多期間ポートフォリオ最適化問題のための数理計画モデル

枇々木　規雄
慶應義塾大学 理工学部 管理工学科
hibiki@ae.keio.ac.jp

Mathematical Programming Models for Multi-period Portfolio Optimization Problems

Norio HIBIKI
Faculty of Science and Technology, Keio University

Abstract: This paper discusses optimal dynamic investment policies for investors, who make the investment decisions in each of the asset categories over time. We formulate the multi-period stochastic optimization models, and explain three types of the linear programming models, such as scenario tree model, simulated path model, and hybrid model. These formulations can be simply implemented and solved very fast.

Keywords: Dynamic asset allocation, Stochastic programming model, Monte Carlo simulation

1　はじめに

複数の投資対象の中から投資家にとって最も好ましいように、どの投資対象にどれだけ投資をしたらよいかという問題をポートフォリオ最適化問題という。ポートフォリオ最適化問題を解くためのモデルとしては、モデル構築や解法上の容易さから、運用期間にかかわらず、平均・分散モデルを代表とする1期間モデルが中心的に用いられている。しかし、年金基金などの長期的な資金運用を行う投資家にとって、多期間にわたる不確実性を考慮した動的投資政策の決定を「明示的に」モデル化するためには、1期間モデルではなく、多期間モデルを構築する必要がある。

多期間モデルによるポートフォリオ最適化問題として最初に提案されたのは、確率制御 (動的確率計画) モデルのタイプである。Merton[5] と Samuelson[8] によって基本的枠組みが提示されたが、確率制御モデルは一般に問題を解くのが難しい。金融経済学の側面から様々な研究がされているが、詳しくは本多 [3] を参照してもらうとして、本稿では数理計画モデルとして定式化を行うことができるモデル化の方法について議論する[1] 。

多期間ポートフォリオ最適化問題を実際に解くためのモデルとしては、シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルが中心となって発展している。シナリオ・ツリー型多期間確率計画モデルは、シナリオ・ツリーによって不確実性を離散的に記述し、各ノードにおいて条件付き意思決定を行うモデルである。離散的な確率変数を用いることによって、定式化上では確定的なパラメータによる数理計画モデルとして記述でき、様々な実務的制約を入れて問題を解くことができる。シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルは近年、コンピュータの高速化と解法アルゴリズムの発展に伴い、大規模な問題を解くことが可能になり、様々な研究が行われている[2] 。しかし、シナリオ・ツリー型モデルは不確実性の記述を詳細にしようとすると、問題の規模が指数的に増加するという欠点がある。また、問題を大規模にしないためには数少ないシナリオでうまく不確実性を記述しなければいけない難しさもある。

[1] この問題のタイプは連続時間と離散時間のモデル化が考えられるが、数理計画モデルとしての定式化を行うために、離散時間によるモデル化に限って話を進める。

[2] シナリオ・ツリー型モデルを中心に資産配分問題やALMに関する最近の研究成果を集めた論文集として Ziemba and Mulvey[10] がある。特に、第1章は研究分野全体のサーベイがあり、興味のある研究者には参考になるだろう。また、Mulvey and Ziemba[7] も同様にサーベイを行っている。

一方、確率制御モデルのタイプでも、離散時間で離散分布に従う確率変数をモンテカルロ・シミュレーションにより発生させたパスを利用して不確実性を記述することによって、数理計画問題として定式化が可能である。このタイプのモデルは、意思決定を簡便にするのと引き換えに、シナリオ・ツリーに比べて不確実性をより詳細に記述することが可能である。しかし、非凸非線形計画問題として定式化されるため、一般に大域的最適解を保証することができない。そこで、枇々木[1]は投資決定ルールを変更することによって、線形計画問題として記述できるシミュレーション型モデルを開発している。さらに、この枠組みのもとで二種類のタイプのモデルの長所を組み合わせたモデルとして、シミュレーション/ツリー混合型モデル[2]も提案している。

以降では、過去に多くの研究が行われているシナリオ・ツリー型モデルと枇々木が開発したシミュレーション型モデル、シミュレーション/ツリー混合型モデルの3つのタイプのモデルを紹介し、数理計画における多期間モデルの構築方法について議論する。

2　多期間ポートフォリオ最適化問題

1期間モデルは株式ポートフォリオ運用や資産配分決定など、様々なタイプの問題に適用されている。多期間モデルも理論上(定式化上)はほとんどの問題に適用することは可能であるが、実際には問題の規模が膨大になるために、現時点では資産配分問題やALM問題などへの適用が現実的である。以降では、資産配分問題への適用を中心に多期間確率計画モデルについて議論していく。

ポートフォリオの収益(富)は、「ポートフォリオの構成」と「ポートフォリオに含まれる資産価格変動(収益率)の確率分布」によって決まる。各資産価格変動の確率分布はあらかじめ想定された分布を用いるが、各時点でのポートフォリオの収益分布(富の分布)はポートフォリオの構成によって様々に変化する。多期間にわたる最適資産配分問題は、投資家にとって最大の期待効用、もしくは好ましいリスク・リターンを得られるように、各時点でのポートフォリオの収益の確率分布を制御する動的な資産配分(どのように資産配分を動的に変化させていくか)を決定する問題である。

2.1　1期間モデルと多期間モデル

(1) 1期間確率計画モデル

資産配分を計画する期間を(期間の長い)1期間と考えて資産価格変動(収益率)にある確率分布を想定し、現時点での投資のみを決定する問題を解くモデルである。例えば、計画期間を3年間と考えた場合には、3年間の資産価格変動(収益率)の確率分布を想定し、現時点での投資配分を決定する。一般によく知られている平均・分散モデルなどの1期間モデルの枠組みを直接利用できる。

(2) 多期間確率計画モデル

計画期間中に設定された複数期間で資産価格変動(収益率)の確率分布を想定し、各時点で異なる投資決定をする問題を解くモデルである。自己相関などの異時点間の関係も考慮でき、通常、計画期間全体での資産価格変動(収益率)の確率分布は各期間で想定した確率分布とは異なる。例えば、計画期間を3年間と考え、1カ月毎に資産価格変動の確率分布を想定する場合には、3年間の資産価格変動は36期間の確率変数の合成された分布に従うことになる。

多期間確率計画モデルは意思決定の戦略(頻度)によって、2つのタイプの戦略が考えられる。

買い持ち戦略型：計画期間の最初の時点でのみ投資配分の意思決定を行い、計画最終時点まで何もしない、つまり買い持ち(buy and hold)をする戦略のことである。

リバランス戦略型：計画期間に設定された複数時点で投資配分の意思決定を行う戦略のことである。通常、このタイプが多期間確率計画モデルと呼ばれる。

1期間と多期間は、表1のように不確実性(確率変数)の記述と意思決定の2つの側面に分けることができる[3]。

表1：最適化モデルと取引戦略

		意思決定	
		1期間モデル	多期間モデル
不確実性の記述	1期間モデル	平均分散モデル等	—
	多期間モデル	買い持ち戦略	リバランス戦略

ところで、何故、多期間で考える必要があるのだろうか。不確実性の記述という側面から考えると、資産価格変動を柔軟に記述できるというメリットがあるため、その必要性は極めて大きく、リスク評価を行う多くの研究で用いられている。それに加えて、多期間確率計画モデル(リバランス型)は意思決定の記述という側面においてもメリットがある。

長期的な投資計画を立てる場合、投資資産を持ち続けなければいけない必要はなく、途中でのリバランスを考えている。多期間確率計画モデルはこのことを「明示的に」モデル化し、意思決定に役立てることができる。モデルは初期時点だけでなく、将来時点での意思決定に対しても最適解を導出する。しかし、このモデルは、時間が経過したときに、モデルから得られた将来時点での最適解に従って投資行動を「しなければならない」ことを意図しているのではなく、「行うことを前提にして」初期時点の意思決定を導出することを目的としている。実際に時間が経過したときには、再度モデルを解き直して、その時点の先の将来も考慮して、その時点での意思決定を行うことになる。

多期間計画モデルは1期間計画モデルに比べて、長期的な投資計画のためのモデル化の方法として適しているが、以下のような欠点もある。

① 多期間にわたる不確実性を記述するために、1期間モデルに比べて多くの入力要素が必要である。

② 実際に問題を解くのが難しく、近似モデルでないと現実の問題を反映させるのは難しい。また、近似モデルであっても、最適解を導出するための計算時間は1期間モデルに比べて多くの時間が必要である。

多期間計画モデルを用いるか、1期間計画モデルを用いるかは、これらのトレード・オフを考慮して決める必要がある。

2.2 一般的なモデルの定式化

n 個の危険資産 $(j=1,\dots,n)$ と現金 $(j=0)$ に資金を配分する問題を考える。資産0を現金(安全資産、コールローン)、資産1 〜 資産n を危険資産とする対象資産数が $n+1$ 個の資産配分問題である。0時点を投資開始時点、T 時点を計画最終時点とする。また、$t-1$ 時点から t 時点までの期間を期間 t とする。

多期間計画モデルでは、期間 t での収益は $t-1$ 時点の投資配分によって決定される。モデル化を行う際に注意しなければいけないことは、危険資産は t 時点にならないと期間 t での収益が

[3]買い持ち戦略における確率分布は多期間の合成であるが、結果としてはある一つの確率分布になり、意思決定も初期時点のみなので、1期間計画モデルとして認識することができる。したがって、買い持ち戦略型を1期間確率計画モデルと同じ取り扱いをするならば、1期間と多期間を不確実性(確率変数)の記述と意思決定の2つの側面に分けて議論する必要はないと考えてよい。

確定しないのに対し、現金(安全資産)の期間 t における収益は $t-1$ 時点(投資配分を行う時点)で確定することを考慮することである。

以降のモデル化は多期間モデルに不可欠な定式化のみを示す[4]。3節では、線形計画モデルとして定式化ができるように投資量を決定変数とする定式化を示すが、一般に、ポートフォリオ選択問題における投資の意思決定は「投資比率」を決定することであるので、ここではその定式化を示す。まず、はじめに、モデル化に用いる記号を示す[5]。

(A) パラメータ

$\tilde{\mu}_{jt}$: 期間 t の危険資産 j の投資収益率。$(j=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T)$

r_0 : 期間 1 の金利(0 時点のコール・レート)。

$\bar{r}_{t-1}$: 期間 t の金利($t-1$ 時点のコール・レート)。$(t=2,\ldots,T)$

W_0 : 0時点での富(初期富)。

(B) 決定変数[6]

w_{jt} : t 時点の危険資産 j への投資比率。$(j=1,\ldots,n;\ t=0,\ldots,T-1)$

c_t : t 時点の現金(コール運用)の比率。$(t=0,\ldots,T-1)$

$\tilde{W}_t$: t 時点での富。$(t=1,\ldots,T)$

ここで、'〜'は確率変数を表す。金利も確率変数であるが、各投資決定時点で確定するので、'―'を付けている[7]。

以下に、配分決定のための制約条件式とそれを用いて計算する各時点の富の計算式を示す。

(1) 0時点での配分決定 : w_{j0}, c_0

$$\sum_{j=1}^{n} w_{j0} + c_0 = 1 \tag{1}$$

(2) 0時点の配分決定による1時点の富

0時点で決定されたポートフォリオの(1時点までの)1期間における収益率 $\tilde{\mu}_{p1}$ は、

$$\tilde{\mu}_{p1} = \frac{\tilde{W}_1}{W_0} - 1 = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mu}_{j1} w_{j0} + r_0 c_0 \tag{2}$$

となり、(2)式を変形すると、(3)式を得る。

$$\tilde{W}_1 \;=\; (1+\tilde{\mu}_{p1})\,W_0 = \left\{ \sum_{j=1}^{n} (1+\tilde{\mu}_{j1}) w_{j0} + (1+r_0) c_0 \right\} W_0 \tag{3}$$

(3) $t-1$ 時点の配分決定 ($w_{j,t-1}$, c_{t-1}) による t 時点の富 $(t=2,\ldots,T)$

同様に、t 時点の富は $t-1$ 時点での配分決定をもとにして(4)式によって表すことができる。

$$\tilde{W}_t \;=\; \left\{ \sum_{j=1}^{n} (1+\tilde{\mu}_{jt}) w_{j,t-1} + (1+\bar{r}_{t-1}) c_{t-1} \right\} \tilde{W}_{t-1} \tag{4}$$

[4]実際には、投資比率の上下限制約や売買回転率制約などがこれらの定式化に追加される。
[5]モデルに対する入力変数をパラメータ、モデルからの出力変数を決定変数とする。
[6]意思決定に用いる変数は w_{jt} と c_t である。$\tilde{W}_t$ は w_{jt} と c_t によって記述される。
[7]期待値ではないことに注意すること。

$$(t-1\text{時点の配分決定})\quad \sum_{j=1}^{n} w_{j,t-1} + c_{t-1} = 1 \tag{5}$$

特に、$t = T$ のときは、計画最終時点 (T 時点) における富を表し、(6) 式で表すこともできる。

$$\tilde{W}_T \ = \ W_0 \cdot \prod_{u=1}^{T} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (1+\tilde{\mu}_{ju}) w_{j,u-1} + (1+\bar{r}_{u-1}) c_{u-1} \right\} \tag{6}$$

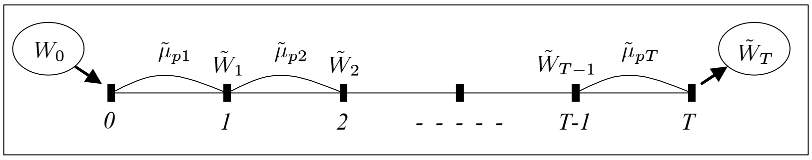

図 1 : 多期間投資決定問題のモデル化

(4) 目的関数

2つのタイプの目的関数を示す。

① 期待効用最大化

$$\textbf{Maximize} \quad E\left[U(\tilde{W}_T)\right] \tag{7}$$

② 2パラメータ・アプローチ

$$\textbf{Minimize} \quad g[\tilde{W}_T] \tag{8}$$

$$\textbf{subject to} \quad E[\tilde{W}_T] \geq W_E \tag{9}$$

ここで、$g[\tilde{W}_T]$ はリスク関数、W_E は投資家の要求する期待富を表す。

3　様々な多期間確率計画モデルの定式化

実際に多期間確率計画問題を解くためのモデルとして、近似の方法が異なる3種類のタイプのモデル化の方法を示す。2.2節の定式化では、投資比率を決定変数とするモデル化の方法を示したが、多期間モデルではそのことがモデルの非線形構造の (非凸非線形計画問題として定式化される) 原因となっていて、一般に大域的最適解を保証することができない。そこで、ここでは、線形計画モデルとして定式化ができるように投資量を決定変数とする2パラメータ・アプローチによる下方リスクモデルの定式化を示す[8] 。リターン尺度には計画最終時点における富 (最終富) の期待値 (期待富)、リスク尺度には計画最終時点における富がその目標水準 (目標富) を下回る大きさ (不足分) を設定する。以降、3種類のモデルを示すが、まずはじめにそれらで共通に使われるパラメータと決定変数を示す。

<u>パラメータ</u>

ρ_{j0} : 0時点の危険資産 j の価格。$(j = 1, \ldots, n)$

r_0 : 期間 1 の金利 (0 時点のコール・レート)。

[8]投資額を決定変数としても線形計画モデルとして定式化することができるが、紙面の都合上省略する。また、シナリオ・ツリー型モデルでは、決定変数を投資比率ではなく、投資額もしくは投資量とした場合でもすべて等価なモデルとなる。それに対し、シミュレーション型モデルとシミュレーション/ツリー混合型モデルでは投資比率、投資額、投資量のどれを決定変数にするかによってモデルから得られる最適解は異なる (等価にならない)。この点は注意する必要がある。

W_0 : 0時点での富 (初期富)。

W_E : 計画最終時点で投資家が要求する期待富。

W_G : 計画最終時点での目標富。

決定変数

z_{j0} : 0 時点の危険資産 j への投資量。$(j = 1, \ldots, n)$

3.1 シナリオ・ツリー型多期間確率計画モデル

3.1.1 不確実性の記述と投資の意思決定

シナリオ・ツリー型モデルでは、図2のようなツリー構造で不確実性と投資決定を描くことができるシナリオ・ツリーをもとにモデル化が行われる。状態 (ノード) がつながっている経路のことをシナリオと呼ぶ。

シナリオ・ツリーは、t 時点の状態の次に発生する $t+1$ 時点の状態が複数存在するので、各状態毎に不確実性条件下での投資の意思決定を行うことになる。しかも、t 時点でどの状態になったのかが分かった後に、t 時点での意思決定が行われることを想定したモデル化である。したがって、この意思決定は各状態下での条件付き意思決定となる。

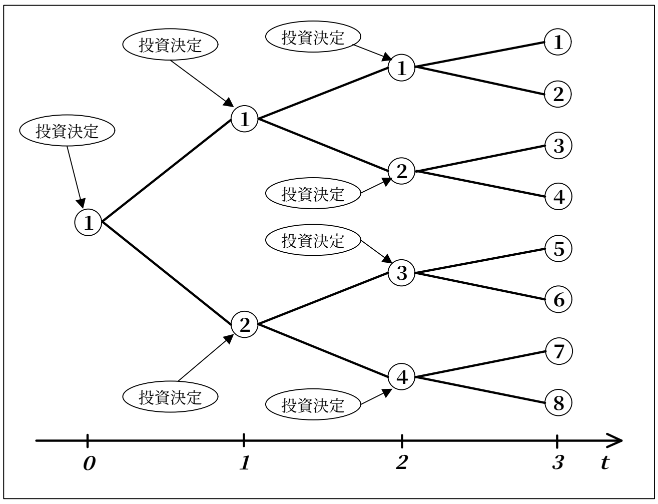

図 2 : シナリオ・ツリー

シナリオ・ツリー型モデルでは投資の意思決定を表す決定変数の取り扱い方によって、二種類の定式化の方法がある。

- 分割変数表現 : 各シナリオ毎に決定変数を設定し、非予想制約式を追加する定式化の方法。
- コンパクト表現 : 各状態 (ツリー上の各ノード) 毎に決定変数を設定し、定式化する方法。

コンパクト表現は分割変数表現に比べて、異時点間の情報を考慮したモデル化のために多少取り扱いにくいが、問題の規模 (制約式と決定変数の数) ははるかに小さい。しかし、分割変数表現による定式化 (モデル化) は疎大構造を持っているので、内点法の計算アルゴリズムにとても適しているという研究結果もある。一方、コンパクト表現をすることによって内点法では (分割変数表現に比べて) 有利にはならないが、単体法では有利であるという研究もある。確率計画モデルでは、モデルとアルゴリズムが密接に関連しており、問題の定式化が異なれば、異なるアルゴリズムが必要となる[9] 。

3.1.2 モデルの定式化

(A) 添字および集合

s : 状態を表す添字で、時点 (t) とともに記述する。

s' : 任意の時点の状態 s につながっている 1 時点前の状態を表す添字。

[9]詳しくは、Messina and Mitra[6] を見よ。

S_t : t 時点の状態 s の集合。$(t=1,\ldots,T)$

(B) パラメータ

ρ_{jt}^s : t 時点の状態 s の危険資産 j の価格。$(j=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T;\ s\in S_t)$

$r_{t-1}^{s'}$: 期間 t の金利 $(t-1$ 時点のコール・レート$)$。$(t=2,\ldots,T;\ s'\in S_{t-1})$

p^s : 計画最終時点の状態 s(シナリオ s) の発生確率。$(s\in S_T)$

(C) 決定変数

z_{jt}^s : t 時点の状態 s の危険資産 j への投資量。$(j=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T-1;\ s\in S_t)$

q^s : 計画最終時点の状態 s (シナリオ s) の富の目標富に対する不足分。$(s\in S_T)$

(D) 定式化

$$\textbf{Minimize} \quad \sum_{s\in S_T} p^s q^s \tag{10}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_{j0}z_{j0}+v_0=W_0 \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_{j1}^s z_{j1}^s+v_1^s=\sum_{j=1}^{n}\rho_{j1}^s z_{j0}+(1+r_0)v_0 \quad (=W_1^s)\ ,\ (s\in S_1) \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_{jt}^s z_{jt}^s+v_t^s=\sum_{j=1}^{n}\rho_{jt}^s z_{j,t-1}^{s'}+\left(1+r_{t-1}^{s'}\right)v_{t-1}^{s'} \quad (=W_t^s)\,,(t=2,\ldots,T-1;\ s\in S_t) \tag{13}$$

$$W_T^s=\sum_{j=1}^{n}\rho_{jT}^s z_{j,T-1}^{s'}+\left(1+r_{T-1}^{s'}\right)v_{T-1}^{s'}\ ,\ (s\in S_T) \tag{14}$$

$$\sum_{s\in S_T}p^sW_T^s\ge W_E \tag{15}$$

$$W_T^s+q^s\ge W_G\ ,\ (s\in S_T) \tag{16}$$

$$z_{j0}\ge 0\ ,\ (j=1,\ldots,n) \tag{17}$$

$$z_{jt}^s\ge 0\ ,\ (j=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T-1;\ s\in S_t) \tag{18}$$

$$v_0\ge 0 \tag{19}$$

$$v_t^s\ge 0\ ,\ (t=1,\ldots,T-1;\ s\in S_t) \tag{20}$$

$$q^s\ge 0\ ,\ (s\in S_T) \tag{21}$$

(12), (13) 式の値 W_t^s は t 時点の状態 s の富 $(t=1,\ldots,T;\ s\in S_t)$ を表す。

3.2 シミュレーション型多期間確率計画モデル

3.2.1 投資の意思決定とモデル化

シミュレーション型モデルでは、 図3のようなシミュレーション経路によって、将来の資産価格の不確実な変動を記述する。資産価格変動 (収益率) の振る舞いが確率微分方程式 (確率差分方程式) や時系列モデル式などで記述されるとき、モンテカルロ・シミュレーションによって複数のサ

ンプル・パス(乱数を用いて離散的な価格変動を数値的に記述した一連の経路)を生成するのは比較的容易である。ここでは、このサンプル・パスをシミュレーション経路(Simulated Path)と呼ぶことにする[10]。

このようなタイプのモデルはシナリオ・ツリーに比べて不確実性をより詳細に記述することが可能である。シミュレーションで生成された複数のサンプルパス(シミュレーション経路)を直接的に利用することができるので、どのような確率分布に従っている場合でも(確率分布を複雑に合成した場合でも)、シミュレーションでパスを生成することができれば、問題を解くことができるという極めて柔軟で強力なモデル化の方法である。

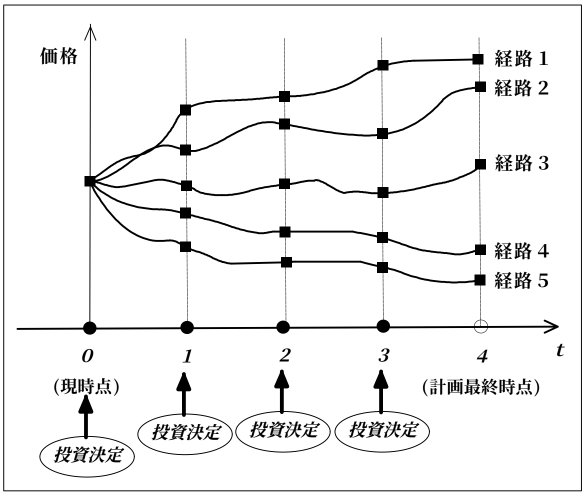

図 3：シミュレーション経路と投資の意思決定

シミュレーション経路は1本の経路にだけ注目すると、t 時点の状態の次に発生する $t+1$ 時点の状態は1つしか想定しない。したがって、各状態毎に投資の意思決定を別々に行うと、それは確定条件下での意思決定を行うことになる。そこで、シミュレーション型モデルの場合には、すべての時点で状態に依存しない(どの状態に到達するかにかかわらない)取引戦略による意思決定を行わなければならない。ただし、現金は運用する各時点で収益が確定するので状態に依存してもよい。ここで、「状態に依存しない取引戦略」とは、一つの投資決定をすべてのシミュレーション経路に適用することを意味する[11]。既知のシミュレーション経路上で、逐次的に各時点において前時点の意思決定の条件のもとで意思決定を行うことになる。

そこで、将来のある時点において、状態にかかわらずにある一つの投資量にリバランスをするという戦略(意思決定戦略)にとって最適な投資量を決定変数として設定する。具体的には、次のような状態に依存しない取引戦略をモデル化する。

- どの状態が生じた場合でも、取引後(リバランス後)の危険資産 j への投資量を同一にする。各経路での富は異なるが、その富と危険資産への投資額の違いはすべて現金で保有する。したがって、シミュレーション経路の各時点(状態)における現金の保有額は同一ではない。

3.2.2 モデルの定式化

(A) 添字

i ：経路(パス)を表す添字。

(B) パラメータ

I ：経路の本数

$\rho_{jt}^{(i)}$ ：t 時点の経路 i の危険資産 j の価格。$(j = 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, T;\ i = 1, \ldots, I)$

[10]通常、サンプル・パスと呼ばれるが、シナリオ・ツリー上の経路(シナリオ・パス)との違いやモンテカルロ・シミュレーションによる経路生成を強調するために、シミュレーション経路と呼ぶ。

[11]投資の意思決定が経路にかかわらずに各時点で1通りしか許されないのは、非予想条件を保つことができないからである。非予想条件(non-anticipativity condition)とは、モデルの定式化において、将来の不確実な状態の中からどの状態が生じるかを確定的に知っていることを利用して意思決定ができる機会を許さない条件のことである。不確実性下の投資決定を行う確率計画モデルには必要な条件である。

$r_{t-1}^{(i)}$: 期間 t の経路 i の金利 ($t-1$ 時点のコール・レート)。($t=2,\ldots,T;\ i=1,\ldots,I$)

(C) 決定変数

z_{jt} : t 時点の危険資産 j への投資量。($j=1,\ldots,n;\ t=0,\ldots,T-1$)

$q^{(i)}$: 計画最終時点の経路 i の富の目標富に対する不足分。($i=1,\ldots,I$)

(D) 定式化

$$\textbf{Minimize} \quad \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} q^{(i)} \tag{22}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j1}^{(i)} z_{j1} + v_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1+r_0)v_0 \quad \left(= W_1^{(i)}\right), \quad (i=1,\ldots,I) \tag{24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{jt}^{(i)} z_{jt} + v_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1} + \left(1+r_{t-1}^{(i)}\right) v_{t-1}^{(i)} \quad \left(= W_t^{(i)}\right), \quad (t=2,\ldots,T-1;\ i=1,\ldots,I) \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\rho}_{jT} z_{j,T-1} + \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\left(1+r_{T-1}^{(i)}\right) v_{T-1}^{(i)} \geq W_E \tag{26}$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1} + \left(1+r_{T-1}^{(i)}\right) v_{T-1}^{(i)}\right\} + q^{(i)} \geq W_G, (i=1,\ldots,I) \tag{27}$$

$$z_{jt} \geq 0, \quad (j=1,\ldots,n;\ t=0,\ldots,T-1) \tag{28}$$

$$v_0 \geq 0 \tag{29}$$

$$v_t^{(i)} \geq 0, \quad (t=1,\ldots,T-1;\ i=1,\ldots,I) \tag{30}$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i=1,\ldots,I) \tag{31}$$

(24), (25) 式の値 $W_t^{(i)}$ は t 時点の経路 i の富 ($t=1,\ldots,T;\ i=1,\ldots,I$) を表す。

3.3　シミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル

3.3.1　投資の意思決定とモデル化

t 時点における意思決定が $t+1$ 時点で複数の状態に影響を与えるような意思決定であれば、不確実性下での意思決定であると考えることができる。そこで、シミュレーション型モデルの枠組みのもとでシナリオ・ツリーの考え方を意思決定のみに適用するモデル化の方法を考える。そのために、危険資産に対して同一の意思決定を行うノードでシミュレーション経路を束ねていき、意思決定のためのツリーを生成する。このツリーをシナリオ・ツリーや通常の決定ツリーと区別するために、拡張決定ツリーと呼ぶことにする。このようなモデル化を行うことによってシミュレーション型モデルの中に意思決定の適切さを加えることができる。

拡張決定ツリーを図4のような3期間問題で、しかも1資産のみの価格変動の例を用いて説明する。シミュレーション経路を20本生成し、1時点で3分岐 (3状態)、2時点でさらに2分岐 (計6状

態) する拡張決定ツリーを生成する。図4の1時点、2時点、3時点ともに不確実な状態の数は20個保たれているが、価格の変動によって1時点では3通りの条件付き意思決定、2時点ではそれぞれ2通り (合計6通り) の条件付き意思決定を行うことができる。

拡張決定ツリーを生成する一つの方法として、逐次的にクラスター分析を行い、グループに分ける方法 (逐次的クラスタリング法と呼ぶ) を示す。期間1の収益率を用いてクラスター分析を行い、グループ分けを行ったら、期間2では各グループ毎に再度クラスター分析を行い、グループに分ける。逐次的クラスタリング法とは、このような手続きを時間とともに逐次的に実行する方法である。

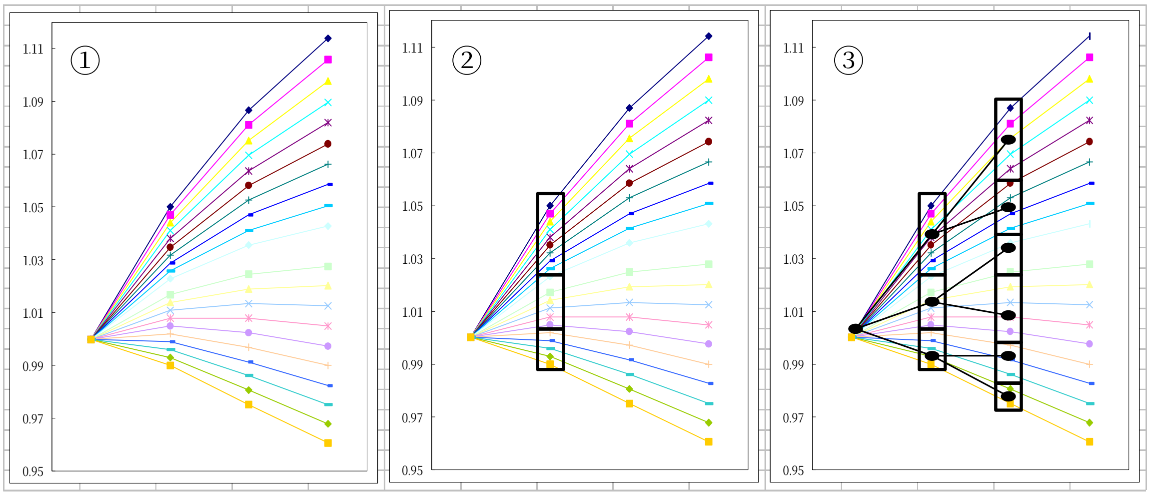

図 4：拡張決定ツリーの図解

3.3.2 モデルの定式化

シナリオ・ツリー型モデルおよびシミュレーション型モデルで用いた記号とほとんど重複するので、記号の説明は省略する。危険資産に対する決定変数はシナリオ・ツリー型モデル、パラメータおよび現金に対する決定変数はシミュレーション型モデルと同じである。また、シナリオ・ツリーの状態が「同一意思決定を行うノード」(決定ノード) に相当する。

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} q^{(i)} \tag{32}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \tag{33}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j1}^{(i)} z_{j1}^{s} + v_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1+r_0)v_0 \quad \left(= W_1^{(i)}\right), \quad (s \in S_1;\ i \in V_1^s) \tag{34}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{jt}^{(i)} z_{jt}^{s} + v_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1}^{s'} + \left(1 + r_{t-1}^{(i)}\right) v_{t-1}^{(i)} \quad \left(= W_t^{(i)}\right),$$
$$(t = 2, \ldots, T-1;\ s \in S_t;\ i \in V_t^s) \tag{35}$$

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1}^{s'} + \left(1 + r_{T-1}^{(i)}\right) v_{T-1}^{(i)}, \quad (s' \in S_{T-1};\ i \in V_{T-1}^{s'}) \tag{36}$$

$$\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} W_T^{(i)} \geq W_E \tag{37}$$

$$W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \ldots, I) \tag{38}$$

$$z_{j0} \geq 0, \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{39}$$

$$z_{jt}^{s} \geq 0, \quad (j = 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, T-1;\ s \in S_t) \tag{40}$$

$$v_0 \geq 0 \tag{41}$$

$$v_t^{(i)} \geq 0, \quad (t = 1, \ldots, T-1;\ i = 1, \ldots, I) \tag{42}$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \ldots, I) \tag{43}$$

ここで、V_t^s は、t 時点の決定ノード s に含まれる経路の集合を表す。

3.4 多期間確率計画モデルの比較

近似の方法が異なる3種類のタイプのモデルを比較してみよう (表2)。

表 2 : モデルの比較

要素	シナリオ・ツリー型	シミュレーション型	混合型
不確実性の記述	シナリオ・ツリー	シミュレーション経路	シミュレーション経路
投資の意思決定	各時点・各状態毎	各時点毎	各時点・各決定ノード毎

将来のある時点 (t時点) の投資の意思決定は、t 時点までにどのような状態が生じたかによって (t 時点の状態を前提にして生じる $t+1$ 時点以降の状態も考慮して)、決められるはずである。シナリオ・ツリー型モデルはこの考え方を忠実にモデル化している。しかし、この考え方をモデル化し、かつ、不確実性の記述を精細にしようとすると問題の規模が莫大になり、実際の問題を解くことができなくなる。一方、シミュレーション型モデルは、不確実性の記述を精細にするのと引き換えに、投資の意思決定は簡便にしている。将来のある時点において、状態にかかわらずにある一つの投資量にリバランスをするという戦略 (意思決定戦略) のもとで、その最適な投資量を求める方法をモデル化していると考えることができる。このことは、将来のある時点 (t時点) の投資の意思決定が、t 時点でどのような状態が生じたかを考慮しないで (時間経過に伴う不確実性の減少を考慮しないで) 決められることを前提にしたモデル化であることを意味する。

シミュレーション/ツリー混合型モデルは2種類のタイプのモデルの長所を組み合わせたモデル、すなわちシナリオ・ツリー型モデルの「投資の意思決定」の適切さとシミュレーション型モデルの「不確実性の記述」の精細さを組み合わせたモデルである。分岐数が1のときにはシミュレーション型モデル、意思決定ノードを通るサンプル・パスの資産価格 (変動) を一つに固定している場合がシナリオ・ツリー型モデルに相当する。したがって、より一般的な多期間確率計画モデルあるが、シミュレーション経路から拡張決定ツリーを生成する方法についての検討が必要となる。

これら3つのモデルは問題の規模を固定すれば、それぞれのモデルにおいても「投資の意思決定」と「不確実性の記述」はトレードオフ関係にあるが、モデル間においてもどちらを重視するかによってモデルの選択が行われることになる。

4　まとめ

本稿では資産配分問題を中心に多期間ポートフォリオ最適化問題に対する数理計画モデルについて説明した。一般的に、(平均・分散モデルなどの)1期間モデルに比べ、多期間の資産価格変動を考慮し、多期間にわたる意思決定を行う最適化モデルの最適解を導出するのは難しい。そこで、近似の考え方の異なる3つのタイプの多期間確率計画モデルの定式化の方法を示し、それぞれの特徴を比較した。

現在、多期間における数理計画モデルといえば、シナリオ・ツリー型モデルが定番である。シミュレーション型モデルとシミュレーション/ツリー混合型モデルに関しては、現在、年金ALMや銀行ALM、債券ポートフォリオ最適化問題への適用を研究しているところである。また、資産配分問題に対してもサンプル数や資産数、資産価格の従う確率分布を様々に変えたときにモデルがどのような振る舞いをして、最適解を導き出すのかなど、検証する必要のある課題は様々あり、これも研究中である。これらを含めて、数値実験による3つのタイプのモデルの比較をすることによって、数理計画法の多期間モデルへの適用について研究を進めていきたいと考えている。

参考文献

[1] 枇々木規雄, 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル, 日本金融・証券計量・工学学会 1999年冬季大会予稿集, pp. 36–55.

[2] 枇々木規雄, 資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル, 日本金融・証券計量・工学学会 2000年夏季大会予稿集, pp. 175–193.

[3] 本多俊毅, 投資機会が変動する場合の最適ポートフォリオについて, 現代ファイナンス, **6** (1999), pp.19–45.

[4] 今野浩, 理財工学 II — 数理計画法による資産運用最適化 —, 日科技連, 1998.

[5] R.C. Merton, Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, *The Review of Econmics and Statistics*, **51** (1969), pp.247–257.

[6] E. Messina and G. Mitra, Modelling and Analysis of Multistage Stochastic Programming Problem: A Software Environment, *European Journal of Operational Research*, **101** (1997), pp.343–359.

[7] J.M. Mulvey and W.T. Ziemba, Asset and Liability Allocation in a Global Environment, Chapter 15 in *"Handbooks in OR & MS, Vol.9", edited by R.Jarrow et al., 1995.*
(翻訳：枇々木規雄：グローバル環境における資産負債配分, 第15章, 今野浩, 古川浩一編著, ファイナンスハンドブック, 1997.)

[8] P.A. Samuelson, Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, *The Review of Econmics and Statistics*, **51** (1969), pp.239–246.

[9] 竹原均, ポートフォリオの最適化, 朝倉書店, 1997.

[10] W.T. Ziemba and J.M. Mulvey (eds.), Worldwide Asset and Liability Modeling, 1998.