

平均・分散アプローチによるインプライド分布を用いた最適通貨ポートフォリオ

枇々木 裕太 *

霧生 拓也 †

枇々木 規雄 ‡

概要 本研究では平均・分散アプローチによる通貨ポートフォリオ構築における入力パラメータ（期待リターン、分散共分散行列）の推定方法を議論する。株式市場における先行研究ではオプション価格から推定したインプライド分布を用いて最適ポートフォリオを計算することの有効性が示されているが、著者らの知る限り、最適化アプローチによる通貨ポートフォリオ構築に、インプライド分布を用いることの有効性はこれまで検証されていない。本研究では、オプション価格から推定したインプライド期待リターン、インプライド分散共分散を用いて、ヒストリカルデータを利用しないフォワードルッキングな最適通貨ポートフォリオを平均・分散アプローチの枠組みで構築する。通貨の期待リターンの推定には Recovery Theorem (Ross(2015)) を用いる。米ドル投資家を想定した8通貨（米ドル、日本円、ユーロ、英ポンド、スイスフラン、豪ドル、ニュージーランドドル、カナダドル）を投資対象とするバックテストを通して提案手法の有用性を検証する。提案法は先行研究で用いられているヒストリカルデータを用いる方法と比較して、高い運用パフォーマンスを獲得できることが分かった。さらに、提案法の高いパフォーマンスは、スポットリターンの予測を通して獲得していることも明らかにした。

キーワード: 平均分散モデル, Recovery Theorem, 最適通貨ポートフォリオ

1. 研究の背景と目的

外貨預金を投資対象としたポートフォリオを、通貨ポートフォリオという。通貨ポートフォリオに関する先行研究を大別すると、リスクや相関を考慮せずに投資ウェイトを単純なルールで決めるアプローチ（以下、ルールアプローチ）による研究と、リスクや相関の情報を含めた最適化によって投資ウェイトを決定するアプローチ（以下、最適化アプローチ）による研究の2つに分けられる。最適化アプローチによるポートフォリオ構築ではその入力パラメータをどのように推定するかが重要な問題となる。本研究では最適化アプローチによる通貨ポートフォリオ構築における入力パラメータ（期待リターン、分散共分散行列）の推定方法を議論する。

最適化アプローチによる通貨ポートフォリオに関する先行研究 (Baz *et al.*[3], Ackermann *et al.*[1], Della Corte *et al.*[8]) はいずれも平均・分散アプローチ (Markowitz[14]) を採用し、分散共分散行列をヒストリカルリターンから推定している。Baz *et al.*[3] は通貨ポートフォリオの期待リターンを、意思決定時点で確実な金利から得られるキャリーリターンと、不確実な為替差益からなる期待スポットリターンに分解している。そしてスポットリターンはランダムウォークである (Meese and Rogoff[15]) という立場の下、期待スポットリターンはゼロとして最適ポートフォリオを構築している (以降、ランダムウォークモデル)。Ackermann *et al.*[1] もランダムウォークモデルで最適ポートフォリオを構築し、ルールアプローチによるポートフォリオとバックテストのパフォーマンスを比較した結果から通貨ポートフォリオに平均・分散アプローチを適用することの有効性を示している。Della Corte *et al.*[8] は、マクロ経済変数 (直先スプレッド) を用いてスポットリターンを予測する方法 (以降、ヒストリカルモデル) を提案し、ランダムウォークモデルよりも高いパフォーマンスを獲得できることをバックテストの結果から示している。

* 慶應義塾大学大学院 理工学研究科

† 慶應義塾大学大学院 理工学研究科, 株式会社三菱 UFJ トラスト投資工学研究所 (MTEC): 本稿で示した見解はすべて個人の見解であり、筆者の所属する組織としての見解をいかなる意味でも表さない。

‡ 慶應義塾大学 理工学部

ルールアプローチによる通貨ポートフォリオに関する先行研究は Burnside *et al.*[5] や Menkhoff *et al.*[16] など数多く存在するが、森川 [24] は Recovery Theorem (RT, Ross[17]) を用いてオプション価格から推定したインプライド分布のモーメントを利用した投資戦略の有効性を示している。また、霧生ら [23] は株式と無リスク資産を投資対象とした最適化アプローチによるポートフォリオ構築において、RT を用いて推定したインプライド分布を利用することの有効性を検証している。バックテストの結果から、インプライド分布を用いた方法はヒストリカルデータを用いた分布推定方法をアウトパフォームする傾向にあり、パフォーマンスの差異は分布の1次モーメント(期待リターン)の推定値に起因することを示している。このように、近年 RT を用いたインプライド分布を用いた投資戦略の有効性が示されており、最適化アプローチによる通貨ポートフォリオ構築においても RT を用いて推定したインプライド期待リターンを用いることで、より高いパフォーマンスを獲得できることが期待される。特に、インプライド分布には投資家の将来見通しが即座に反映されることから、変動の激しい為替市場に対して相性が良いと考えられる。しかし、著者らの知る限り、最適化アプローチによる通貨ポートフォリオ構築において、インプライド期待リターンの有効性はこれまで検証されていない。

また、分散共分散行列の推定に関しても先行研究で利用されているヒストリカル分散共分散行列に代えて、インプライドボラティリティとインプライド相関 (Siegel[18], Campa and Chang[6]) から計算したインプライド分散共分散行列を利用することで、リスクの推定に関しても投資家の将来見通しを反映することが可能である。筆者らの知る限り、最適化アプローチによる通貨ポートフォリオ構築において、インプライド分散共分散行列の有効性を検証した先行研究も存在しない。

そこで本研究では、インプライド期待リターンとインプライド分散共分散行列を入力パラメータに用いた平均・分散モデル(以下、インプライドモデル)によるフォワードルッキングな通貨ポートフォリオを構築し、その有効性をバックテストで検証する。具体的には米国投資家を想定し、USD(米ドル)に7つの外貨(JPY(日本円)・CHF(スイスフラン)・EUR(ユーロ)・GBP(英ポンド)・AUD(豪ドル)・NZD(ニュージーランドドル)・CAD(カナダドル))を加えた8通貨を対象資産とし、2006年1月から2020年10月までを投資期間として分析を行った。分析の結果からインプライドモデルは、既存モデル(ランダムウォークモデル、ヒストリカルモデル)をアウトパフォームすることを示す。また、インプライドモデルの高いパフォーマンスは、実現スポットリターンの予測を通して獲得していることも明らかにする。

本研究の構成は以下の通りである。2節で平均・分散アプローチによるポートフォリオ最適化モデルを説明した後、各モデルの期待リターンと分散共分散行列の推定方法を説明する。3節では分析の設定条件および使用するデータを説明する。4節でインプライドモデルと既存モデルをスポットリターンの予測力やバックテストのパフォーマンスの観点で比較した結果を示し、考察を加える。最後に5節でまとめと今後の課題を述べる。

2. 最適通貨ポートフォリオモデル

2.1. 平均・分散モデル

投資対象を1つの無リスク資産(内貨)と n 個のリスク資産(外貨)とし、平均・分散モデルの枠組み(2次型期待効用)の下で最適化問題を解き、投資比率を決定する。無リスク資産への投資比率

は0%から100%の範囲とする¹.

$$\max_{w_t, y_t^j} E_t [U(r_{t+1})] = E_t [r_{t+1}] - \frac{1}{2} \gamma \sigma_{t+1|t}^2 \quad (1)$$

$$\text{subject to } E_t[r_{t+1}] = \sum_{j=1}^n y_t^j \bar{r}_{t+1}^j + (1 - w_t) r_t^d \quad (2)$$

$$\sigma_{t+1|t}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_t^i y_t^j \sigma_{i,j} \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n y_t^j = w_t \quad (4)$$

$$0 \leq w_t \leq 1 \quad (5)$$

$$-\alpha w_t \leq y_t^j \leq \alpha w_t \quad (j = 1, \dots, n) \quad (6)$$

ここで、 w_t はリスク資産への投資比率の合計、 y_t^j はリスク資産 j への投資比率を表す決定変数である。また、 γ は投資家のリスク回避度、 r_t^d は想定する投資家の本国の無リスク金利、 \bar{r}_{t+1}^j は資産 j の期待リターン ($\bar{r}_{t+1}^j = E_t[r_{t+1}^j]$ 、 r_{t+1}^j は期間 $t+1$ (時点 t から $t+1$ までの期間) におけるリターンを表す確率変数)、 $\sigma_{i,j}$ は資産 i と資産 j の共分散 ($i = j$ の場合は分散) を表すパラメータである。式 (6) はリスク資産内の投資比率が極端になることを避けるために設定する制約であり、 α はリスク資産内の投資比率の絶対値の上限を表すパラメータである。本研究では、無リスク資産を USD、リスク資産の数を $n = 7$ (JPY · CHF · EUR · GBP · AUD · NZD · CAD) とする。

2.2. 期待リターンと分散共分散行列の推定

平均・分散モデルで投資比率を決定するために期待リターン \bar{r}^j と分散共分散行列 $\Sigma = \{\sigma_{i,j}\}$ を推定する必要がある。ここで、外貨 j の期待リターン \bar{r}_{t+1}^j は、意思決定時点で確実な金利からなるキャリーリターンと、不確実な為替差益からなる期待スポットリターンの2つの要素から構成される (Baz *et al.*[3])。

$$\bar{r}_{t+1}^j = E_t[r_{t+1}^j] = r_t^{fj} + E_t[s_{t+1}^j] \quad (7)$$

r_t^{fj} は時点 t における外貨 j の無リスク金利、 s_{t+1}^j は期間 $t+1$ における対数スポットリターンを表す確率変数である。以下では本研究で比較する3つのモデル (ランダムウォークモデル、ヒストリカルモデル、インプライドモデル) における期待スポットリターンと分散共分散行列の推定方法を説明する。

2.2.1. ランダムウォークモデル (Baz *et al.*[3], Ackermann *et al.*[1])

Baz *et al.*[3] および Ackermann *et al.*[1] は、為替レートを予測するのは困難 (Meese and Rogoff[15]) という立場の下で、式 (7) の期待スポットリターン $E_t[s_{t+1}^j]$ の推定値をゼロとするナイーブな方法で期待リターンを推定している。この場合、期待リターンはキャリーリターンに一致する。

また、分散共分散行列は過去の月次対数スポットリターンの系列 $\{s_t^j, s_{t-1}^j, \dots, s_{t-T+1}^j\}$ から推定する。 T は推定に用いるリターンの期間数である。

2.2.2. ヒストリカルモデル (Della Corte *et al.*[8])

Della Corte *et al.*[8] は式 (8) の時系列回帰で期待スポットリターン $E_t[s_{t+1}^j]$ を推定している。

$$E_t[s_{t+1}^j] = \alpha^j + \beta^j x_t^j + u_t^j \quad (8)$$

¹リスク資産への投資比率の合計も0%から100%の範囲である (式 (5))。

α^j, β^j は回帰係数で, u_t^j は平均がゼロの誤差項である. また, x_t^j は経済変数を表しており, Della Corte *et al.*[8] では直先スプレッド (対数フォワードレートから対数スポットレートを引いた値) を採用した場合にランダムウォークモデルをアウトパフォームできると報告している. このことを踏まえて, 本研究では経済変数に直先スプレッドを採用して検証を行う. また, 分散共分散行列はランダムウォークモデルと同様, 過去の対数スポットリターンから推定する.

2.2.3. インプライドモデル

インプライドモデルにおける期待スポットリターンの推定は, 大きく分けて2つの手順で行う. まず最初にオプション価格からリスク中立分布を推定する. 次に RT を用いてオプション価格から投資家のリスク選好を推定し, リスク中立分布を実分布に変換 (リスク調整) する.

まず, リスク中立分布の推定方法を説明する. 原資産価格 x に対するリスク中立分布の密度関数 $q_\tau(x)$ は, 満期までの期間 τ , 行使価格 k に対するコールオプション価格関数 $C(\tau, k)$ を k で2階微分することで得られる (Breed and Litzenberger[4]).

$$q_\tau(x) = e^{r^d \tau} \left. \frac{\partial^2 C(\tau, k)}{\partial k^2} \right|_{k=x} \quad (9)$$

分析に用いる通貨オプションデータはアットザマネー (ATM) のインプライドボラティリティ (IV) σ_{ATM} と各デルタ水準 $\Delta (= 0.1, 0.25)$ におけるリスクリバーサル (RR) RR_Δ , バタフライスプレッド (BF) BF_Δ の形式で提供² されており, 式 (9) からリスク中立分布 $q_\tau(k)$ を計算するには変数変換と補間をして $C(\tau, k)$ の形式に変更する必要がある. この手順を以下に示す. 表記を簡単にするためオプションの満期を表す添字 τ は省略する.

1. 式 (10) を用いて σ_{ATM} , RR_Δ , BF_Δ から各デルタ Δ に対応する σ_Δ を計算する.

$$\sigma_\Delta = \begin{cases} 0.5RR_\Delta + BF_\Delta + \sigma_{ATM} & (\Delta = 0.1, 0.25) \\ \sigma_{ATM} & (\Delta = 0.5) \\ -0.5RR_{1-\Delta} + BF_{1-\Delta} + \sigma_{ATM} & (\Delta = 0.75, 0.9) \end{cases} \quad (10)$$

2. 霧生・枇々木 [22] の提案する薄板平滑化スプライン法を用いて Δ および τ に関して σ_Δ を補間し, $\sigma(\Delta, \tau)$ を得る.
3. $\sigma(\Delta, \tau)$ の Δ を Garman-Kohlhagen 公式 (GK 式, Garman and Kohlhagen[10])³を用いて行使価格 k に変数変換し, IV 関数 $\sigma(k, \tau)$ を得る.
4. GK 式を用いて $\sigma(k, \tau)$ をコールオプション関数 $C(k, \tau)$ に変数変換し, コールオプション価格関数 $C(k, \tau)$ を得る.

以上の手順で得られた $C(k, \tau)$ から, 式 (9) によって $q_\tau(x)$ を導出する.

次に RT を用いて投資家のリスク選好を推定し, リスク中立分布を実分布にリスク調整する. RT は Ross[17] によって状態価格に対する斉次マルコフ性の仮定の下で導出され, その後 Jackwerth and

² σ_{ATM} は $\Delta = 0.5$ における IV ($\sigma_{ATM} = \sigma_{0.5}$) として定義される. また, RR_Δ と BF_Δ はそれぞれ次の式で定義される.

$$\begin{aligned} RR_\Delta &= \sigma_\Delta^{call} - \sigma_\Delta^{put} \\ BF_\Delta &= 0.5(\sigma_\Delta^{call} + \sigma_\Delta^{put}) - \sigma_{ATM} \end{aligned}$$

³GK 式は通貨版のブラックショールズ公式として知られており, 次の式で表すことができる.

$$\begin{aligned} C(x, \tau, k, r^d, r^f, \sigma) &= x e^{-r^f \tau} N(d_1) - k e^{-r^d \tau} N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln(x/k) + (r^d - r^f - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \end{aligned}$$

ここで, r^f は外貨金利, $N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である. また, $\Delta = N(d_1)$ の関係より, Δ から k を計算できる.

Menner[11] および Jensen *et al.*[12] によって斉次マルコフ性を仮定しない形に一般化されている。本研究ではこの一般化された RT を利用する。

RT は、離散時間・有限状態空間の多期間のもとで導かれた定理である。市場は完備で裁定機会 は存在せず、時間分離可能な効用を持つ代表的投資家を仮定すると、時点 $t (= 1, 2, \dots, T)$, 状態 $i (= 1, 2, \dots, s_0, \dots, S)$ における実確率 $f_{t,i}$ と状態価格 $\pi_{t,i}$, プライシングカーネル $m_{t,i}$ の関係は式 (11) のように表現できることが知られている。状態価格 $\pi_{t,i}$ は状態価格分布 $\pi_\tau(x)$ を離散化することで得られ、さらに $\pi_\tau(x)$ と $q_\tau(x)$ の間には $\pi_\tau(x) = e^{-r^d \tau} q_\tau(x)$ の関係があるため、前に計算した $q_\tau(x)$ から計算できる。

$$f_{t,i} = \frac{\pi_{t,i}}{m_{t,i}} \quad (11)$$

ここで、状態 i は現在の状態 s_0 を基準とする原資産（為替）のリターンで定義する。また、プライシングカーネル $m_{t,i}$ は、代表的投資家の主観的割引係数 δ , 満期までの時間 τ_t , s_0 での限界効用で基準化した状態 i における投資家の限界効用 h_i を用いて以下の式 (12) で表すことができる。

$$m_{t,i} = \delta^{\tau_t} h_i \quad (12)$$

式 (11) に式 (12) を代入することで、以下の式 (13) を得る (RT)。

$$\pi_{t,i} = \delta^{\tau_t} f_{t,i} h_i \quad (13)$$

計算を簡単にするため、 δ^{τ_t} を $\delta = \delta_0$ で Taylor 展開することで $\delta^{\tau_t} \approx a_t + b_t \delta$ (ただし、 $a_t = -(\tau_t - 1) \delta_0^{\tau_t}$, $b_t = \tau_t \delta_0^{\tau_t - 1}$) という線形式に置き換える。この式を式 (13) に代入して整理し、行列形式で記述すると

$$\begin{bmatrix} -b_1 & \pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,s_0-1} & \pi_{1,s_0+1} & \cdots & \pi_{1,S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_T & \pi_{T,1} & \cdots & \pi_{T,s_0-1} & \pi_{T,s_0+1} & \cdots & \pi_{T,S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ h_1^{-1} \\ \vdots \\ h_{s_0-1}^{-1} \\ h_{s_0+1}^{-1} \\ \vdots \\ h_S^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - \pi_{1,s_0} \\ \vdots \\ a_T - \pi_{T,s_0} \end{bmatrix} \quad (14)$$

と表現できる。さらに、この式をパラメータ行列 \mathbf{B} , 未知変数ベクトル \mathbf{h}_δ , パラメータベクトル \mathbf{a}_π を用いて置き換えると $\mathbf{B}\mathbf{h}_\delta = \mathbf{a}_\pi$ と表すことができる。 \mathbf{h}_δ を求めるために、式 (15) の両辺の差が最小になるように、以下の問題を解いて \mathbf{h}_δ を推定する。

$$\min_{\mathbf{h}_\delta} \|\mathbf{B}\mathbf{h}_\delta - \mathbf{a}_\pi\|_2^2 \quad (15)$$

$$\text{subject to } \delta > 0 \quad (16)$$

式 (15) の問題はノイズに対して解が不安定になりやすいことが先行研究で指摘されている (Audrino *et al.*[2], Kiriu and Hibiki[13], Jackwerth and Menner[11])。そこで本研究では、伊藤ら [20] で提案された、先験情報を考慮した正則化項を式 (15) に導入する方法を用いて解を推定する。その際、代表的投資家がリスク中立的であるという先験情報のもとで推定を行っている⁴。得られた解を式 (13) に代入することで実確率 $f_{t,i}$ が得られる。この確率から期待スポットリターンを計算する。

⁴極端なリスク調整がなされることを防ぐ目的でこの先験情報を設定している。先験情報の設定が分析結果に与える影響を分析することは今後の課題である。

また、分散共分散行列 Σ も期待リターンと同様に、オプション価格 (IV) から推定する。 Σ は、対角要素に各リスク資産の標準偏差 σ^j を並べ非対角要素に 0 を並べた標準偏差行列 D と、対角要素に 1、非対角要素に相関係数を並べた相関係数行列 C を用いて、次の式で表すことができる。

$$\Sigma = DCD \quad (17)$$

標準偏差行列 D の各成分の推定値として、各資産の ATM IV σ_{ATM}^j を用いる。また、相関係数行列 C は、インプライド相関 (Siegel[18], Campa and Chang[6]) を利用する。外貨 X と外貨 Y のインプライド相関 $\rho_{X,Y}$ は、米ドルとの各通貨ペアと、外貨 X と外貨 Y のペアの ATM IV $\sigma_{X,\$}$, $\sigma_{Y,\$}$, $\sigma_{X,Y}$ から、

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,\$}^2 + \sigma_{Y,\$}^2 - \sigma_{X,Y}^2}{2\sigma_{X,\$}\sigma_{Y,\$}} \quad (18)$$

と計算できる。以上のように推定した D , C を式 (17) に代入し、 Σ を算出する。推定された Σ が半正定値行列にならない場合は、半正定値計画問題を解いて、半正定値性を満たすように行列を修正する⁵。

オプションデータから期待リターンと分散共分散行列を推定することで、過去データを利用することなくフォワードルッキングな最適通貨ポートフォリオを構築できることが本モデルの特徴である。

3. 分析の設定条件およびデータ

3.1. 設定条件

2.1 節の平均・分散モデルにおいてリスク回避度 $\gamma = 2, 4, 6, 8, 10$ と設定し、各リスク回避度のもとでパフォーマンスを比較する。投資は為替フォワード契約を通して行うものと想定し ($t+1$) 時点における通貨 j の実現リターン r_{t+1}^j は次の式で計算する⁶。

$$r_{t+1}^j = \frac{1+r_t^d}{F_t^j} (S_{t+1}^j - F_t^j) + r_t^d \quad (19)$$

ここで S_{t+1}^j は $t+1$ 時点における外貨 j の (実現) スポット価格、 F_t^j は t 時点における外貨 j の (時点 $t+1$ を満期とする) フォワード価格を表している。

また、リスク資産内の投資比率の絶対値の上限は $\alpha = 1$ とする。バックテスト期間は 2006 年 1 月 31 日から 2020 年 10 月 30 日とし、リバランスは月末に行う。ヒストリカルデータを用いて推定を行う場合のパラメータ推定期間は Della Corte *et al.*[8] に倣って $T = 168$ ヶ月 (14 年) とする。また、インプライドモデルの期待リターンを RT によって推定する際の状態数は $S = 201$ 個、状態のレンジは状態価格分布が 95% 入るように設定する。

3.2. データ

分析には Bloomberg から取得したスポットレート、フォワードレート、米ドル無リスク金利、オプションデータを利用する。スポットレートとフォワードレート (1M, 2M, 3M, 6M, 12M) は米ドルと 7 通貨の各ペアをマーケットコンベンションに合わせて取得した。米ドル無リスク金利は、USD LIBOR の 1M, 2M, 3M, 6M, 12M を取得した。GK 式の計算に用いる外貨無リスク金利はスポットレートと各満期のフォワードレート、USD LIBOR から 1M, 2M, 3M, 6M, 12M の金利を算出した⁷。

⁵具体的な修正方法は NTT データ数理システム [21] を参照。

⁶ t 時点において外貨 j の為替フォワードを $\frac{1+r_t^d}{F_t^j}$ 単位契約し、元本 (USD) を無リスク金利で運用することで、実質的に外貨預金を購入した場合と同じキャッシュフローを実現できる。

⁷カバー付き金利平価の関係より、マーケットコンベンションが USD クォートの外貨金利は $\frac{S_t^j}{F_t^j} (1+r_t^d) - 1$ 、マーケットコンベンションが USD ベースの外貨金利は $\frac{F_t^j}{S_t^j} (1+r_t^d) - 1$ で計算した。

インプライドモデルに利用するオプションデータは、期待リターン推定のために米ドルと7通貨のマーケットコンベンションの各ペアにおける満期1M, 2M, 3M, 6M, 12MのATM IVと $\Delta = 0.1, 0.25$ のRR, BFを取得した。また、インプライド分散共分散行列推定のために米ドルと7通貨ペアに加えて、7通貨を組み合わせた21通貨ペア（マーケットコンベンション）の1MのATM IVを取得した。なお、各データはマーケットコンベンションに合わせて取得しているため、期待対数スポットリターンは、マーケットコンベンションのもとで推定した後、USDクォートに変換している。スポットレートとフォワードレートは、1992年1月31日から2020年10月30日、その他のデータは2006年1月31日から2020年10月30日の期間のものを利用している。

4. 分析結果

本節では各モデルをスポットリターンの予測力や運用パフォーマンスの観点から比較した結果を示す。以降の図表では、ランダムウォークモデルをRW、ヒストリカルモデルをHist、インプライドモデルをImpと表記する。

4.1. スポットリターンの予測力

まず、インプライドモデルがランダムウォークモデルやヒストリカルモデルよりも高い期待対数スポットリターンの予測力を持っているか評価する。評価指標としては、モデル間の平均二乗誤差の相対的な大きさを評価する統計量である R_{OS}^2 （Campbell and Thompson[7]）を使用する。 R_{OS}^2 は式(20)で定義される。

$$R_{OS}^2 = 1 - \frac{\sum_{t=0}^{T-1} (s_{t+1} - \hat{s}_{t+1})^2}{\sum_{t=0}^{T-1} (s_{t+1} - \bar{s}_{t+1})^2} \quad (20)$$

ここで、 s_{t+1} は実現対数スポットリターン、 \hat{s}_{t+1} は予測モデルであるインプライドモデルの期待対数スポットリターン、 \bar{s}_{t+1} はベンチマークモデルであるランダムウォークモデルもしくはヒストリカルモデルの期待対数スポットリターンを表している。また、 T はバックテストの期間数を表す。 R_{OS}^2 が正（負）の場合は、インプライドモデルがベンチマークモデルよりも平均二乗誤差（MSE）が小さく（大きく）、予測力が高い（低い）ことを意味する。また、 R_{OS}^2 の有意性をDMWテスト（Diebold and Mariano[9]，West[19]）を用いて検定する。具体的には、式(21)で定義される g_t を定数項で回帰し、その切片が正かつ有意であれば帰無仮説（実現対数スポットリターンに対するインプライドモデルとベンチマークモデルのMSEは等しい）を棄却する。

$$g_t = (s_{t+1} - \bar{s}_{t+1})^2 - (s_{t+1} - \hat{s}_{t+1})^2 \quad (21)$$

表1に、 R_{OS}^2 を示す。ベンチマークがランダムウォークモデルの場合におけるAUDを除く全てのパターンで R_{OS}^2 が正であり、インプライドモデルの予測力が相対的に高いことが分かる。また、DMWテストのt値から有意性を確認すると、ランダムウォークモデルに対してはいずれの通貨に対する予測力も有意にはならなかったものの、ベンチマークモデルをヒストリカルモデルにした場合は半数以上の通貨（JPY, CHF, GBP, NZD）に対して片側10%有意となり、インプライドモデルが相対的に高い予測力を持っていることが示された。以上の結果から、統計的な有意性を示すことができないパターンはあるものの、インプライドモデルはスポットリターンに対する予測力がランダムウォークモデルやヒストリカルモデルよりも高い傾向があることが示唆された。

4.2. 運用パフォーマンス

バックテストのパフォーマンスは、確実性等価リターン（CER）およびシャープレシオ（SR）を用いて評価する。確実性等価リターンは、最適化の目的関数（式(1)）と整合的な評価指標であり、リスクのある投資の期待効用と同水準の効用が得られる無リスク投資のリターンとして次の式(22)

表 1: 予測力 (R_{OS}^2) の比較

通貨		JPY	CHF	EUR	GBP	AUD	NZD	CAD
ベンチマーク モデル	RW	1.064% (0.759)	0.611% (0.615)	0.099% (0.125)	0.454% (0.631)	-0.773% (-0.595)	0.017% (0.011)	0.363% (0.576)
	Hist	3.137%* (1.550)	3.353%* (1.485)	2.634% (1.049)	2.563%** (2.374)	2.637% (0.845)	7.815%** (2.433)	2.080% (1.234)

(注 1) 括弧の上の数値は R_{OS}^2 の値, 括弧内の数値は DMW テストの t 値を表す.

(注 2) *, **はそれぞれ 10%, 1%有意であることを意味する.

で定義される.

$$CER = \bar{r}_p - \frac{1}{2}\gamma\sigma_p^2 \quad (22)$$

\bar{r}_p , σ_p はそれぞれポートフォリオの実現リターンの平均および標準偏差である. また, 実務においてパフォーマンス評価によく利用される指標として以下の式で定義されるシャープレシオの観点でも比較を行う. ただし, \bar{r}^d は米ドル (内貨) の無リスク金利の期間平均値である.

$$SR = \frac{\bar{r}_p - \bar{r}^d}{\sigma_p} \quad (23)$$

表 2 に, 単一通貨に投資したケースおよび各モデルの確実性等価リターンおよびシャープレシオを比較した結果を示す. まず確実性等価リターンを比較した結果を確認すると, リスク回避度の水準に依らず, 3つのモデルの中でインプライドモデルが最も高い確実性等価リターンを得られている. また, $\gamma = 2$ 以外の全てのケースで, 単一通貨に投資したケースまで含めてもインプライドモデルの確実性等価リターンが最も高いことが確認できる.

また, シャープレシオの観点でも, リスク回避度の水準に依らず, 3つのモデルの中でインプライドモデルが一番高い効率性を実現できている. ランダムウォークモデルやヒストリカルモデルは多くのケースでポートフォリオのリターンが無リスク金利よりも低く, シャープレシオが負になっている. 一方, インプライドモデルはリスク回避度の水準に依らずシャープレシオが正になっている. また, リスク回避度 $\gamma = 2, 4$ 以外では, 単一通貨も含めた中でインプライドモデルが一番高い効率性を実現している.

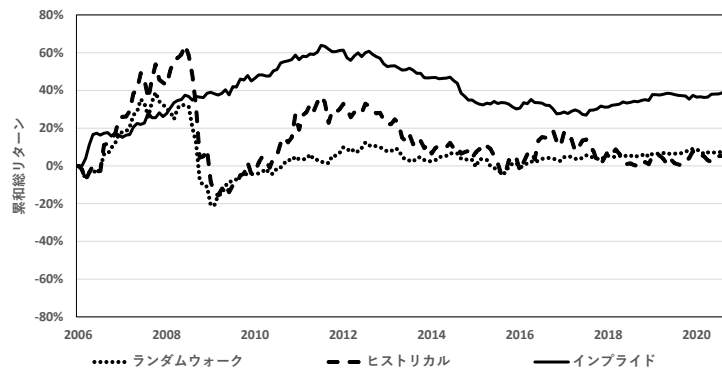


図 1: 累和リターン

図 1 にリスク回避度 $\gamma = 6$ の場合のバックテストの累和リターンを示す⁸. インプライドモデルは検証期間において, ランダムウォークモデルやヒストリカルモデルより高いリターンを獲得でき

⁸紙面の都合上 $\gamma = 6$ のケースのみを掲載しているがリスク回避度の水準を変更した場合にも同様の傾向が見られた.

表 2: 確実性等価リターンとシャープレシオ

	確実性等価リターン					シャープレシオ				
	$\gamma = 2$	$\gamma = 4$	$\gamma = 6$	$\gamma = 8$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 4$	$\gamma = 6$	$\gamma = 8$	$\gamma = 10$
USD	1.41%	1.41%	1.41%	1.40%	1.40%	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
CHF	1.51%	0.48%	-0.55%	-1.57%	-2.60%	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111
JPY	0.13%	-0.71%	-1.55%	-2.39%	-3.24%	-0.048	-0.048	-0.048	-0.048	-0.048
EUR	-0.23%	-1.19%	-2.14%	-3.09%	-4.04%	-0.071	-0.071	-0.071	-0.071	-0.071
GBP	-1.26%	-2.07%	-2.89%	-3.70%	-4.51%	-0.206	-0.206	-0.206	-0.206	-0.206
CAD	-0.09%	-1.01%	-1.93%	-2.85%	-3.77%	-0.061	-0.061	-0.061	-0.061	-0.061
AUD	2.02%	0.31%	-1.41%	-3.12%	-4.84%	0.177	0.177	0.177	0.177	0.177
NZD	2.41%	0.57%	-1.27%	-3.10%	-4.94%	0.209	0.209	0.209	0.209	0.209
RW	-2.21%	-2.97%	-2.53%	-1.61%	-1.01%	0.034	-0.027	-0.091	-0.097	-0.097
Hist	-6.83%	-8.61%	-8.52%	-8.47%	-8.69%	-0.128	-0.106	-0.057	-0.034	-0.031
Imp	1.40%	1.73%	1.82%	1.79%	1.73%	0.124	0.202	0.247	0.272	0.287

ていることがわかる。特に2008年の金融危機時における高金利通貨の急落局面において、ランダムウォークモデルとヒストリカルモデルは急落しているのに対して、インプライドモデルは下落幅が非常に小さかったことが確認できる。金融危機時にインプライドモデルが他のモデルをアウトパフォームする傾向は霧生ら [23] の株式市場での検証でも示されており、今回の為替市場での検証でも同様の傾向が見られたことは興味深い。インプライドモデルと他のモデルの決定的な相違点は、投資家のフォワードルッキングな見通しを反映できることにある。最適ポートフォリオ構築に投資家のフォワードルッキングな見通しを反映したインプライドモデルは市場の転換局面において他のモデルに対する優位性が発揮された可能性がある。

4.3. リターンの要因分解

本節ではバックテストの実現リターンを要因分解することで各モデルのリターンの獲得要因を分析する。まず、ポートフォリオの実現リターンをキャリア要因とスポット要因に分解した結果⁹を表3に示す。紙面の都合上、 $\gamma = 4, 8$ のケースは省略するが、他のリスク回避度のケースと同様の傾向が見られることを確認している。

リスク回避度の水準に依らず、ランダムウォークモデルやヒストリカルモデルのリターンに対してはキャリア要因のプラス寄与が大きい一方、スポット要因が大きくマイナス寄与していることが分かる。一方でインプライドモデルの場合はキャリアリターンの寄与は小さいものの、スポットリターンのプラス寄与が大きく、結果的にランダムウォークモデルやヒストリカルモデルと比較して高いリターンを獲得できている。この結果は、4.1節における、インプライドモデルのスポットリターンの予測力の高さとも整合的である。次に、各モデルのリターンの差異が平均的な投資比率の違いによるものか、時系列的な投資比率の調整の優劣によるものかを検証するため、リターンを平均要

⁹スポット要因を $(S_{t+1}^j - S_t^j)/S_t^j$ と定義し、キャリア要因は実現リターンとスポット要因の差異 $(r_{t+1}^j - (S_{t+1}^j - S_t^j)/S_t^j)$ と定義して各通貨の実現リターン r_{t+1}^j を分解する。その後、投資比率による加重和でポートフォリオのスポット要因とキャリア要因を計算する。

表 3: リターンの要因分解 (スポット要因・キャリー要因)

	$\gamma = 2$			$\gamma = 6$			$\gamma = 10$		
	リターン	スポット	キャリー	リターン	スポット	キャリー	リターン	スポット	キャリー
RW	2.13%	-5.40%	7.53%	0.50%	-3.69%	4.19%	0.83%	-2.26%	3.09%
Hist	-1.54%	-6.85%	5.31%	0.44%	-3.79%	4.23%	0.98%	-2.58%	3.57%
Imp	2.95%	3.09%	-0.14%	2.89%	2.21%	0.69%	2.62%	1.69%	0.93%

因 \hat{r}_p と変動要因 \tilde{r}_p に分解する. 各要因は以下の式で定義する.

$$\hat{r}_p = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{n+1} \bar{z}^j r_t^j \quad (24)$$

$$\tilde{r}_p = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{n+1} (z_{t-1}^j - \bar{z}^j) r_t^j \quad (25)$$

ここで, n は外貨の数で, $j = n + 1$ は無リスク資産 (内貨) を表すものとする. また, T は検証期間数, z_t^j, r_t^j はそれぞれ, 時点 t , 外貨 j の投資比率および実現リターンを表す. \bar{z}^j は外貨 j への投資比率の期間平均を表す.

表 4 にリスク回避度 $\gamma = 2, 6, 10$ の場合においてリターンおよびスポット要因とキャリー要因を平均要因と変動要因に分解した結果を示す. まず, リターンを分解した結果を確認すると, ランダムウォークモデルとヒストリカルモデルは平均要因でリターンを獲得できているものの, 変動要因がマイナスになっており, 時系列的な投資比率の調整がリターンを低下させていることが確認できる. それに対して, インプライドモデルは平均要因に加えて変動要因もプラスになっていることが特徴的である. さらに, スポット要因とキャリー要因に分けて確認すると特にスポット要因でこの傾向が大きいことがわかる. この結果はインプライドモデルがスポットリターンの予測をもとに市場環境に合わせて時系列的に投資比率を変化させ, その投資比率の変更がスポット要因の獲得に繋がっていることを示している.

表 4: リターンの要因分解 (平均要因・変動要因)

		$\gamma = 2$			$\gamma = 6$			$\gamma = 10$		
		リターン	平均要因	変動要因	リターン	平均要因	変動要因	リターン	平均要因	変動要因
総リターン	RW	2.13%	3.94%	-1.81%	0.50%	2.08%	-1.57%	0.83%	1.81%	-0.98%
	Hist	-1.54%	5.62%	-7.16%	0.44%	3.94%	-3.50%	0.98%	3.03%	-2.05%
	Imp	2.95%	1.00%	1.95%	2.89%	1.16%	1.74%	2.62%	1.21%	1.41%
スポット リターン	RW	-5.40%	-1.87%	-3.53%	-3.69%	-1.03%	-2.65%	-2.26%	-0.63%	-1.63%
	Hist	-6.85%	2.14%	-8.99%	-3.79%	1.58%	-5.37%	-2.58%	1.01%	-3.59%
	Imp	3.09%	1.98%	1.12%	2.21%	0.81%	1.39%	1.69%	0.49%	1.21%
キャリー リターン	RW	7.53%	5.81%	1.72%	4.19%	3.11%	1.08%	3.09%	2.43%	0.65%
	Hist	5.31%	3.48%	1.83%	4.23%	2.36%	1.87%	3.57%	2.02%	1.55%
	Imp	-0.14%	-0.98%	0.84%	0.69%	0.35%	0.34%	0.93%	0.73%	0.20%

4.4. 期待リターンと分散共分散行列に分けた分析

インプライドモデルと他の 2 つのモデルの間には期待リターンと分散共分散行列の推定方法に違いがあるが, どちらがパフォーマンスの改善により大きく影響していたのかを検証する. 具体的には, 各モデルの期待リターンの推定方法と分散共分散行列の推定方法の全ての組み合わせに対して分析を行った.

表5は各組み合わせの確実性等価リターンを比較した結果である。リスク回避度の水準に依らず、(期待リターン)：(分散共分散行列)が(Imp)：(Imp)の組み合わせの確実性等価リターンが最も高く、続いて(Imp)：(RW, Hist)の組み合わせが高いことが確認できる。このことからインプライド期待リターンを用いることがパフォーマンス改善への寄与が大きいといえる。ただし、全体的にヒストリカル分散共分散行列を用いた場合よりもインプライド分散共分散行列を用いた場合の方がパフォーマンスが高い傾向が見られており、インプライド分散共分散行列を用いることもパフォーマンス向上に寄与している。表6はシャープレシオを比較した結果である。シャープレシオを用いた場合も概ね確実性等価リターンを用いた場合と同様の傾向が見られている。

表 5: 確実性等価リターン (期待リターンと分散共分散行列の組み合わせ)

期待リターン	分散共分散行列	$\gamma = 2$	$\gamma = 4$	$\gamma = 6$	$\gamma = 8$	$\gamma = 10$
RW	RW, Hist	-2.21%	-2.97%	-2.53%	-1.61%	-1.01%
	Imp	-1.70%	-1.15%	-0.90%	-0.44%	-0.09%
Hist	RW, Hist	-6.83%	-8.61%	-8.52%	-8.47%	-8.69%
	Imp	-2.87%	-3.56%	-4.30%	-5.21%	-5.82%
Imp	RW, Hist	0.43%	0.97%	0.99%	1.07%	1.13%
	Imp	1.40%	1.73%	1.82%	1.79%	1.73%

表 6: シャープレシオ (期待リターンと分散共分散行列の組み合わせ)

期待リターン	分散共分散行列	$\gamma = 2$	$\gamma = 4$	$\gamma = 6$	$\gamma = 8$	$\gamma = 10$
RW	RW, Hist	0.034	-0.027	-0.091	-0.097	-0.097
	Imp	0.024	0.047	0.028	0.042	0.055
Hist	RW, Hist	-0.128	-0.106	-0.057	-0.034	-0.031
	Imp	0.002	0.076	0.112	0.109	0.114
Imp	RW, Hist	0.058	0.131	0.132	0.129	0.128
	Imp	0.124	0.202	0.247	0.272	0.287

5. まとめと今後の課題

本研究ではオプション価格から推定したインプライド期待リターンおよびインプライド分散共分散行列を利用した、ヒストリカルデータを利用しないフォワードルッキングな最適通貨ポートフォリオを平均・分散アプローチの枠組みで導出した。提案法は、確実性等価リターンやシャープレシオなどの観点において、スポットリターンを予測しない方法やヒストリカルデータからスポットリターンを予測する方法をアウトパフォームすることをバックテストの結果から示した。また、提案法はスポットリターンの予測によってスポット要因を多く獲得していることも明らかにした。本研究の結果は、為替市場におけるフォワードルッキングなポートフォリオの構築方法の有効性を示唆するものである。今後の課題として、インプライド期待リターンやインプライド分散共分散行列の時系列の変動から投資家の見通しの変化をより詳しく分析することが挙げられる。

参考文献

- [1] Ackermann, F., Pohl, W., and Schmedders, K. (2017). Optimal and naive diversification in currency markets. *Management Science*, 63(10), 3347–3360.
- [2] Audrino, F., Huitema, R., and Ludwig, M. (2019). An empirical implementation of the Ross recovery theorem as a prediction device. *Journal of Financial Econometrics*, nbz002.

- [3] Baz, J., Breedon, F., and Naik, V. (2001). Optimal portfolios and foreign currencies. *Journal of Portfolio Management*, 28(1), 102–111.
- [4] Breeden, D. T., and Litzenberger, R. H. (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, 51(4), 621–651.
- [5] Burnside, C., Eichenbaum, M., and Rebelo, S. (2008). Carry Trade: The Gains of Diversification. *Journal of the European Economic Association*, 6(2-3), 581–588.
- [6] Campa, J. M., and Chang, P. H. K. (1998). The forecasting ability of correlations implied in foreign exchange options. *Journal of International Money and Finance*, 17(6), 855–880.
- [7] Campbell, J. Y., and Thompson, S. B. (2008). Predicting excess stock returns out of sample: Can anything beat the historical average?. *Review of Financial Studies*, 21(4), 1509–1531.
- [8] Della Corte, P., Sarno, L., and Tsiakas, I. (2009). An economic evaluation of empirical exchange rate models. *Review of Financial Studies*, 22(9), 3491–3530.
- [9] Diebold, F. X., and Mariano, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, 253–263.
- [10] Garman, M. B., and S. W. Kohlhagen. (1983). Foreign currency option values. *Journal of International Money and Finance*, 2(3), 231–237.
- [11] Jackwerth, J. C., and Menner, M. (2020). Does the Ross recovery theorem work empirically?. *Journal of Financial Economics*, 137(3), 723–739
- [12] Jensen, C. S., Lando, D., and Pedersen, L. H. (2019). Generalized recovery. *Journal of Financial Economics*, 133(1), 154–174.
- [13] Kiriu, T., and Hibiki, N. (2019). Estimating forward looking distribution with the Ross recovery theorem. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 62(2), 83–107.
- [14] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- [15] Meese, R., and Rogoff, K. (1983). Empirical exchange rate models of the seventies: Do they fit out of sample?. *Journal of International Economics*, 14(1), 3–24.
- [16] Menkhoff, L., Sarno, L., Schmeling, M., and Schrimpf, A. (2012). Currency momentum strategies. *Journal of Financial Economics*, 106(3), 660–684.
- [17] Ross, S. (2015). The recovery theorem. *Journal of Finance*, 70(2), 615–648.
- [18] Siegel, A. F. (1997). International currency relationship information revealed by cross-option prices. *Journal of Futures Markets*, 17(4), 369–384.
- [19] West, K. D. (1996). Asymptotic inference about predictive ability. *Econometrica*, 64(5), 1067–1084.
- [20] 伊藤雅剛・霧生拓也・枇々木規雄. (2019). Generalized Recovery Theorem を用いた forward looking な収益率分布の推定. *ジャフイー・ジャーナル*, 17, 76–99.
- [21] 株式会社 NTT データ数理システム. <https://www.msi.co.jp/nuopt/docs/v20/examples/html/02-21-00.html>. (2021/1/4 閲覧) .
- [22] 霧生拓也・枇々木規雄. (2014). 複数資産にインプライド分布を用いた最適資産配分モデル. *日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌*, 57, 112–134.
- [23] 霧生拓也・枇々木裕太・枇々木規雄. (2021). 最適資産配分問題における収益率分布推定方法の比較. *ジャフイー・ジャーナル*, 掲載予定.
- [24] 森川竜太郎. (2018). Ross Recovery on FX market. *日本金融・証券計量・工学学会 2017 年冬期大会予稿集*, 84–95.