Recovery Theorem による資産価格分布の推定と予測力の検証

05000501　慶應義塾大学大学院理工学研究科　*霧生拓也　KIRIU Takuya
01505910　慶應義塾大学理工学部　枇々木規雄　HIBIKI Norio

1.　研究の背景と目的

近年，オプション価格から導出したリスク中立分布から投資家のリスク選好を決定して実確率に分布を調整（リスク調整）する定理が Ross[1] により示された．この定理を Recovery Theorem(RT) という．この定理を用いて推定した実分布は forward looking であることから，市場リスク管理やポートフォリオ最適化など多くの金融の問題への応用が期待される．霧生・枇々木 [2] は RT を用いて実分布を推定する過程で出現する非適切問題 [1] に対して先験情報を用いて解を安定化する方法を提案し，仮想データを用いた数値分析によってその方法の有効性を示した．本研究では S&P500 オプション価格に内包されている実分布を霧生・枇々木 [2] の方法で推定し，その特徴を明らかにする．さらに，将来の資産価格の予測力について検証を行う．

2.　推定方法

2.1.　記号の定義と推定の手順

RT は離散時間有限状態空間モデルの枠組みで導かれた定理である．市場の状態 $\theta_i (i = 1, \ldots, n; n$ は奇数 $)$ をオプションの原資産のリターン r_i によって定義し，現在の状態 $\theta_{i_0} (r_{i_0} = 0\%)$ を中心として均等な間隔で設定する．θ_{i_0} から $\tau (= 1, \ldots, m)$ 期間での θ_j への推移に関する状態価格を $s_{j,\tau}$ とし，それを $n \times m$ 行列の形にまとめたものを S とする．さらに，θ_i から θ_j への推移に関する状態価格を $p_{i,j}$，実確率を $f_{i,j}$ とし，それらを行列形式で表現したものをそれぞれ P, F とする．

RT を用いて実分布を推定する手順は図 1 のような 3 つのステップに分けることができる．

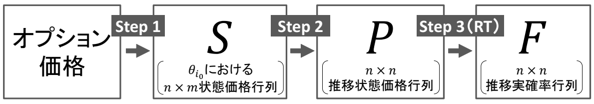

図 1: 実分布の推定手順

2.2.　Step 1: オプション価格から S を推定

$s_{j,\tau}$ は，満期 τ と行使価格 k に対するコールオプション価格関数 $c(\tau, k)$ を k に関して 2 階微分し，r_j に対応する行使価格 k_j を代入することで得ることができる．

$$s_{j,\tau} = \left. \frac{\partial^2 c(\tau, k)}{\partial k^2} \right|_{k=k_j} \quad (j = 1, \ldots, n; \tau = 1, \ldots, m) \quad (1)$$

市場で取引されているオプションの行使価格と満期は離散的であるため，本研究ではコールオプションの価格を薄板平滑化スプラインによって満期と行使価格に関して補間することで $c(\tau, k_j)$ を計算する．

[1] 非適切問題とは，方程式の独立性が低いために解がノイズに過敏に反応する数値不安定性の問題のことを表す．

2.3.　Step 2: S から P を推定

$S^\intercal$ の最終行を除いた行列を A, 1 行目を除いた行列を B とする．状態推移が時間均一なマルコフ過程に従うと仮定すると，$AP = B$ の関係式が成り立つため，無裁定条件を表す制約 ((3) 式) の下で両辺の差が小さくなるように P を推定すればよい．

$$\min_{P} \quad ||AP - B||_2^2 \quad (2)$$

$$\text{subject to} \quad 0 \le p_{i,j} \le 1 \quad (i, j = 1, \ldots, n) \quad (3)$$

この最適化問題は非適切問題となるため，このまま最適化問題を解いても精度良い推定値を得ることは難しい．そこで，霧生・枇々木 [2] の先験情報に基づいて解を安定化させる方法を用いて推定を行う．この方法では (2) 式を (4) 式で置き換えればよい．

$$\min_{P} \quad ||AP - B||_2^2 + \zeta ||P - \bar{P}||_2^2 \quad (4)$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{1,1} + s_{2,1} & \cdots & s_{i_0,1} & s_{i_0+1,1} & s_{i_0+2,1} & \cdots & 0 \\ s_{1,1} & \cdots & s_{i_0-1,1} & s_{i_0,1} & s_{i_0+1,1} & \cdots & s_{n,1} \\ 0 & \cdots & s_{i_0-2,1} & s_{i_0-1,1} & s_{i_0,1} & \cdots & s_{n-1,1} + s_{n,1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (5)$$

$\bar{P}$ は問題を解く際に想定する先験情報を表現する行列である．ζ はデータへのフィッティングと解の安定性のトレードオフをコントロールするパラメータであり，フィッティングを表す部分 $(||AP - B||_2^2)$ と先験情報からのずれを表す部分 $(||P - \bar{P}||_2^2)$ をそれぞれの範囲で基準化して足し合わせた値が最小になるように設定する．

P の i_0 行目（中央行）のベクトルを行和で割って和が 1 になるように基準化したものがリスク中立分布に対応するベクトルである．

2.4.　Step 3: P から F を推定 (RT)

RT によれば，時間加法的効用を持つ代表的投資家が存在するならば，$f_{i,j}$ は P の最大固有値 λ とそれに対応する固有ベクトルの第 i 成分 v_i を用いて

$$f_{i,j} = \frac{1}{\lambda} \frac{v_j}{v_i} p_{i,j} \quad (i, j = 1, \ldots, n) \quad (6)$$

のように表すことができる．この行列の i_0 行目（中央行）が実分布に対応するベクトルである．

3.　数値分析

3.1.　分析の概要

シカゴ・オプション取引所で取引されている 2001 年 1 月 4 日から 2015 年 12 月 1 日までの S&P500 オプションデータから 30 日後 (分析 A,B) または次の推定日まで (分析 C) の資産価格に関する実分布を推定する．推定は各月の最初の取引日とし，状態は -50% から 50% までの範囲を 1% ずつ 101 個の状態に分けて定義する．

分析 A，B ではオプション価格に内包されている分布や投資家のリスク選好に関する特徴を分布の統計量を通して明らかにする．分析 C では RT によるリスク調整と分布の予測力の関係について検証する．

3.2. 推定結果の例

図 2 に 2001 年 1 月 4 日と 2015 年 12 月 1 日のデータを用いて推定した分布を示す．

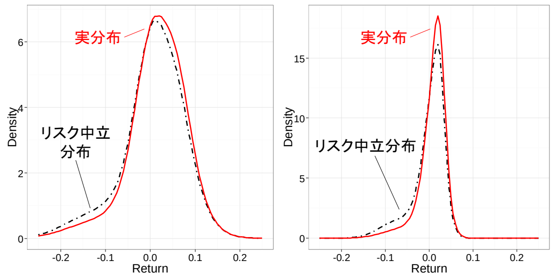

図 2: 推定結果の例 (左: 2001/1/4　右: 2015/12/1)

リスク調整によって分布の下側が薄くなり，中央から上側にかけて厚くなっていることがわかる．

3.3. 分析 A: リスクプレミアムの推移

図 3 に期待リスクプレミアム（（実分布の平均）−（リスク中立分布の平均））の推移を示す．

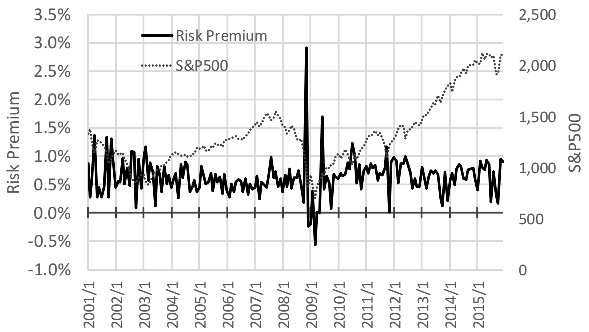

図 3: 期待リスクプレミアムの推移

期待リスクプレミアムはほとんどの時点で正の値をとっており，投資家は分析期間のほとんどでリスク回避的であったといえる．ただし，リーマンショックの時期には期待リスクプレミアムの変動が大きくなっており，負のプレミアムも観察された．これは金融危機時に投資家の間で悲観的な見方が強まったことを反映していることを表していると考えられる．

3.4. 分析 B: モーメントの平均値

表 1 にリスク中立分布と実分布それぞれのモーメントの期間平均と標準偏差を示す．

平均と尖度は正，標準偏差と歪度は負の方向に調整される傾向にあることが分かる．期間標準偏差と比較したモーメントの変化量は特に平均に関して大きいことからリスク調整の影響は平均に強く現れるといえる．

表 1: モーメントの期間平均と期間標準偏差

	期間平均		期間標準偏差	
	リスク中立分布	実分布	リスク中立分布	実分布
平均	-0.032%	0.593%	0.272%	0.278%
標準偏差	5.547%	5.211%	2.549%	2.578%
歪度	-0.974	-1.036	0.323	0.340
尖度	4.576	5.236	1.002	1.212

3.5. 分析 C: 予測力の検証

分布の予測力の検証には KS 検定と Berkowitz 検定の 2 つの方法を用いる．KS 検定では「予測とその実現値の間に偏りがない」ことについて検定を行うのに対して，Berkowitz 検定はこれに加えて「予測とその実現値の間に時系列的な相関関係がない」ことについても同時に検定する方法である．表 2 にそれぞれの検定の p 値を示す．

表 2: 予測力の検定 (p 値)

	リスク中立分布	実分布
KS 検定	0.2728	0.3687
Berkowitz 検定	0.0132	0.0503

KS 検定ではどちらの分布に対しても「予測力がある」という帰無仮説は棄却されなかった．Berkowitz 検定ではリスク中立分布は 5%有意で棄却されたのに対して，実分布はぎりぎりではあるが棄却できなかった．さらに，どちらの検定においても p 値はリスク中立分布の場合に比べて実分布の場合が高かったことから RT によるリスク調整で分布の予測力が高まったといえる．

4. 結論

本研究では RT を用いて 15 年分の S&P500 オプション価格から資産価格分布を推定し，分布の統計量や予測力について分析を行った．分析の結果から以下の 3 点が明らかとなった．

1. オプション価格に内包される投資家の期待プレミアムは多くの時点で正である．
2. リスク中立分布と実分布の差は平均に強く現れる．
3. RT により推定した実分布の将来の資産価格の予測力はリスク中立分布に比べて高い．

今後の課題としては RT を用いて推定した実分布を最適資産配分に応用し，運用パフォーマンスを検証することが考えられる．

参考文献

[1] S. Ross(2015): The Recovery Theorem. *Journal of Finance*, **70**(2), 615–648.

[2] 霧生拓也・枇々木規雄 (2015): Recovery Theorem を用いた Forward Looking な資産価格分布の推定方法. 日本オペレーションズ・リサーチ学会, 2015 年秋季研究発表会アブストラクト集, pp.64–65.