年金 ALM モデルの比較分析–連続モデルと離散モデルの比較–

03000230 慶應義塾大学 理工学研究科, MTEC *川口 宗紀 KAWAGUCHI Muneki
01505910 慶應義塾大学 理工学部 枇々木 規雄 HIBIKI Norio

1. はじめに

年金負債の状況を考慮し年金資産の運用・管理を決定する年金 ALM のモデルには, 連続モデルである確率制御問題としてのアプローチと離散モデルである確率計画問題のアプローチの 2 つに大別できる. 両モデルに関しては様々に研究が進んでいるものの, 独立して進んでいると考えられる. 本稿ではこの 2 つのモデルの比較分析を行い, 解の傾向を調べる.

2. 問題設定

ある将来時点において, 年金資産額が年金負債額に満たない金額 (積立不足額) の平均値を最小化する問題を考える. つまり, 次のように定式化できる.

$$\min \ \mathbf{E}[(W_G - W(T))^+] \tag{1}$$

$W(T)$ は時点 $T > 0$ での年金資産額, W_G は年金負債額, $(x)^+ = x \ (x \geq 0),\ 0 \ (x < 0)$ を表す.

リスク資産 $S(t)$, 無リスク資産 $B(t)$ はそれぞれ 1 つずつ市場に存在すると仮定し, 価格変化は次の確率微分方程式に従うものとする.

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dw(t)), \tag{2}$$

$$dB(t) = B(t) r dt. \tag{3}$$

$(w_t)_{t\in[0,T]}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の 1 次元のブラウン運動である. また, $W(0)e^{rT} \leq W_G$ を仮定しておく.

(1) 連続モデル

Civitanić, J. and I. Karatzas(1999) によると, 時点 $T > 0$ での最適な年金資産額 $W^*(T)$ は

$$W^*(T) = W_G \mathbf{1}_{\{\xi(T)\leq\bar{\xi}\}}, \tag{4}$$

であり, $\xi(t)$ は状態価格密度過程 (state price density process) である. また, $\bar{\xi}$ は次を満たす[1].

$$W(0) = W_G \mathbf{E}[\xi(T)\mathbf{1}_{\{\xi(T)\leq\bar{\xi}\}}]. \tag{5}$$

時点 $t > 0$ での最適なリスク資産への投資比率 $\pi(t)$ は, 積立比率 $Y(t) = \frac{W(t)}{W_G e^{-r(T-t)}}$ によって与えられ,

$$\pi(t, Y(t)) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}Y(t)}(\varphi\circ\Phi^{-1})(Y(t)) & (0 < Y(t) \leq 1) \\ 0 & (Y(t) > 1) \end{cases} \tag{6}$$

となる. $\Phi(x)$ は標準正規分布の分布関数, $\varphi(x)$ は密度関数であり $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ である.

(2) 離散モデル

確率計画の 1 つのモデルとして, Hibiki(2006) の混合型シミュレーションモデルを用いる. 資産価格のパスをモンテカルロシミュレーションによって発生させ, その上で最適投資戦略を導出するモデルである. 時点 T までを N 期間に均等に分割する. 最適化問題は以下の通りである.

$$\textbf{Minimize} \quad \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} q^{(i)}, \tag{7}$$

subject to

$$S_0 z_0 + v_0 = W_0,$$

$$S_{t_1}^{(i)} h^{(i)}(z_0) + (1 + r(t_1 - t_0))v_0 = S_{t_1}^{(i)} h^{(i)}(z_{t_1}^s) + v_{t_1}^{(i)} \quad (i \in V_{t_1}^s; s \in U_{t_1}),$$

$$S_{t_k}^{(i)} h^{(i)}(z_{t_{k-1}}^{s'}) + (1 + r(t_k - t_{k-1}))v_{t_{k-1}}^{(i)} = S_{t_k}^{(i)} h^{(i)}(z_{t_k}^s) + v_{t_k}^{(i)}$$
$$(k = 2, \ldots, T-1; i \in V_{t_k}^s; s \in U_{t_k}; s' \in U_{t_{k-1}}),$$

$$W_{t_N}^{(i)} = S_{t_N}^{(i)} h^{(i)}(z_{t_{N-1}}^{s'}) + (1 + r(t_N - t_{N-1}))v_{t_{N-1}}^{(i)} \quad (i \in V_{t_{N-1}}^s; s' \in U_{t_{N-1}}),$$

$$W_{t_N}^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G \quad (i = 1, \ldots, I).$$

$h^{(i)}(z_t^s)$ は投資量関数である. 変数を以下に示す.

1. 集合
   - U_t: 時点 t での意思決定ノードの集合
   - V_t^s: 時点 t で意思決定ノードの s を通るパスの集合 $(t = t_1, \ldots, t_N)$
2. パラメータ
   - I: サンプルパスの数
   - S_0: 時点 0 でのリスク資産の価格
   - $S_t^{(i)}$: 時点 t, パス i でのリスク資産の価格 $(t = t_1, \ldots, t_N; i = 1, \ldots, I)$
   - r: 無リスク資産のリターン
   - W_0: 時点 0 での年金資産額
   - W_G: 時点 T での年金負債額
3. 決定変数
   - z_0: 時点 0 でのリスク資産への投資単位数
   - z_t^s: 時点 t, 意思決定ノード s でのリスク資産への投資単位数 $(t = t_1, \ldots, t_N; s \in S_t)$
   - v_0: 時点 0 での無リスク資産への投資額
   - $v_t^{(i)}$: 時点 t, パス i での無リスク資産への投資額 $(t = t_1, \ldots, t_N; i = 1, \ldots, I)$
   - $W_t^{(i)}$: 時点 t, パス i での年金資産額 $(t = t_1, \ldots, t_N; i = 1, \ldots, I)$
   - $q^{(i)}$: 時点 T, パス i での積立不足額 $(i = 1, \ldots, I)$

[1] ただし, この解は必ずしも一意ではない.

3. 数値計算結果

離散モデルと連続モデルでの最適投資戦略や次の 3 つの方法により計算した年金資産額を比較する.

方法 1. 連続モデルの最適戦略を連続的にリバランス (つまり, 連続モデルによる最適な年金資産額)

方法 2. 連続モデルの最適戦略を離散的にリバランス

方法 3. 離散モデルの最適戦略を離散的にリバランス

3.1. 時間の離散化による影響

方法 1 と方法 2 の比較により, 離散的なリバランスに伴う影響を調べる. 図 1 は, 方法 1 と方法 2(リバランス間隔を変えた 3 パターン) での年金資産額の分布を表している. 方法 2 においてリバランス間隔を増やしていくことにより, 方法 1 の分布に近づいていくことがわかる. しかし, 方法 2 では年金負債をわずかに超えない確率が比較的多く発生している.

この理由は次のように説明できる. 積立不足の状況下で LPM を最小化する場合の最適投資戦略は, 積立比率が低下すればするほどリスク資産への投資比率を高める「逆張り戦略」となる. 連続モデルでは短期的なリスク資産価格の変動からリターンが得られることを前提に, 最適戦略を構築している. その戦略を離散的にリバランスした場合には, 上記の効果によるリターンが失われるため, 方法 2 では年金資産が年金負債をわずかに超えない確率が高かったと考えられる.

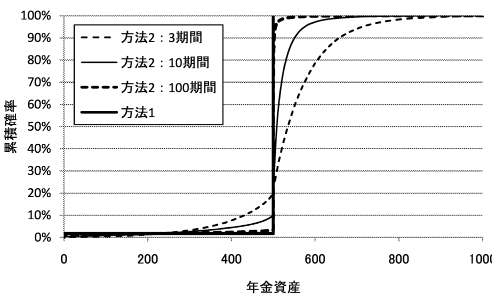

図 1: 離散的リバランスに伴う年金資産額の分布

3.2. 意思決定ノードの離散化による影響

方法 2 と方法 3 により, 意思決定ノードの離散化による影響の分析を行う. 図 2 は, 3 期間モデルでの方法 2 と方法 3 の LPM を表した. 横軸は方法 3 での意思決定ノードの数を表し, "1-3-9"であれば 3 つの期間で意思決定ノードの数が, 1 つ, 3 つ, 9 つであることを意味する. 方法 3 において, 意思決定ノードの分割数を増やすことで目的関数である LPM は減少していく傾向が見られる. この結果は意思決定ノードを増やすことにより, 投資戦略の柔軟性が高まった結果であると言える. 一方で, それぞれのノードを通るサンプルパスの数が減るため, サンプリングエラーが大きくなっている可能性がある

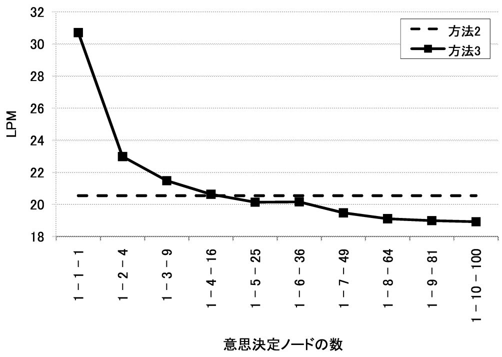

図 2: 意思決定ノードの離散化による LPM の違い

3.3. 2 つのモデルにおける最適戦略の比較

連続モデルと離散モデル (3 期間) により求めた最適戦略を比較したものが, 図 3 である. 横軸は初期時点 $t = 0$ での年金資産額を表し, 縦軸はリスク資産への投資比率を表している. 初期の積立比率を 10%から 90%まで 10%毎に設定し, それぞれ乱数列を変えて 5 回のシミュレーションを行っている. 積立比率が 100%付近では 2 つのモデルの最適投資比率はほぼ同じであるが, 積立比率が少なくなるほど離散モデルのリスク資産への投資比率が大きくなる傾向が見られる.

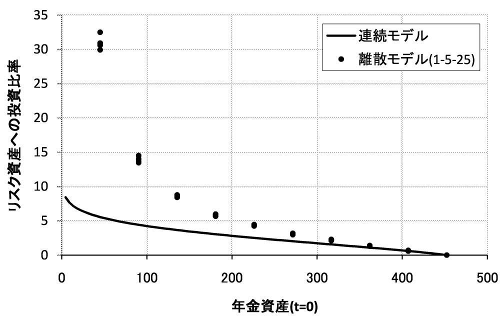

図 3: 初期時点 $t = 0$ でのリスク資産への投資比率

4. 考察と今後の課題

本稿では離散モデルと連続モデルを比較し, それぞれのモデルにおいて最適投資戦略に大きな違いがないことを確認した. 今後の課題は, これらの差異を解析的にもしくは数値的に整理することが挙げられる.

参考文献

[1] Civitanić, J. and I. Karatzas(1999), On dynamic measures of risk, *Finance and Stochastics*, **3**, 451-482.

[2] Hibiki, N.(2006), Multi-period Stochastic Optimization Models for Dynamic Asset Allocation, *Journal of Banking and Finance*, **30**(2), 365-390.