

Recovery Theorem を用いた Forward Looking な収益率分布の推定方法

霧生 拓也* 枇々木 規雄†

概要

近年、状態価格から投資家のリスク選好を決定し、実確率を一意に復元できるという定理 (Recovery Theorem) が Ross [2015] により示された。この定理を用いることでオプション価格に内包される forward looking な実分布を推定できる。しかし、推定の過程で非適切問題を解く必要があり、実分布の推定量を計算することは簡単ではない。本研究ではこの分布の推定方法について議論する。これまでの研究で実分布を推定する方法が提案されているが、こうした方法で投資家が想定している実分布を十分な精度で推定できるのかということに関して十分に検証されていない。しかし、推定の過程で非適切問題が出現することから、特にこの点について検証することは重要であると考えられる。そこで本研究では仮想データを用いた数値分析によって Audrino et al. [2015] の用いた Tikhonov 法の有効性について検証する。また、先見情報を考慮して正則化項を問題に適した形に修正することでより精度良く実分布を推定する方法を提案し、Tikhonov 法と推定精度を比較する。さらに、適切な正則化パラメータの選択方法についても議論する。

数値分析の結果から、

1. 提案法や Tikhonov 法のような正則化項を目的関数に加える解の安定化方法が実分布を精度良く推定する上で有効であること
2. 提案法は Tikhonov 法に比べて精度の高い推定値を得られること
3. 提案法は設定した状態数に比べてオプション価格データの満期数が不足するケースでも適切な推定値を得られること

の3点を明らかにする。

1 研究の背景と目的

ヨーロッパンオプションのペイオフは満期時点における原資産価格によって決まるため、そのオプション価格には満期時点の原資産価格に関する投資家の予測が内包されている。オプション価格から導出した forward looking な収益率分布をインプライド分布という。オプション価格からインプライドリスク中立分布を導出することができ、この分布に関してこれまで多くの研究がなされてきた*¹。しかし、実際の投資家の予測を表現するのは実確率であり、リスク中立確率とは一般的に異なる。

近年、状態価格から投資家のリスク選好を決定し、実確率を一意に復元できるという定理 (Recovery Theorem) が Ross [2015] により示された。この定理を用いることでオプション価格からインプライド実分布を推定することができる。この forward looking な実分布は市場リスク管理や最適資産配分など様々な金融の問題への応用が期待できる。そしてこれまで Recovery Theorem に関して大きく2つの方向性で研究がなされてきた。1つ目は Recovery Theorem を連続時間の場合 (Carr and Yu [2012], Dubynskiy and Goldstein [2013], Walden [2014], Park [2015], Qin and Linetsky [2015]) や債券市場の場合 (Martin and Ross [2013])

* 慶應義塾大学大学院 理工学研究科 開放環境科学専攻, E-mail: kiriutakuya@gmail.com

† 慶應義塾大学 理工学部 管理工学科, E-mail: hibiki@ae.keio.jp

*¹ 例えば, Breeden and Litzenberger [1978], Melick and Thomas [1997], Bliss and Panigirtzoglou [2002], Ludwig [2015] はオプション価格からインプライドリスク中立分布を推定する方法について研究している。Bliss and Panigirtzoglou [2004] や Alonso et al. [2005] はインプライドリスク中立分布の予測力について検証を行っている。Zdorovenin and Pézier [2011] や霧生・枇々木 [2014] は最適資産配分問題にインプライドリスク中立分布を用いた場合の運用パフォーマンスについて分析している。リスク中立分布に関する先行研究はこの他にも多くの研究が存在する。

に拡張する理論的な研究である。2つ目は Recovery Theorem を用いてオプション価格から実分布を推定する方法論に関する研究で Spears [2013], Audrino et al. [2015], Backwell [2015] があげられる。Spears [2013] は Ross [2015] の示した単純な推定方法で得られる実分布の推定値は直感にそぐわないことを指摘し、様々な制約のもとで推定した結果について比較している。Audrino et al. [2015] は Recovery Theorem を用いた推定の過程で非適切問題が出現することを示し、非適切問題に対する一般的な解の安定化方法である Tikhonov 正則化法 (以下, Tikhonov 法) を用いることを提案した。そして, 13 年分の S&P500 オプションのデータから実分布を推定し, そのモーメントを用いた単純な投資戦略の有効性について検証している。長期のデータを用いて実分布を推定しているのは筆者らの知る限りこの研究のみである。Backwell [2015] は, 推定の際に仮定する状態価格の時間同一性が実際の市場では成り立っていないことを指摘し, この仮定によるバイアスを弱める実分布の推定方法を提案している。

本研究は後者に属し, Recovery Theorem を用いてオプション価格から実分布を推定する方法について議論する。これまでの研究で実分布を推定する方法が提案されているが, こうした方法で投資家が想定している実分布を十分な精度で推定できるのかということに関して十分に検証されていない。しかし, 推定の過程で非適切問題が出現することから, 特にこの点について検証することは重要であると考えられる。そこで本研究では仮想データを用いた数値分析によって Audrino et al. [2015] の用いた Tikhonov 法の有効性について検証する。また, 先見情報を考慮して正則化項を問題に適した形に修正することでより精度良く実分布を推定する方法を提案し, Tikhonov 法と推定精度を比較する。さらに, 適切な正則化パラメータの選択方法についても議論する。

数値分析の結果から以下の 3 点について明らかにする。

1. 提案法や Tikhonov 法のような正則化項を目的関数に加える解の安定化方法が実分布を精度良く推定する上で有効であること
2. 提案法は Tikhonov 法に比べて精度の高い推定値を得られること
3. 提案法は設定した状態数に比べてオプション価格データの満期数が不足するケースでも適切な推定値を得られること

本稿の構成は以下の通りである。まず, 2 節では Ross [2015] の Recovery Theorem について簡潔にまとめる。3 節では Recovery Theorem を用いてオプション価格から実分布を推定する手順を示し, 新たな推定方法を提案する。4 節では仮想データを用いた推定精度に関する分析の方法と結果を示し, 考察を行う。最後に 5 節で結論と今後の課題について述べる。

2 Recovery Theorem (Ross [2015])

本節では Ross [2015] の導いた Recovery Theorem について要約する。Recovery Theorem は離散時間有限状態空間 1 期間モデルの枠組みで導かれた定理である。まず, 市場は完備で裁定機会は存在しないものとし, 市場の状態 θ_i ($i = 1, \dots, n$) をオプションの原資産のリターン r_i によって定義する。現在の状態 θ_i から次の状態 θ_j への推移に関する状態価格^{*2}を $p_{i,j}$, リスク中立確率を $q_{i,j}$, 実確率を $f_{i,j}$ とし, それぞれを $n \times n$ の行列形式で表現したものを P, Q, F とする^{*3}。 P は既約行列^{*4}であると仮定する。このとき, Q と F も同様に既約行列となる。 P はオプション価格から推定することができるため, ここでは既知であるとする^{*5}。 リスク中立確率 Q と状態価格 P の間には次のような関係が成り立つことから, Q は P から簡単に導くことが

^{*2} 状態価格 $p_{i,j}$ は次の状態が θ_j になった場合にのみ 1 円受け取ることでできる証券の状態 θ_i における価格を表す。

^{*3} 本論文では文脈に応じてリスク中立確率行列 Q をリスク中立確率やリスク中立分布, 実確率行列 F を実確率や実分布と記述する。

^{*4} 全ての i, j について $(M^k)_{i,j} > 0$ となるような $k \in \mathbb{N}$ が存在するとき行列 M は既約であるという。この仮定は非常に弱いものであり通常満たされていると考えられる。

^{*5} 具体的な推定の方法については 3 節で述べる。

できる。

$$q_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{\sum_{k=1}^n p_{i,k}} \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (1)$$

一方で実確率 F は状態価格と投資家のリスク選好の両方の関数になるため、 Q のように P のみから導くことは難しいと考えられてきた。しかし、Ross [2015] は時間加法的異時点間期待効用理論に従う代表的投資家の存在を仮定すれば P から代表的投資家のリスク選好を一意に決定して、 F を導くことができることを示した。時間加法的異時点間期待効用理論に従う代表的投資家（以下では、この投資家を単に代表的投資家と記述する）の効用関数は以下のような形で表すことができる。

$$U(c_i) + \delta \sum_{j=1}^n f_{i,j} U(c_j) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

c_i は状態 θ_i における消費を表し、 $U(c_i)$ はその消費に対する効用で $\delta (> 0)$ は効用に関する割引係数である。 $U(c)$ は非飽和性を満たす ($U'(c) > 0$) と仮定する。このとき $f_{i,j}$ と $p_{i,j}$ の間には次のような関係式が成り立つ。

$$f_{i,j} = \frac{1}{\delta} \frac{U'(c_i)}{U'(c_j)} p_{i,j} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (3)$$

$p_{i,j}$ の $f_{i,j}$ に対する比率 $\phi_{i,j}$ はプライシングカーネルと呼ばれ、次のように表すことができる。

$$\phi_{i,j} := \frac{p_{i,j}}{f_{i,j}} = \delta \frac{U'(c_j)}{U'(c_i)} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (4)$$

上の式から明らかなように代表的投資家の効用を反映してプライシングカーネルの形状が決まる。

P は非負の既約行列であることから、ペロン＝フロベニウスの定理によって P の最大固有値 λ に対応する固有ベクトル \mathbf{v} のすべての成分は正であり、そのような固有ベクトルはこの一つに限られることが保証される。Recovery Theorem によれば v_i を \mathbf{v} の第 i 成分とすると、

$$\delta = \lambda \quad (5)$$

$$U'(c_i) = v_i^{-1} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6)$$

の関係が成り立つ。

上で述べた結果より、Recovery Theorem を用いて次のような手順で P から F を計算することができる。まず、 P に関する固有値問題を解いてその最大固有値を λ 、それに対応する固有ベクトルを \mathbf{v} とする。このとき、 F の各成分は

$$f_{i,j} = \frac{1}{\lambda} \frac{v_j}{v_i} p_{i,j} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (7)$$

のように計算できる。さらに Ross [2015] は Recovery Theorem の特殊なケースとして P の全ての行和が等しい場合、実確率とリスク中立確率は一致し、 $F = Q$ となることもあわせて示した。

3 実分布の推定

2 節では P が既知であるとして議論を進めてきたが、実際にはオプション価格から P を推定する必要がある。Spears [2013] にならい、オプション価格から実分布を推定する手順を図 1 のような 3 つの Step に分けて説明する。このうち Step 3 では 2 節で説明した Recovery Theorem を Step 2 で得られた P に対して単純に適用すれば良いため、本節では Step 1 と Step 2 に関して説明する。特に、Step 2 で P を推定する際に起こる問題を指摘し、新たな推定方法を提案する。

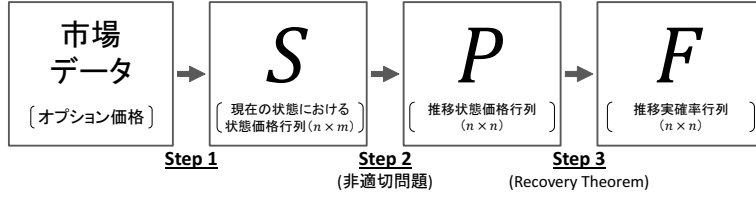


図1 実分布の推定手順

3.1 Step 1: オプション価格から行列 S を推定

$s_{j,\tau}$ ($\tau = 1, \dots, m$) を現在の状態 i_0 から状態 θ_j への τ 期の推移に関する状態価格とし、これを $n \times m$ 行列の形にまとめたものを S と定義する。つまり S は現在の状態における m 個の満期に対する状態価格を表す行列である。簡単のため、状態は現在の状態 θ_{i_0} を中心とする奇数個 ($i_0 = (n+1)/2$, n は奇数) であると想定して議論を進める。

Step 1 ではオプション価格から行列 S を推定する。典型的な方法としては Breeden and Litzenberger [1978] のオプション価格を行使価格で 2 回微分することによって推定する方法が挙げられる。より精緻に状態価格を推定する方法としては Bliss and Panigirtzoglou [2002](自然スプラインによる方法), Melick and Thomas [1997](混合対数正規分布を仮定する方法), Ludwig [2015](ニューラルネットワークによる方法) など多くの方法が議論されており、 S の推定はそれほど難しい問題ではないと考えられる。そこで以降では Step 2 と Step 3 のみに注目して議論を進めていくことにする。

3.2 Step 2: 行列 S から行列 P を推定

Step 2 では状態の推移が時間同一なマルコフ連鎖に従うという仮定^{*6}の下で $n \times m$ 行列 S から $n \times n$ 行列 P を推定する。4.5 節の分析を除いては $n \leq m$ の関係が満たされていると想定して議論を進める。 S の 1 番目の列ベクトルを \mathbf{s}_1 、 P の i_0 番目の行ベクトルを \mathbf{p}_{i_0} と表す。このときそれぞれのベクトルの j 番目の成分は定義よりどちらも $p_{i_0,j}$ を表すため、

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{p}_{i_0} \quad (8)$$

の関係式が成り立つ。また、 P は 1 期間の状態推移を表現する行列であることから、状態の推移が時間同一なマルコフ連鎖に従うという仮定の下では $\mathbf{s}_\tau, \mathbf{s}_{\tau+1}, P$ の間に

$$\mathbf{s}_{\tau+1}^\top = \mathbf{s}_\tau^\top P \quad (\tau = 1, \dots, m-1) \quad (9)$$

の関係式が成り立つ。 S の最終列を除いて転置した $(m-1) \times n$ 行列を A 、 S の 1 列目を除いて転置した $(m-1) \times n$ 行列を B とすれば、式 (9) を次のように書き直すことができる。

$$AP = B \quad (10)$$

この両辺の差を最小にするような P を状態価格に関する無裁定条件 $p_{i,j} \geq 0$ ($i, j = 1, \dots, n$) と式 (8) の制約の下で推定すれば良い。具体的な定式化は以下の通りである。

$$\min_P \|AP - B\|_2^2 \quad (11)$$

$$\text{subject to } \mathbf{s}_1 = \mathbf{p}_{i_0} \quad (12)$$

$$p_{i,j} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (13)$$

^{*6} この仮定に関する議論は Backwell [2015] を参照せよ。本研究ではこの仮定の整合性については議論の対象としない。

ここで、 $\|\cdot\|_2$ はユークリッドノルムを表す。

Audrino et al. [2015] は 2000 年から 2012 年の S&P500 オプションデータから推定した 11×11 行列 A の平均条件数が 2.17×10^8 と非常に大きいことから、実際のデータを用いて推定する場合、この問題が非適切問題 (ill-posed problem) になることを指摘している。非適切問題とはデータの独立性が低いために問題が退化してしまい、目的関数値がほとんど変わらないような複数の解の候補を持つ問題のことである。そのため、非適切問題の解は小さなノイズに対して非常に敏感であるという悪い性質を持つ。Audrino et al. [2015] は非適切問題に対する解の安定化手法として一般的な方法である、Tikhonov 法を用いて解を安定化させることを提案している。Tikhonov 法は目的関数に対して正則化項と呼ばれる解を安定化させるための項を追加して問題を解く方法である。具体的には、式 (11) を次のように置き換えて問題を解く。

$$\min_P \|AP - B\|_2^2 + \zeta \|P\|_2^2 \quad (14)$$

第 2 項が正則化項である。 ζ は正則化パラメータと呼ばれ、データへのフィッティングと解の安定性のトレードオフ関係をコントロールするパラメータである。式 (14) は大きさ n の単位行列 I とゼロ行列 O を用いて次のように書き直すことができる。

$$\min_P \left\| \begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\zeta}I \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (15)$$

式の形から明らかなように Tikhonov 法では P の各成分の値は小さいほうが好ましいという先見情報^{*7}を用いて解を安定化している。しかしながら、今回の推移状態価格行列 P を推定する問題においては、状態間の推移確率が高い場合には $p_{i,j}$ の値も大きくなるのが自然であり、この先見情報は適切でないと思われる。さらに、 ζ を無限大に設定した場合には $P = O$ となり P は既約行列にはならないために、Recovery Theorem を適用することができない。このため、 ζ と最終的な推定量である F の間の関係について明確な解釈を与えることが難しい。

そこで本研究では、 P に関するより好ましい先見情報について検討した上で正則化項を設定した、新たな推定方法を提案する。そして、この方法は ζ と F の関係について明確な解釈ができることを示す。まず、 P に関する先見情報として次の 2 つが考えられる。

- Info 1. s_1 と p_{i_0} は等しくなる (式 (8))。これは上で述べたようにそれぞれのベクトルの定義から導くことのできる理論的な条件式である。
- Info 2. $p_{i,j}$ と $p_{i+k,j+k}$ ($i, j = 1, \dots, n; k \in \mathbb{Z}, 1 \leq i+k \leq n, 1 \leq j+k \leq n$) は互いに近い値をとる。これは同じ距離の状態の推移に対する状態価格は互いに近い値をとることが期待されることを表す経験的な P に関する情報である。

この 2 つの先見情報をもとに次の式のように正則化項を設定し、問題を解く方法を提案する。

$$\min_P \|AP - B\|_2^2 + \zeta \|P - \bar{P}\|_2^2 \quad (16)$$

$$\Leftrightarrow \min_P \left\| \begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\zeta}I \end{bmatrix} P - \begin{bmatrix} B \\ \sqrt{\zeta}\bar{P} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (17)$$

*7 問題を解く前に想定する解に関する補助的な情報のことをいう。

ここで,

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{p}_{1,1} & \bar{p}_{1,2} & \cdots & \bar{p}_{1,i_0-1} & \bar{p}_{1,i_0} & \bar{p}_{1,i_0+1} & \cdots & \bar{p}_{1,n-1} & \bar{p}_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \bar{p}_{i_0-1,1} & \bar{p}_{i_0-1,2} & \cdots & \bar{p}_{i_0-1,i_0-1} & \bar{p}_{i_0-1,i_0} & \bar{p}_{i_0-1,i_0+1} & \cdots & \bar{p}_{i_0-1,n-1} & \bar{p}_{i_0-1,n} \\ \bar{p}_{i_0,1} & \bar{p}_{i_0,2} & \cdots & \bar{p}_{i_0,i_0-1} & \bar{p}_{i_0,i_0} & \bar{p}_{i_0,i_0+1} & \cdots & \bar{p}_{i_0,n-1} & \bar{p}_{i_0,n} \\ \bar{p}_{i_0+1,1} & \bar{p}_{i_0+1,2} & \cdots & \bar{p}_{i_0+1,i_0-1} & \bar{p}_{i_0+1,i_0} & \bar{p}_{i_0+1,i_0+1} & \cdots & \bar{p}_{i_0+1,n-1} & \bar{p}_{i_0+1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \bar{p}_{n,1} & \bar{p}_{n,2} & \cdots & \bar{p}_{n,i_0-1} & \bar{p}_{n,i_0} & \bar{p}_{n,i_0+1} & \cdots & \bar{p}_{n,n-1} & \bar{p}_{n,n} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{i_0} s_{k,1} & s_{i_0+1,1} & \cdots & s_{n-1,1} & s_{n,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^2 s_{k,1} & s_{3,1} & \cdots & s_{i_0,1} & s_{i_0+1,1} & s_{i_0+2,1} & \cdots & s_{n,1} & 0 \\ s_{1,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{i_0-1,1} & s_{i_0,1} & s_{i_0+1,1} & \cdots & s_{n-1,1} & \sum_{k=n-1}^n s_{k,1} \\ 0 & s_{1,1} & \cdots & s_{i_0-2,1} & s_{i_0-1,1} & s_{i_0,1} & \cdots & s_{n-2,1} & \sum_{k=n-1}^n s_{k,1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s_{1,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{i_0-1,1} & \sum_{k=i_0}^n s_{k,1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

である。\$\bar{P}\$ は上の 2 つの先見情報を反映した行列であり、両端の列は値をまとめ、その他の要素については値をゼロとしている。提案法*8は解の候補集合の中からこの \$\bar{P}\$ に近いような解を選択することで解を安定化する。式 (15) と式 (17) において \$P\$ の前の係数行列は同じ形をしていることから 2 つの方法で \$\zeta\$ を等しく設定すると問題の条件数は一致し、ノイズに対する解の感度も等しくなる。

そして提案法は正則化項が実分布 \$F\$ の推定値に与える影響も明確である。前の 2 つの先見情報の下では結果的に \$\bar{P}\$ の行和はすべて等しく (\$\sum_{k=1}^n s_{k,1}\$) なるため、\$\zeta \rightarrow \infty\$ とした場合には実分布の推定値はリスク中立分布に一致する (2 節参照)。つまり、\$\zeta\$ を大きくするにつれて \$F\$ は \$Q\$ に近づいていくことが期待され、提案法は実分布 \$F\$ の推定値をリスク中立分布 \$Q\$ に近づけるように解を安定化させる手法であるといえる。見方を変えれば、提案法は特殊な場合として Recovery Theorem の枠組みでリスク中立分布も求めることができる、より一般化された手法であると解釈することもできる。

4 推定精度に関する数値分析

本節では推定精度に関する数値分析を通して、提案法の有効性について検証する。しかし、真の実分布がわからないために実際のオプションデータを用いて推定精度について評価することは難しい。そこで、実分布を仮想データとして与えることで推定精度について分析を行う。

図 2 に分析の概要を示す。まず、仮想的な推移実確率行列 \$F^H\$ とプライシングカーネル行列 \$\Phi^H\$ を与える*9。そして、この 2 つの行列から推移状態価格行列 \$P^H\$、現在の状態における状態価格行列 \$S^H\$ を順に逆算する。次に、オプションデータに含まれるノイズや Step 1 の推定誤差のために、現実的にはオプション価格から \$S^H\$ を正確に得ることは難しいことを考慮して \$S^H\$ に対してノイズを加えた行列 \$S^N\$ を発生させる。ノイズ \$e_{i,j}\$ は i.i.d. で平均 0、分散 \$\sigma^2\$ の正規分布にしたがうと想定し、

$$s_{i,j}^N = s_{i,j}^H(1 + e_{i,j}) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (20)$$

のように \$S^N\$ を生成する。このようにすることで Step 1 の推定方法の影響とは独立に推定精度について分析することができる。そして Tikhonov 法または提案法を用いて \$S^N\$ から \$P^N\$ を推定し (Step 2)、\$P^N\$ に対して Recovery Theorem を適用することでノイズが加えられたデータの下で推定した実確率行列 \$F^N\$ を得る (Step

*8 式 (16) のような定式化は一般化 Tikhonov 正則化法と呼ばれる。提案法は一般化 Tikhonov 正則化法において \$\bar{P}\$ を式 (19) のように設定した場合であり、通常の Tikhonov 法は \$\bar{P} = O\$ と設定した場合に相当する。

*9 具体的な行列の与え方は 4.2 節で説明する。

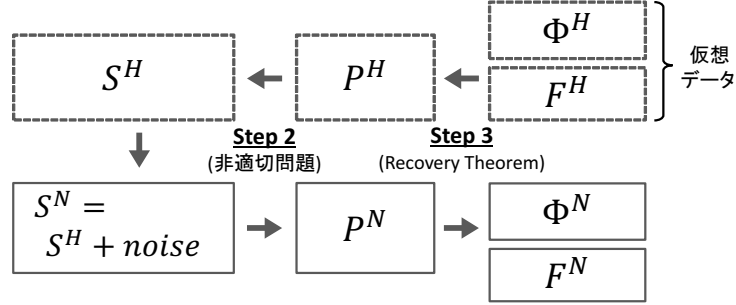


図2 分析の概要

3). こうして得られた推定値 F^N が元の値 F^H に近ければ、その推定法の推定精度は高いと評価することができる。具体的な推定精度の評価指標については4.1節で述べる。

4.1 分析の設定条件

ここでは仮想データの設定方法を除く分析の設定条件（市場の状態の定義，満期数の設定，推定精度の評価に用いる指標）について説明する。

市場の状態は0時点からのリターンによって定義し，0%を中心として2%毎に対称に全部で31の状態を設定する。つまり， $r_1 = -30\%$ ， $r_{16} = 0\%$ ， $r_{31} = -30\%$ となる。

今回の分析では仮想データを用いるため m を自由に設定することができる。実際のデータから S を推定する場合にはオプションの満期数が S の列数に対応することから m は市場で取引されているオプションの満期数よりも小さくせざるをえないため，通常は $m < n$ の関係が成り立つことが想定される。しかし，設定をシンプルにするため，基本分析ではこの問題は考慮せず m を状態数に等しくなる ($m = n$) ように設定して分析を行う^{*10}。そして4.5節で状態数に比べて満期数が少なくなる ($m < n$) ケースについて分析する^{*11}。

次に推定精度の評価指標について説明する。 F の中央 (i_0 番目) の行ベクトルを \mathbf{f}_{i_0} と表す。これは現在の状態における実分布を表現するベクトルである。そして推定精度を現在の状態において推定された分布 $\mathbf{f}_{i_0}^N$ の最初に与えた分布 $\mathbf{f}_{i_0}^H$ からの Kullback-Leibler (KL) 情報量 $D_{KL}(\mathbf{f}_{i_0}^N | \mathbf{f}_{i_0}^H)$ を用いて評価する。KL 情報量は2つの分布間の差異を表す指標であり，次のように定義される。

$$D_{KL}(\mathbf{f}_{i_0}^N | \mathbf{f}_{i_0}^H) := \sum_{j=1}^n f_{i_0,j}^N \ln \left(\frac{f_{i_0,j}^N}{f_{i_0,j}^H} \right) \quad (21)$$

2つの分布が完全に一致する場合には $D_{KL}(\mathbf{f}_{i_0}^N | \mathbf{f}_{i_0}^H) = 0$ となる。分母が0になったり真数が0になったりする問題を避けるため， $\mathbf{f}_{i_0}^N$ と $\mathbf{f}_{i_0}^H$ の各成分に非常に小さな値 (10^{-20}) を加えて KL 情報量を算出したが，この操作が分析結果に与える影響はほとんどなかった^{*12}。

4.2 仮想データの設定

実際のデータを用いて推定する場合のように非適切問題が出現する状況を再現するため，分析に用いる仮想データ Φ^H, F^H はできる限り尤もらしく設定する必要がある。ここではこの仮想データの設定方法について説明する。

^{*10} Audrino et al. [2015] は満期に関してオプションデータを補間することで $m < n$ となることを避けて S を推定している。このため ($m = n$) として分析することは必ずしも非現実的なものではない。

^{*11} $m > n$ のケースについては $m = n$ とほとんど同じであったため，結果は省略する。

^{*12} 評価の指標をユークリッド距離に変更した場合や，行列 F 全体に対して KL 情報量を計算した場合も試したが，得られる結論は $D_{KL}(\mathbf{f}_{i_0}^N | \mathbf{f}_{i_0}^H)$ で評価した場合と同じであったため，以降では $D_{KL}(\mathbf{f}_{i_0}^N | \mathbf{f}_{i_0}^H)$ を用いて推定精度を評価した結果のみを示す。

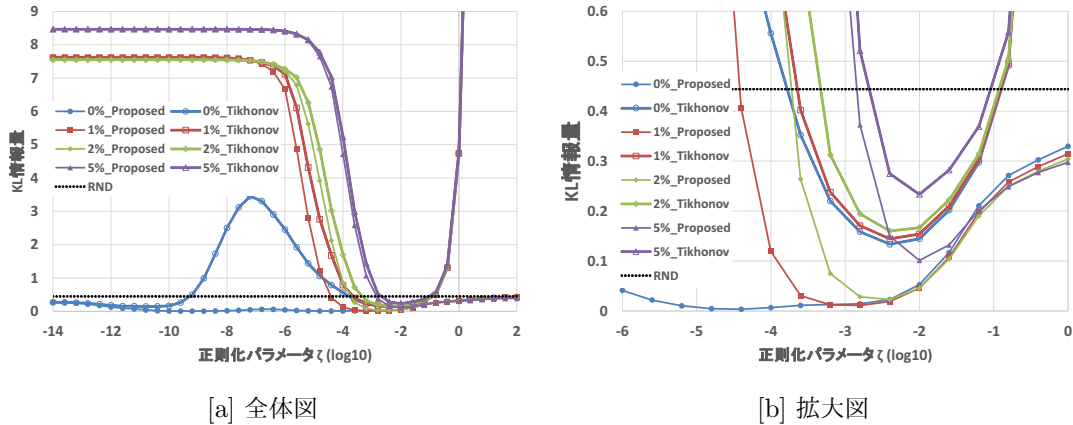


図3 基本ケース: 正則化パラメータと KL 情報量の関係

プライシングカーネル行列 Φ^H は CRRA 型効用関数 $U(c) = c^{1-\gamma_R}/(1-\gamma_R)$ を持つ代表的投資家を想定して作成する。基本ケースでは $\gamma_R = 3, \delta = 0.999$ として分析を行う。

実確率推移行列 F^H は S&P500 のヒストリカルデータ (日次・終値) をもとに設定する。まず、ある基準日を設定しその基準日からの 30 日ごとのリターンを 12 個計算する。リターンを計算する日に休日が含まれる場合はその前日の終値を用いてリターンを計算する。次に、リターンをそれぞれの状態に割り当てて、状態推移の回数をカウントした行列を作成する。状態の割り当てについては状態 θ_j に対して、 $r_j - 1\%$ から $r_j + 1\%$ までの範囲のリターンを割り当てる。ただし、 -29% 以下 (29% 以上) のリターンについてはすべて $\theta_1(\theta_{31})$ に割り当てる。そして、基準日を日次で 1950 年 1 月 3 日から 2014 年の 1 月 3 日までロールして同じように状態推移回数をカウントした行列を作成する。最後に、全ての行列を足し合わせて作成した期間中の全ての状態推移の回数をカウントした行列に対して、各成分をそれぞれの行和で割って基準化して確率行列の形に直す。この行列を F^H として与える。

このようにして Φ^H, F^H を設定した下で逆算した A^H の条件数は 3.3×10^{16} と非常に大きく、Step 2 の最適化問題は非適切問題となっており、実際のデータを用いた場合に起きる状況を仮想データを用いて再現できていることが確認できた。また、以降の分析ではある特定の乱数シードを用いてノイズを加えた場合の分析結果を示すが、異なる乱数シードを用いた場合にも同様の結論が得られることを確認している。

4.3 基本ケース

正則化パラメータを $\zeta = 10^{-14}, 10^{-13.6}, \dots, 10^{1.6}, 10^2$ とし、ノイズの大きさを $\sigma = 0\%, 1\%, 2\%, 5\%$ と変更した場合の提案法と Tikhonov 法のそれぞれの方法で推定した KL 情報量を図 3 に示した。図中の「RND(Risk Neutral Distribution)」はリスク中立確率の枠組みで誤差なく推定した場合に得られる分布 $\mathbf{q}_{i_0}^H$ の KL 情報量 $D_{KL}(\mathbf{q}_{i_0}^H | \mathbf{f}_{i_0}^H)$ を表している。この値よりも KL 情報量が小さくなるのが Recovery Theorem を用いて実分布を精度良く推定できているかを判断する 1 つの基準になると考えられる。

まず初めに S^N がノイズなく得られると想定した $\sigma = 0\%$ のケースについて議論する。理論的には正則化法を用いずに推定した場合の分布は最初に与えた分布と一致するため、 $\zeta = 0$ とした場合の KL 情報量は 0 となるはずである。しかし、実際に推定された分布の KL 情報量は計算誤差の影響により 0 とはならず 0.273 であった。この結果は非適切問題において正確な推定値を得ることの困難さを示している。提案法を用いた場合には $\zeta = 10^{-9.2}$ の場合に最小の KL 情報量 2.65×10^{-3} をとり、 $\zeta = 0$ の場合と比較して精度を大幅に改善できることが分かる。また、 ζ を大きくすると提案法のグラフは「RND」に近づいていく。このことから、提案法は ζ を大きくするにつれて実分布の推定値がリスク中立分布に近づいていくことが確認できる。Tikhonov 法を用いた場合にも $\zeta = 10^{-2.4}$ の場合に最小の KL 情報量 0.134 をとり推定精度が改善している。しかし、

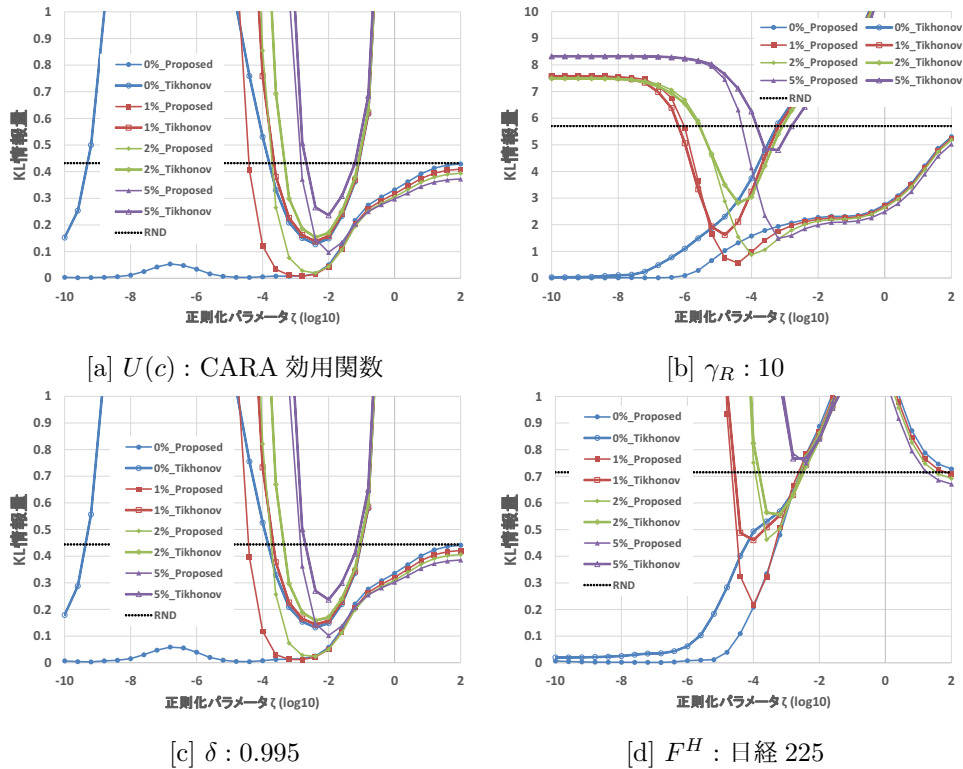


図4 ロバスト性の検証: KL 情報量

どのように ζ を設定した場合でも Tikhonov 法の KL 情報量は提案法の場合と比較して大きく、推定精度が劣っていた。

次に S^N にノイズが加わっているケース ($\sigma = 1\%, 2\%, 5\%$) について分析する。ノイズの大きさによらず、正則化法を用いない場合 ($\zeta = 0$) の推定精度はノイズがないケース ($\sigma = 0\%$) に比べて大幅に悪化している。これは推定の過程で非適切問題を解くため、ノイズに対して解が敏感に変化してしまうためである。Tikhonov 法と提案法のどちらを用いた場合も ζ をある程度大きくすることで推定誤差を急速に減少させることができている。この結果は解の感度を抑えるために正則化項を目的関数に加えて問題を解くことの有効性を示している。また、ノイズがない場合と同様に、提案法は ζ の設定によらず Tikhonov 法に比べて精度の良い推定値が得られていた。これは提案法の正則化項が Tikhonov 法に比べて、より適切に正則化項を設定できていたことを示している。

4.4 ロバスト性の検証

本節では仮想データを変更して分析を行うことによって基本ケースで得られた結果のロバスト性について検討する。図 4a は基本ケースから効用関数を CARA 型に変更して絶対的リスク回避度 $\gamma_A = 3$ とし、 δ を基本ケースと同じ 0.999 と設定して仮想的なプライシングカーネル行列を作成した場合の正則化パラメータと KL 情報量の関係を表している。また、図 4b は基本ケースから $\gamma_R = 10$ に、図 4c は $\delta = 0.995$ に仮想データを作成するためのパラメータをそれぞれ変更して、図 4d は S&P500 のヒストリカルデータの代わりに日経 225 の同期間のヒストリカルデータを用いて仮想データを設定した場合の結果を表している。具体的な数値は省略するがいずれの場合も Step 2 の問題の条件数は非常に大きく、非適切問題が出現する状況を再現できていた。これらの結果から効用関数の種類や δ は KL 情報量のグラフの形状に対してあまり影響しないが、 γ_R や実確率行列の設定の仕方はグラフの形状に影響することがわかる。しかし、その場合でも基本ケースの場合に見

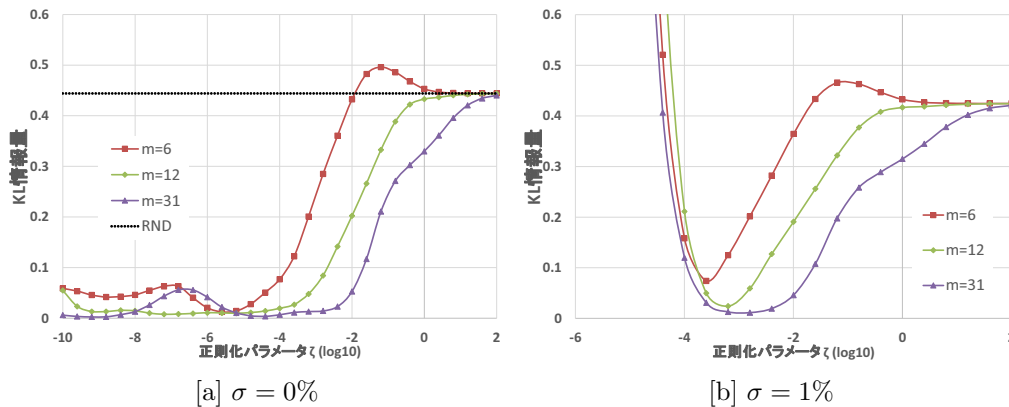


図5 $m < n$ となる場合: 提案法の KL 情報量

られた, (1) 提案法や Tikhonov 法のような正則化法を用いることで単純に推定を行うよりも精度の高い推定値を得ることができる, (2) 提案法の推定精度は Tikhonov 法の推定精度を上回っている, という2つの結果は変わらなかった. 今回の分析で結果のロバスト性について十分に示せたとはいえないが, 2つの結果に仮想データの設定が与える影響は大きくなかったことから, ある程度現実的であると考えられ, 非適切問題が出現する状況を再現できるような仮想データを与えれば, 同様の結果が得られることが期待される. より詳細にロバスト性の検証を行うことは今後の課題である.

4.5 データの満期数が設定した状態数に比べて少ない ($m < n$) 場合

これまでの分析では行列 S^H の列数を状態数と同じ 31 になるように設定して分析をおこなってきた. 実際のデータから推定する場合, 行列 S の列数はオプションの満期数に対応する. しかし, 市場で取引されているオプションの満期数は一般的に 31 よりも少ない. 例えばシカゴ・オプション取引所 (CBOE) の S&P500 オプションでは, 1 ヶ月ごとに連続して設定されている満期数は 12 であり, 大阪取引所の日経 225 オプションの満期数は 9 である. さらに, 満期の長いオプションの流動性は低い傾向にあり, 状態価格の推定が困難になる場合があることを考慮すると実際のデータから S を推定した場合の列数はさらに少なくなる可能性がある. そこで, 本節では満期数 (データ数) が状態数 (推定パラメータ数) よりも少ない場合について分析する*13. より具体的には状態数は $n = 31$ に固定したまま, S^H の列数を $m = 6, 12, 31$ と変えて提案法で実分布を推定した場合の推定精度を評価する.

図 5a は $\sigma = 0\%$ の場合の結果である. m を 6 や 12 に減らした場合においても適切に ζ を選択すれば $m = 31$ とそれほど変わらない精度で推定ができていることがわかる. 図 5b の $\sigma = 1\%$ の場合でも同様の結果が得られた*14. 通常はデータ数が推定パラメータ数よりも少ない場合には精度良い推定値を得ることは困難であるが, 提案法を用いることで精度良い推定値が得られた. これは推定に不足する情報を正則化項に内包されている先見情報でうまく補うことができているためであると考えられる. 見方を変えれば, 実分布を推定するのに必要な情報は 6 つの満期の状態価格行列に十分に含まれていたということである.

4.6 正則化パラメータの選択方法

ここまで様々な正則化パラメータの下で実分布を推定し, KL 情報量を用いてその精度について評価を行ってきたが, 正則化パラメータの選択方法も精度良い推定値を得る上で非常に重要な問題である.

*13 通常, 推定を行う場合には, 解を一意に定めるため推定パラメータ数 n をデータ数 m よりも小さくする. ここでは通常の推定では解が一意に定まらない場合において正則化項を加えて解を得ることの有効性について検証している.

*14 結果は省略するが $\sigma = 2\%$ や 5% の場合も同様であった.

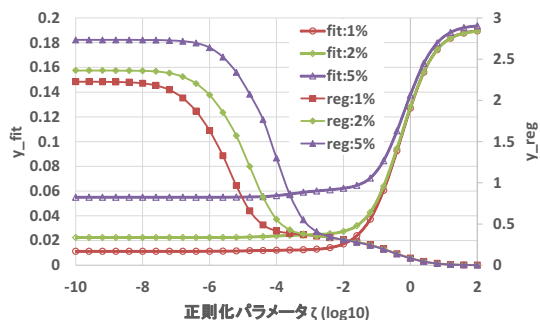


図6 提案法の目的関数値の分解 (基本ケース)

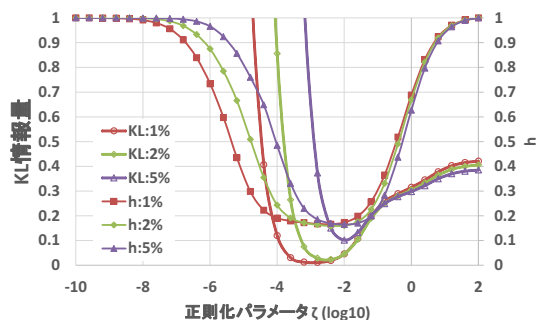


図7 提案法の関数値 $h(\zeta)$ と KL 情報量 (基本ケース)

Step 2 の最適化問題の提案法における目的関数は式 (16) であり、2 つの項からなっている。第 1 項 ($\|AP - B\|_2^2$) はフィッティング残差を表す項であり、これを y_{fit} と表す。第 2 項は正則化項で、ここから ζ を除いた部分 ($\|P - \bar{P}\|_2^2$) は P^N と \bar{P} の間のずれを表しており、これを y_{reg} とする。基本ケースにおける様々な ζ に対する y_{fit} と y_{reg} を図 6 に示す。 ζ を大きくするにつれて y_{fit} は単調増加し、 y_{reg} は反対に単調減少する。そして、 y_{fit} と y_{reg} は共に急激に変化する部分を持っていることがわかる。例えば、 $\sigma = 1\%$ の場合は $\zeta = 1$ の付近で y_{fit} は大きく増加し、 $\zeta = 10^{-6}$ の付近で y_{reg} は大きく減少する。これは非適切問題に正則化項を追加した場合にみられる特徴のひとつである。非適切問題の目的関数に正則化項を追加して問題を解く目的は同程度のフィッティング残差を持つ退化した解の候補集合の中から先見情報に基づいてより良い解を選択することであった。つまり、ここでは y_{fit} と y_{reg} の値が共に小さいような ζ を選択することが尤もらしい正則化パラメータの選択方法である。ここでは、 y_{fit} と y_{reg} はとる値の水準が大きく異なることを考慮して、次に定義される関数 $h(\zeta)$ を最小にする ζ を選択する方法を提案する。

$$h(\zeta) := \frac{y_{fit}(\zeta) - y_{fit}(0)}{y_{fit}(\infty) - y_{fit}(0)} + \frac{y_{reg}(\zeta) - y_{reg}(\infty)}{y_{reg}(0) - y_{reg}(\infty)} \quad (22)$$

ここで $y_{fit}(\zeta)$ と $y_{reg}(\zeta)$ は図 6 に示した ζ の関数であり、 $h(\zeta)$ はそれぞれの範囲を用いて正規化した値の和を表している。 $y(0)$ は正則化項を用いない場合の値であり、 $y(\infty)$ は $P = \bar{P}$ とした場合に得られる値である。このため、 $y_{reg}(\infty)$ の値は常に 0 である。さらに、 $y_{fit}(\zeta)$ と $y_{reg}(\zeta)$ は共に単調な関数であることから $h(0) = h(\infty) = 1$ が成立する。様々な ζ の下で最適化問題を解き、その結果得られた $h(\zeta)$ が最も小さくなる ζ を採用して実分布を推定する。

様々な ζ に対する $h(\zeta)$ と KL 情報量の値を図 7 に示した。 $\sigma = 1\%, 2\%, 5\%$ のいずれの場合においても、 $h(\zeta)$ が小さくなるような ζ の範囲では対応する KL 情報量の値も小さくなっており、この選択基準を用いることで適切に ζ を選択できていることがわかる。結果は省略するが、仮想データを変えて分析した場合でも概ね良い ζ を選択することができており、今回提案した方法は精度良く実分布を推定するためのひとつの ζ の選択基準であると考えられる。ただし、 y_{fit} と y_{reg} が共に値が小さくなるような ζ を選択する方法としてこの他にも多くの基準が考えられる。それらとの比較を行うことは今後の課題である。

5 結論と今後の課題

Recovery Theorem を用いることでオプション価格に内包されている forward looking な実分布を推定することが可能になる。この実分布は市場リスク管理や最適資産配分など多くの金融の問題への応用が期待されている。しかし、この推定の過程で非適切問題が出現するため、実分布の推定量を計算することは容易ではない。本研究では精度良く実分布を推定するための新たな方法を提案し、仮想データを用いた数値分析によってその有効性について検証を行った。

単純に推定を行った場合と比べて, Audrino et al. [2015] の用いた Tikhonov 法や提案法のように正則化項を導入した推定方法を用いることで推定の精度を改善させることができた. これは正則化項の導入により数値誤差やデータのノイズの影響を抑えることができたためであると考えられる. そして, 提案法は先見情報を考慮して正則化項を設定したことで問題に適した解を選択でき, Tikhonov 法に比べて精度の高い実分布の推定ができた. また, 設定した状態数に比べてオプション価格データの満期数が不足する場合でも, ある程度の満期数があればそれほど解の精度は悪化しないことがわかった.

今後の課題としては, より多くの設定条件や仮想データのもとで推定精度に関して検証を行うこと, 実際のオプション価格データから forward looking な実分布を推定しその将来リターンの予測力を検証すること, が挙げられる.

参考文献

- F. Alonso, R. Blanco, and G. Rubio. Testing the forecasting performance of ibex 35 option-implied risk-neutral densities. *Working Paper, Banco de Espana*, 2005.
- F. Audrino, R. Huitema, and M. Ludwig. An empirical analysis of the ross recovery theorem. *Working Paper, Available at SSRN 2433170*, 2015.
- A. Backwell. State prices and implementation of the recovery theorem. *Journal of Risk and Financial Management*, 8(1):2–16, 2015.
- R.R. Bliss and N. Panigirtzoglou. Testing the stability of implied probability density functions. *Journal of Banking & Finance*, 26(2):381–422, 2002.
- R.R. Bliss and N. Panigirtzoglou. Option-implied risk aversion estimates. *The Journal of Finance*, 59(1):407–446, 2004.
- D. Breeden and R. Litzenberger. Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, 51:621–651, 1978.
- P. Carr and J. Yu. Risk, return, and ross recovery. *Journal of Derivatives*, 20(1):38, 2012.
- S. Dubynskiy and R.S. Goldstein. Recovering drifts and preference parameters from financial derivatives. *Working Paper, Available at SSRN 2244394*, 2013.
- M. Ludwig. Robust estimation of shape-constrained state price density surfaces. *The Journal of Derivatives*, 22(3):56–72, 2015.
- I. Martin and S. Ross. The long bond. *Working Paper, Stanford University*, 2013.
- W.R. Melick and C.P. Thomas. Recovering an asset’s implied pdf from option prices: an application to crude oil during the gulf crisis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(1):91–115, 1997.
- H. Park. Ross recovery with recurrent and transient processes. *Working Paper, arXiv preprint arXiv:1410.2282*, 2015.
- L. Qin and V. Linetsky. Positive eigenfunctions of markovian pricing operators: Hansen-scheinkman factorization and ross recovery. *Working Paper, arXiv preprint arXiv:1411.3075*, 2015.
- S. Ross. The recovery theorem. *The Journal of Finance*, 70(2):615–648, 2015.
- T. Spears. On estimating the risk-neutral and real-world probability measures. *PhD thesis, Oxford University*, 2013.
- J. Walden. Recovery with unbounded diffusion processes. *Working Paper, Available at SSRN 2508414*, 2014.
- V.V. Zdorovenin and J. Pézier. Does the information content of option prices add value for asset allocation? *ICMA Centre Discussion Paper No. DP2011-03*, 2011.
- 霧生拓也, 枇々木規雄. 複数資産にインプライド分布を用いた最適資産配分モデル. *Transactions of the Operations Research Society of Japan*, 57:112–134, 2014.