

## レジームスイッチングモデルとその応用に関する研究

申請中 慶應義塾大学大学院 理工学研究科 \*久保浩二 KUBO Koji  
01505910 慶應義塾大学 理工学部 枇々木規雄 HIBIKI Norio

### 1. 目的

ファンドマネージャーがポートフォリオを選択する際に最も一般的に用いるモデルとして、マーコビッツによって提案された「平均・分散モデル」がある。このモデルの特徴は、株式や債券の収益率が正規分布に従っていると仮定した上で、二次計画法を用いてポートフォリオを選択することである。

しかし、現実のマーケットには、株価の変動が激しい時期や安定している時期がある。このことを明示的に取り扱う方法として、一つの正規分布を仮定するのではなく、「マーケットの状態(レジーム)に依存した分布」を仮定する方法がある。本研究では、従来提案されているモデルを修正し、このようなレジームの変化を考慮したいくつかの最適化モデルの特徴を、通常平均・分散モデル、従来のレジーム・スイッチングモデル、レジーム・スイッチングモデルを応用した混合正規分布モデルとの比較を通じて検証する。

### 2. モデルの説明

#### 2-1 プロセスの概要

- ① Hamilton[2]の提案したレジーム・スイッチングモデルを利用してマーケットの状態(レジーム)を分類する。
- ② 今後のレジームを予測する。
- ③ 予測したレジームに応じてポートフォリオの最適化を行う。

#### 2-2 レジーム・スイッチングモデル

各資産のリターンは、(1)式のようなレジームに依存した、異なる平均、分散、相関を持つ正規分布に従うと仮定する。また、レジームの推移はマルコフ過程に従って推移すると仮定し、推移確率行列を(2)式のように表す。

$$f(y_t | s_t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Omega_{s_t}|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(y_t - \mu_{s_t})' \Omega_{s_t}^{-1} (y_t - \mu_{s_t})}{2} \right] \quad (1)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$y_t$  : 各資産の収益率 (ベクトル)

$s_t$  : 期間  $t$  におけるレジーム

$n$  : 資産の数

$\mu_{s_t}$  : レジーム  $s_t$  における期待収益率

$\Omega_{s_t}$  : レジーム  $s_t$  における収益率の分散共分散行列

$p_{ij}$  : レジーム  $i$  からレジーム  $j$  へ推移する確率

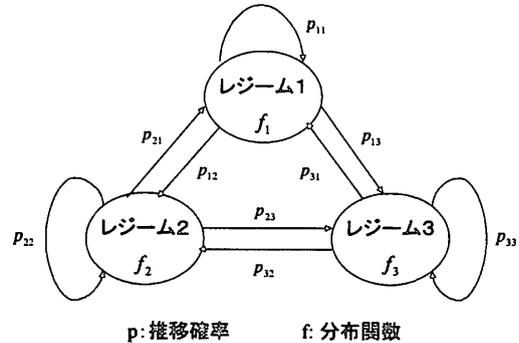


図 1: レジーム・スイッチング

#### 2-3 レジームの予測

今後の 1 期間において、各レジームが発生する確率  $\xi_{i,t+1} = (p_1 \cdots p_N)$  を、以下の 2 つの方法を用いて求める。

方法 1 : (3) 式のように現在までのレジームとレジームの推移確率行列から、各レジームが発生する確率を計算する。(パッシブ運用)

$$\xi_{i,t+1} = P \cdot \xi_{i,t} \quad (3)$$

方法 2 : 過去の情報にとらわれず、ファンドマネージャーの予測に基づいて各レジームが発生する確率を決定する。(アクティブ運用)

#### 2-4 ポートフォリオの最適化

今後のレジームの予測に基づき、以下の 2 つの方法を用いて、平均分散モデルにより最適ポートフォリオを求める。

方法 1: 予測したレジームの発生確率に基づいて、一つのレジームが発生すると仮定する。この場合、一期間において各資産の収益率が従う分布は正規分布である。(従来のレジーム・スイッチングモデル)

$$\text{Min } E[\sigma_p^2] = \sum_{j=1}^N p(s_{t+1} = j | Y_t) \sigma_p^2(s_{t+1} = j)$$

$$\text{s.t. } E[r_p] = \sum_{j=1}^N p(s_{t+1} = j) r_p(s_{t+1} = j) \geq r_E$$

$$x'1 = 1$$

$\sigma_p^2$  : ポートフォリオの分散

$r_p$  : ポートフォリオの期待収益率

$r_E$  : 要求期待収益率

$x$  : 投資比率

方法 2：各資産の収益率が、各レジームにおける正規分布をレジームの発生確率によって重み付けした、混合正規分布に従うと仮定して最適化。(混合正規分布モデル)

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sigma_p^2 \\ & \text{s.t. } \hat{r}_p \geq r_E \\ & \quad \mathbf{x}'\mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

$\sigma_p^2$  : ポートフォリオの分散  
 $\hat{r}_p$  : ポートフォリオの期待収益率

表 1：比較・検証するモデル

想定する分布\レジームの予測	パッシブ運用	アクティブ運用
正規分布	モデル1	モデル3
混合正規分布	モデル2	モデル4

### 3. 数値実験

1979年12月～2003年10月のTOPIXと日興債券インデックスの月次データを用いて、表1に示す4つのモデルと通常の平均分散モデルを分析し、比較する。なお、本研究においては3つのレジームが存在すると仮定し、それぞれレジームF、レジームN、レジームSと名付ける。また、1ヶ月を1期間とする。

#### 3-1 レジームの分類

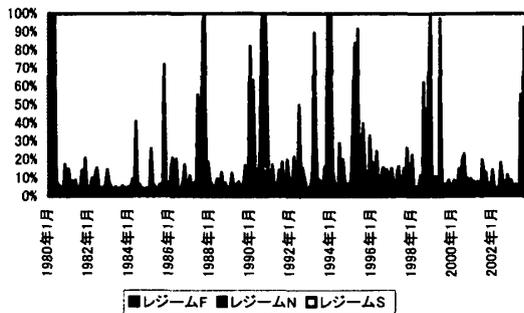
・期待収益率、標準偏差、相関係数

レジームF			レジームN		
	株式	債券		株式	債券
期待収益率	-1.76	0.17	期待収益率	-0.82	0.08
標準偏差	9.86	3.65	標準偏差	7.34	1.73
相関係数	0.20		相関係数	-0.36	

レジームS			全体		
	株式	債券		株式	債券
期待収益率	0.57	0.58	期待収益率	0.29	0.50
標準偏差	4.68	0.87	標準偏差	5.43	1.25
相関係数	0.19		相関係数	0.08	

・各期間におけるレジーム



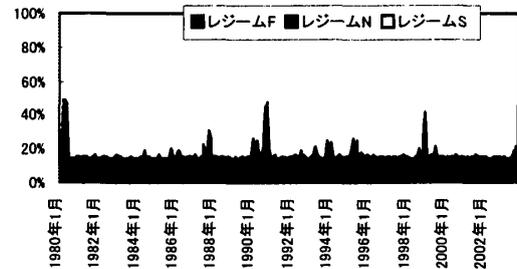
・レジームの推移確率

	レジームF	レジームN	レジームS
レジームF	0.35	0.14	0.51
レジームN	0.06	0.12	0.82
レジームS	0.03	0.11	0.86

#### 3-2 レジームの予測

レジームの推移確率行列を用いて、各期間において、各レジームが発生する確率を計算した結果を以

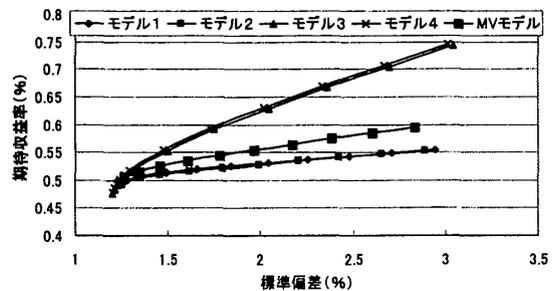
下の図に示す。(モデル1、モデル2に用いる)



今回の分析においては、モデル3とモデル4におけるレジームの予測が正確なものであったと仮定して分析する。

#### 3-3 ポートフォリオの運用結果

各モデルのパフォーマンス



### 4. 結論

レジームを分割した結果から、株式と債券の収益率の従う分布は、時期によって大きく異なるということが推測される。レジームに対する予測が正しければモデル3、4のように高いパフォーマンスを達成することができる。しかし、比較的ボラティリティの高いレジームに関しては持続期間が非常に短く、推移確率行列を用いてレジームを予測した場合は、それらのレジームへのシフトを予測することは難しい。そのため、モデル1、2のパフォーマンスは通常平均分散モデルよりも悪いものとなってしまった。以上のことから、このモデルは今後のレジームに対する予測の精度に大きく依存することがわかる。

### 5. 今後の課題

レジームの予測の精度を高めることが不可欠であるが、そのために、各レジームが発生していたときに何が起きていたのかを定性的に意味付けしておくことが必要である。また、より多くのシナリオのもとで分析を行い、モデルの特徴をより詳細に調べていくことが必要である。

### 6. 参考文献

- [1] 枇々木規雄(2001), 金融工学と最適化, 朝倉書店
- [2] J.H.Hamilton, Time Series Analysis (1994), pp.677-703, Princeton University Press.