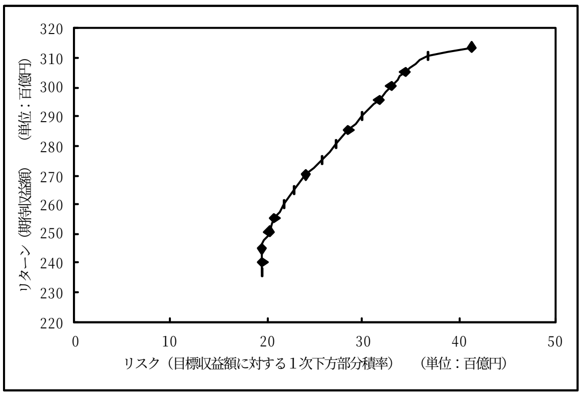

図 2　効率的フロンティア

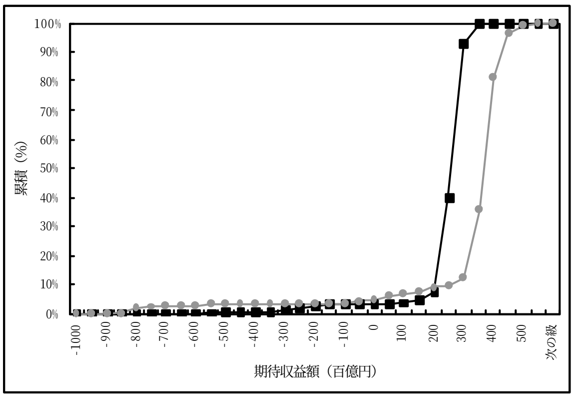

図 3　計画最終時点における期待収益額の累積度数分布

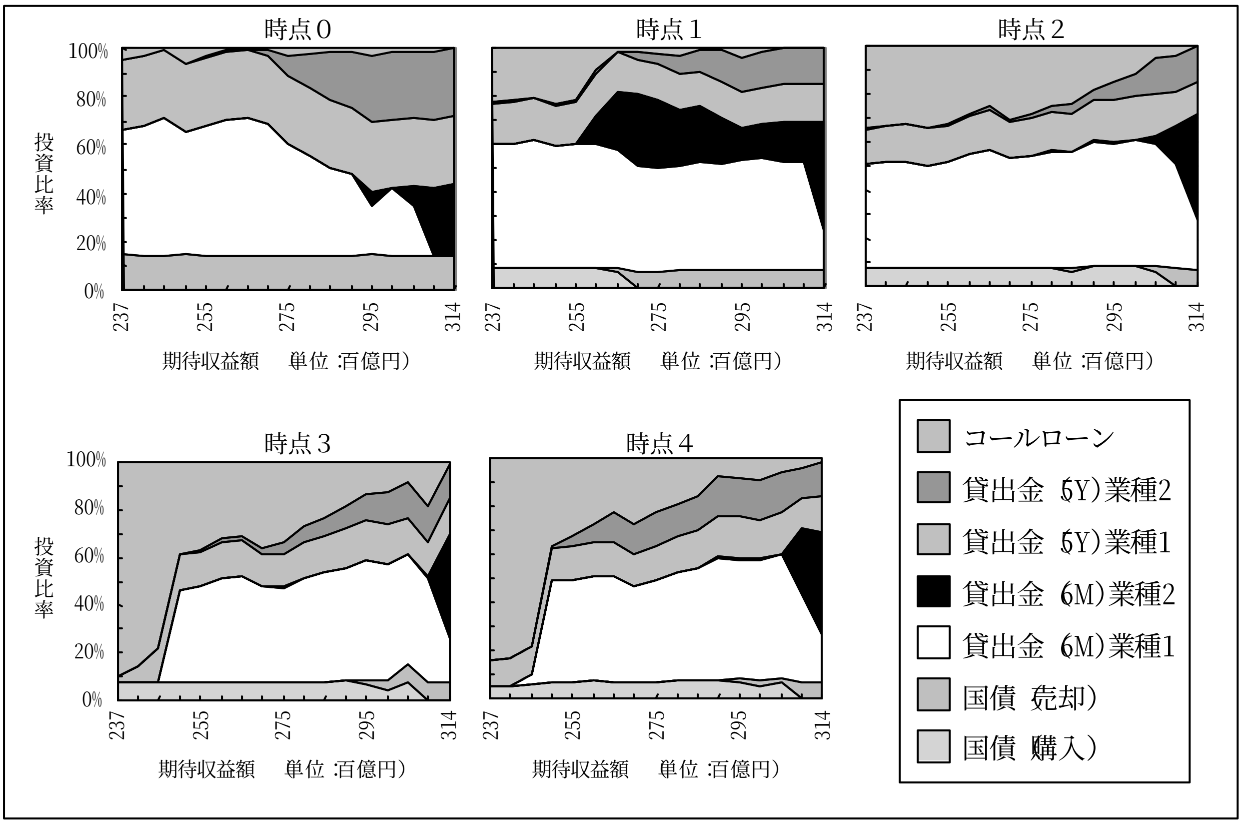

図 4　効率的フロンティア上の最適解の推移

4-3．数値実験 2　：　インプット･データに対する感度分析

意思決定のファクターになっていると考えられる以下のインプット･データに対して感度分析を試みた。

① 金利期間構造の形状

- **金利下降局面　：　初期時点（時点** 0）5% → 10 **年後（時点** 20）7%**（上昇率は一定）**
- **金利一定　　　：　初期時点（時点** 0）5% → 10 **年後（時点** 20）5%
- **金利上昇局面　：　初期時点（時点** 0）5% → 10 **年後（時点** 20）3%**（下降率は一定）**

② 金利ボラティリティ[30]

- **金利ボラティリティ水準が低い場合**　　：　$a = 0.03$,　$s = 0.001$

---

[30] a **および** s **は無リスク金利のモデル化に用いた** Hull-White **モデルのボラティリティ･パラメータである。**

・金利ボラティリティ水準が中程度の場合： $a = 0.03,\ s = 0.003$
・金利ボラティリティ水準が高い場合　　： $a = 0.03,\ s = 0.005$

③ 金利変動と信用変動の相関
・負の相関 ： 金利変動と信用変動の相関係数 －0.33
・無相関 ： 金利変動と信用変動の相関係数 0
・正の相関 ： 金利変動と信用変動の相関係数 0.33

④ 信用変動間の相関
・負の相関 ： 業種 1 と業種 2 の相関係数 －0.3
・無相関 ： 業種 1 と業種 2 の相関係数 0
・正の相関 ： 業種 1 と業種 2 の相関係数 0.3

①～④のそれぞれについて、各インプット･データを変化させたときに制御可能な新規増分（決定変数）の値がどのように変化するかを図 5～8 に示す。この感度分析の結果では直感的に理解することが困難な結果がいくつか見られた。この点に関しては後述することとし、以下に解釈可能な部分に関してのみ考察を行う。

① 金利の期間構造の形状が最適解に与える影響（図 5）

長期の固定金利資産である国債等の収益率は、金利下降局面では高くなり、上昇局面では低くなる。この影響から、例えば時点 1 における意思決定では、金利下降局面から上昇局面に移行するにつれて国債が購入から売却へ推移している。また、国債の収益率が著しく減少することを受けてか、全体的にコールローンや業種 1 の 6 ヶ月物貸出金など収益率の低い資産から、リスクはあるが収益率の高い業種 2 の貸出金に投資先が移行している。

② 金利ボラティリティが最適解に与える影響（図 6）

金利ボラティリティの水準が高くなれば金利リスクが大きくなるため、長期の資産から短期の資産へと投資先が移行することが想像される。例えば時点 1 の意思決定では、金利ボラティリティ水準が上昇するにつれて 10 年物という長期の資産である国債を購入から売却に転換し、その資金を短期資産である 6 ヶ月物貸出金に移している。また時点 4 でも、長期の 5 年物貸出金から短期のコールローンへと投資先を変更していることが確認できる。

③ 金利変動と信用変動の相関が最適解に与える影響（図 7）

金利変動と信用変動の相関係数が低ければ、債券と貸出金の収益率の相関係数が高くなり、ポートフォリオのリターンとリスクはともに増加する。また、金利変動と信用変動の相関係数が高ければその逆となる。例えば時点 2 の意思決定では、相関係数が負の場合はリスクの高い業種 2 の貸出金への投資を控えてローリスク･ローリターンの国債やコールローンで運用しようとするが、相関係数が正になると、ハイリスク･ハイリターンである業種 2 への投資量が格段に増えてくる。

④ 信用変動間の相関が最適解に与える影響（図 8）

信用変動間の相関係数が低ければ、貸出金の収益率間の相関係数も低く、ポートフォリオのリターンおよびリスクは小さくなる。信用変動の相関係数が高ければその逆となる。例えば時点 0 の意思決定では、相関係数が高くなるにつれて、金利リスクも信用リスクも大きい業種 2 の 5 年物貸出金から､金利リスクも信用リスクも小さい業種1の 6 ヶ月物へと投資先を移行させている。

前述したように、①～④のいずれにおいても、直感的に理解することが困難な結果が幾つか見られる。例えば①に関して、金利下降局面から金利上昇局面へと変化するにつれて国債の収益率が著しく低下するのであれば、投資先を業種 2 の貸出金へ移行するよりも前に、全ての時点において国債をもっと売却すればよいはずである。しかし、そのような動きはほとんど見られない。また、多くの時点では、低下する国債の収益率をカバーするために業種 2 の貸出金へと投資先を移行させているが、時点 1 に関しては業種 2 の 6 ヶ月物貸出金への投資を抑えようとする動きが

見られる。同様に④では、信用変動間の相関係数が高くなるにつれて、リスクの大きい業種 2 の 5 年物貸出金からリスクの小さい業種 1 の 6 ヶ月物貸出金へと移行するが、業種 2 の 5 年物貸出金への投資量を減らしたことによるリスクおよびリターンの減少量が大きすぎたためか、時点 4 では、金利リスクはないが信用リスクの大きい業種 2 の 6 ヶ月物貸出金への投資を増加させている。これらの現象はいずれも、インプット･データが変化したときに、例えばある資産 A に対する投資を少し減少させれば制約条件は満たされるところを、その資産への投資を必要以上に減らして、本来は増やすべきではない資産 B への投資量を多少増加させることにより調整するといった傾向としてまとめることができる。

この原因としては第１に考えられることは、資産の種類数および時点の数が多すぎるため、それらの間で代替性が高くなってしまい、解が退化しているという点である。すなわち、先に述べたような現象は、

資産 A への投資量を少し減らしたときのリスクおよびリターンの変化量
＝　資産 A への投資量を大きく減らして、資産 B への投資量を多少増やしたときのリスクおよびリターンの変化量

という構造が原因となって生じているということである。たとえ業種セクター数が 2 と少なくても、同じ資産に対する決定変数が意思決定可能な時点の数だけあり、同一資産の異なる時点の決定変数間で代替が行われる可能性は十分にある。また、その他の原因としては、新規増分に関する決定変数は残高に対して小さいことや、内点法の収束条件が緩い、といった理由から資産間に代替性が現れやすくなり解が退化したことや、シナリオ数が少ないために解が十分収束していないことも考えられる。

いずれにせよ今回の数値実験の結果だけでは判断できないが、もし解が退化していることが原因であるとすれば、意思決定が可能な時点数を減少させる必要性等が生じてくるであろう。この点に関する原因の究明は、本モデルの有効性の実証だけでなく、対象とする資産の種類数や時点の数が多い銀行の ALM 等に対して多期間確率計画モデルを適用する場合の問題点を確認するためにも重要なことであり、今後の課題としたい。

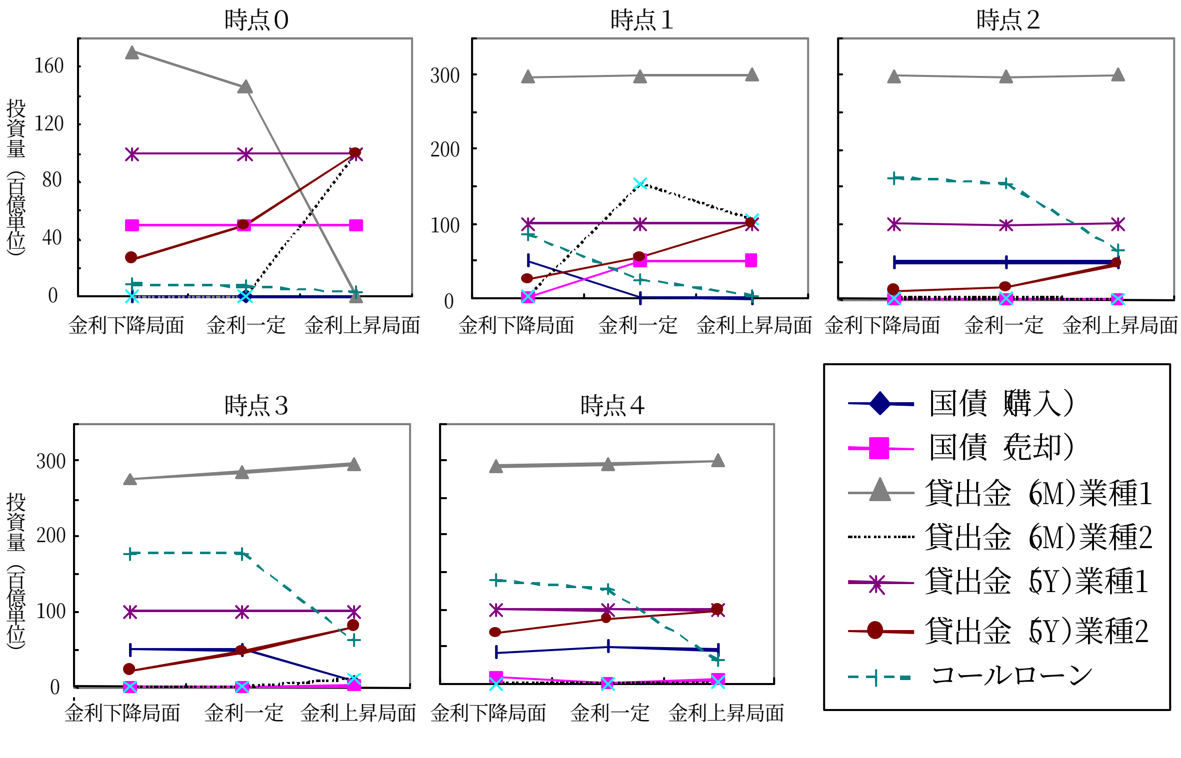

図 5　金利期間構造の形状と最適解の関係

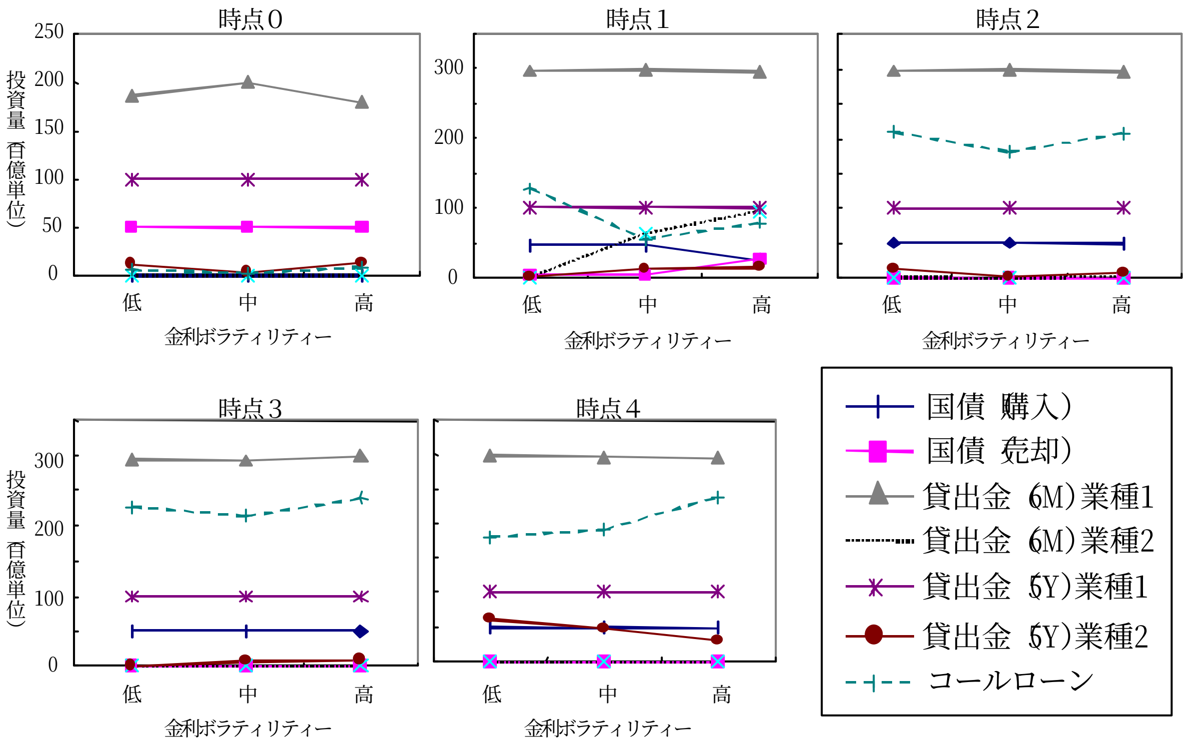

図 6　金利ボラティリティと最適解の関係

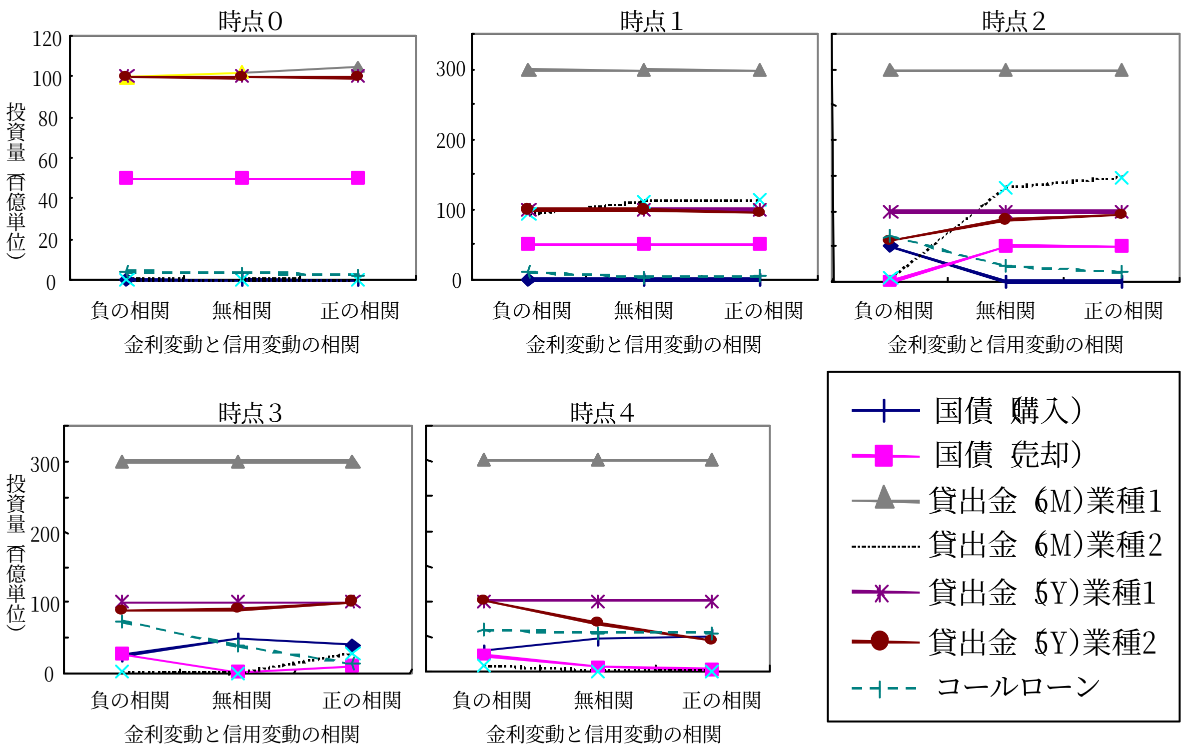

図 7　金利変動･信用変動の相関と最適解の関係

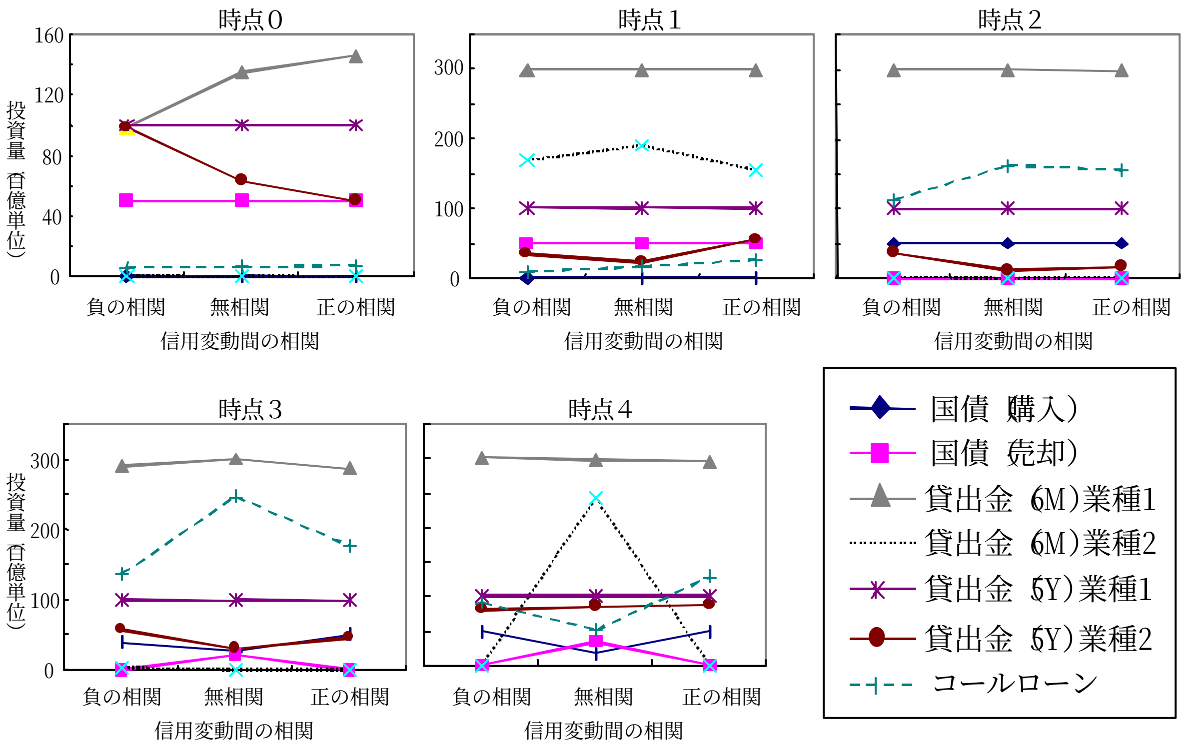

図 8　信用変動間の相関と最適解の関係

5．結論および今後の課題

本論文では、市場リスクと信用リスクおよびそれらの相関まで統合的に考慮した、ALM の考え方に基づくシミュレーション型多期間確率計画モデルを提案し、その具体的な構築方法を提示した。市場リスクと信用リスクを統合的に取り扱う場合、リスク･ファクターの次元数の増加により問題は複雑化するが、それらの確率的挙動をシミュレーションにより表現することで比較的簡単にモデル化を行うことができた。

効率的フロンティアおよびその上の最適解の推移等に関する数値実験結果は直感的に納得できるものであり、モデルの基本部分は機能していると思われる。モデルのアウトプットからは、要求される期待収益額の大きさに応じて、どの程度信用リスクをとることによりリターンを確保しなければならないかという定量的な情報を得ることができるが、このような情報は特に信用リスクを考慮した最適化モデルでなければ得られないものである。

しかし、インプット･データである初期時点の金利期間構造やボラティリティ、また各リスク･ファクター間の相関等に対する感度分析では、解釈することのできない結果が幾つか見られた。この原因としては資産の種類数や時点の数が多いために解が退化していることなどが考えられるが、この点に関しては今後の課題としたい。

今回の数値実験によると、シナリオ数 1000 本、計画期間中の時点数 6、業種セクター2、資産および負債の種類数 7 という規模で、決定変数および制約条件式の数はそれぞれ 20 数万程度となるが、係数行列の疎大性が極めて高い定式化を行うことにより、PC レベルの計算環境（CPU：Intel PentiumⅢ933MHz、メモリ：384MB のマシン）でも 5 分程度で問題を解くことができた。この計算速度ならば、高性能なワークステーションやスーパーコンピュータを利用せずに、実務レベルで本モデルを利用することも十分可能であるといえよう。

参考文献

［1］T. M. Barnhill, Jr., W. F. Maxwell and M. R. Shenkman（1999）「High-Yield Bond」, *McGraw-Hill*

［2］D. Giokas and M. Vassiloglou（1991）, “A Goal Programming Model for Bank Assets and Liabilities Management”, *European Journal of Operational Research*, pp.48-60.

［3］B. Golub, M. Holmer, R. McKendall, L. Pohlman, and S.A. Zenios（1995）”A stochastic programming model for money management”, *European journal of operational research,* 85, no. 2, pp.282-296.

［4］S. Guven and E. Persentili（1997）, “A Linear Programming Model for Bank Balance Sheet Management”, *Omega*, 25, No.4, pp.449-459.

［5］J. Hull and A.White（1990）”Pricing interest-rate derivative securities”, *Rev.Fin.Stud.,* 3, pp.573-592.

［6］P. Klassen（1998）”Financial Asset-Pricing Theory and Stochastic Programming Models for Asset/Liability Management: A Synthesis”, *Management Science,* vol.44, no.1, pp.31-48.

［7］A. Korhohen（1987）”A dynamic bank portfolio planning model with multiple scenarios, multiple goals and changing priorities”, *European journal of operational research,* 30, pp.13-23.

［8］M.I. Kusy and W.T. Ziemba(1986), “A Bank Asset and Liability Management Model”, *Operations Research*, 34, No.3, pp.356-376.

［9］J.P.Morgan（1997）「CreditMetrics™ – Technical Document」.

［10］S.A. Zenios（1995）, “Asset/Liability Management under Uncertainty for Fixed-Income Securities”, *Annals of Operations Research*, Vol. 59（1995） pp.77-97.

［11］W.T. Ziemba and J.M. Mulvey（1998）, 「Worldwide Asset and Liability Modeling」, *Cambridge University Press*.

［12］大久保豊 編（1997）「アーニング･アット･リスク」, 金融財政事情研究会.

［13］戒能通康（2000）“銀行のリスク管理手法に関する研究”, 慶應義塾大学大学院 理工学研究科 管理工学専攻 修士論文.

［14］齋藤直紀（2001）“市場リスクと信用リスクを考慮した銀行の資産負債管理に対する確率的最適化モデル”, 慶應義塾大学大学院 理工学研究科 管理工学専攻 修士論文.

［15］竹原均（1997）「ポートフォリオの最適化」, 朝倉書店.

［16］田中周二（2001） “金融リスクの統合管理の必要性”, ニッセイ基礎研「所報」, Vol.16, pp.1-13.

［17］田中周二, 室町幸雄（2001）“市場リスク・信用リスク統合評価モデル”, ニッセイ基礎研「所報」, Vol.16, pp.14-50.

［18］西田真二（1995）「ALM 手法の新展開」, 日本経済新聞社.

［19］枇々木規雄（1999）“戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル”, 日本金融・証券計量・工学学会 1999 年冬季大会予稿集, pp.36-55.

［20］枇々木規雄（2000）“資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル”, 日本金融・証券計量・工学学会 2000 年夏季大会予稿集, pp. 175-193.

［21］枇々木規雄（2000）“銀行 ALM : 数理計画モデルの適用”, 森平爽一郎 編「フィナンシャル・リスクマネージメント」第 3 章, pp.53-74, 朝倉書店.

［22］枇々木規雄（2001）「金融工学と最適化」, 朝倉書店.

［23］村木利雄 監修（1996）「銀行経理の実務」, 金融財政事情研究会.