

# ファンド運営を意識した最適ペアトレード戦略 -DFO手法を用いた問題設計-

平成 26 年 9 月 1 日

概要. 本論文では, 伝統的な投資戦略の 1 つであるペアトレード戦略について理論的・実証的の先行研究を整理し, 実際の運用戦略で利用できる設定や目的関数の下でシミュレーションを行うことにより最適な投資戦略について考察を行った. 具体的には, 理論的研究で用いられている確率過程による表現を利用してモンテカルロ・シミュレーションを行い, 実証的研究や実際の運用戦略で用いられているリターン, コスト, リスクの観点での評価や閾値に基づく戦略の下で最適化問題を定義する. そして近年注目されているルールに基づく最適化問題を求解するための最適化手法である DFO(Derivative Free Optimization) 手法を用いて最適な投資戦略を求め, 様々な状況での最適戦略について考察を行った.

キーワード. ペアトレード戦略, DFO(Derivative Free Optimization) 手法, 取引ルール, モンテカルロ・シミュレーション.

## 1 はじめに

ペアトレード戦略は古典的な投資手法の 1 つであり, 直感的な分かりやすさと運営の行いやすさから, 現在でも個人投資家からヘッジファンドのような機関投資家までが利用している手法である (Vidyamurthy[10]). 代表的なペアトレード戦略は, 類似した 2 つの資産の価格差 (スプレッド) に注目し, 何らかの要因により 2 つの資産価格に一時的な乖離が発生した状況において, その乖離が収束することを期待してポジションを構築する投資手法である<sup>1</sup>.

図 1 に具体的な例として, トヨタ自動車と豊田自動織機に着目し, 2012 年 4 月 2 日から 2013 年 3 月 29 日の日次スプレッド (トヨタ自動車の対数価格 - 豊田自動織機の対数価格) の推移を示す. 図 1 より, 2 つの株価のスプレッドは 0.35 を中心として変動しており, 一時的にスプレッドが平均水準から乖離しても, その後平均水準に収束していくことが分かる. 図 1 の点線は平均  $\pm 1$  標準偏差の乖離水準, 破線は平均  $\pm 0.3$  標準偏差の乖離水準を示している. 例えば 5 月 16 日にスプレッドが点線を超えて価格差が大きくプラスに乖離した時点でトヨタ自動車を 1 単位空売り, 豊田自動織機を 1 単位購入してポジションを構築し, 6 月 11 日にスプレッドが破線

<sup>1</sup>文献によっては, 価格の差ではなく対数価格の差や基準化した価格の差を利用している. また価格差ではなく 2 資産の 1 次結合で表現するものもある. どの定義を用いても以降の議論に本質的な違いはないが, 本研究では Mudchanatongsuk et al.[7] に従い, 2 資産の対数価格の差をスプレッドとして定義する.

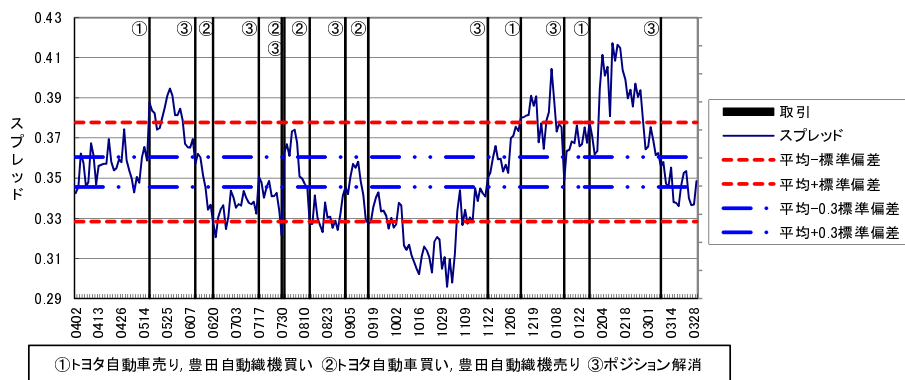


図 1. トヨタ自動車と豊田自動織機の対数価格差 (2012 年度)

を超えて価格差が収斂した時点でポジションを解消することで収益が得られることになる。この場合、得られる収益は、5月16日のスプレッド0.39と6月11日のスプレッド0.36の差が0.03であることから3%となる。

ペアトレード戦略の収益の源泉は、2つの資産の共和分構造である。共和分構造を持つとは、複数の単位根過程に従う確率変数が組合さることで定常過程となることを言う。つまり、1資産の価格や収益率の予測を行うことはできないが、2つ以上の資産の組合せ(本論文では2資産の対数価格差)を考えることで、その過程が平均回帰性を持ち、投資戦略に利用できる。

このようなペアトレード戦略は古くから理論的研究、実証的研究が数多く行われている。理論的研究では、Elliott et al.[3]が共和分構造を持つ確率変数の統計的性質からポジションを構築/解消する閾値の算出方法を提案している。具体的には、直前までの観測値に基いたスプレッド過程の条件付期待値を閾値として利用することを述べており、その条件付期待値を求める手法を提案している。

またMudchanatongsuk et al.[7]では、スプレッドと各資産の確率過程を定義し、連続時間の設定の下でペアトレード戦略から得られる富の期待効用を最大化する各資産の保有比率をHJB方程式を解くことで解析的に求めている。このような確率的アプローチは現在でも拡張的な研究が行われており、Tourin and Yan[9]ではMudchanatongsuk et al.[7]の仮定していた2つの資産を対称的に保有するという制約を緩和して、スプレッドを構成する2資産の保有比率を解析的に求めている。また山田・Primbs[16]では、1つのスプレッドの保有比率を求めるのではなく、複数のスプレッドの保有戦略を条件付平均・分散モデルとして定式化している。彼らはこの問題を解析的に解き、その取引戦略を実行することによって高いリターンが得られることを示している。

実証的研究では、米国・日本など様々な国でペアトレード戦略の有効性が検証されている。その多くはElliott et al.[3]を参考にしており、事前に決めたポジション構築/解消の閾値を利用してアウトオブサンプル期間でペアトレード戦略の有効性を示すものである。例えば、Gatev et al.[4]は米国市場で1996年から2002年までの日次データを用いて実際にペアトレード戦略を構築することでその収益性を検証している。彼らは開始時点において過去1年のスプレッドの平均と標準偏差を計算し、平均 $\pm 2$ 標準偏差の乖離でポジションを構築し、価格差がゼロになった時点でポジションを解消するというルールの下でその後半年間の収益性を検証した。その結果、月次で0.9%~1.4%程度の収益が得られており、コストを保守的に見積もってもプラスの収益が得られること、Fama-Frenchの3ファクターで調整した後も収益が残ることを実証的に示している。国内株式市場においても、安達[11]、袴田[14]が同様の分析を行っており、共和分構造を持つペアの抽出方法やポジション構築/

解消の閾値について考察を行っている。どちらの研究も国内株式市場において、ペアトレード戦略は有効に機能し、分析期間において収益性が高いことを主張している。

このようにペアトレード戦略に関しては、様々な理論的・実証的研究が現在まで行われている。理論的研究については、共和分構造や平均回帰性の特性を考慮し、最適なペアトレード戦略を構築できるという点で非常に魅力的な研究である。しかしながら、実際に運営を行う際の条件を考慮できないという問題点が挙げられる。例えば Elliott et al.[3] では、スプレッド過程の統計的性質からポジション構築の閾値を算出できるが、コストやリスクの観点を考慮することができず、どの程度の収益性があるかを判断できない。連続時間で問題を扱う確率的アプローチの研究では、スプレッドや各資産の最適な保有ウェイトが連続的に算出されるが、実際の運用で連続的にポジションを構築することは難しく、運用可能であるとしてもコストが非常に高くなることも考えられる。離散的なリバランス間隔や取引コストを考慮した場合、最適な保有ウェイトや取引戦略も異なると思われるが確率的アプローチではそれらの条件を考慮することが困難である。またレバレッジや回転率など実務的に必要な条件を考慮することもできないため、現実的にファンドへ適用することが難しい。

実証的研究については、市場の株価データを用いて離散時間で運用可能な条件を下に分析を行っており、実際にこれらの論文で提案されているルールに基づいて運営を行っているファンドも存在している。これらの研究で用いられている閾値に基づく取引ルールは、Elliott et al.[3] を参考にしたものであるが、Elliott et al.[3] ではスプレッドの特性や時間の経過とともにポジション構築の閾値が異なっている。それに対し実証的研究の多くは、対象とする全てのペアで同一のポジション構築/解消の閾値を利用しており、その閾値も実証的に過去のパフォーマンスが有効なものを決定しているにすぎない。

そこで本論文ではこれらの研究を踏まえ、確率的アプローチの設定を活かし離散時間の枠組みで現実的な条件を意識した取引ルールと、実際の運用で行われる期待リターン、期待コスト、リスクを用いた評価の上で最適なペアトレード戦略を構築し、その特性について考察を行う。具体的には、はじめに確率的アプローチの研究で利用されている確率モデルを用いてスプレッド過程のモンテカルロ・シミュレーションを行う。次に実証的研究で利用されている現実的な運用ルールを設定し、それに利用するパラメータを決定変数として定義する。そしてペアトレード戦略の目的関数を設定し、各シミュレーションパスに対して目的関数の評価を行うプロセスを最適化問題に組み込み、DFO(Derivative Free Optimization) 手法を用いて最適なパラメータを算出する。

DFO 手法は本論文で扱うような微分不可能な非線形計画問題に対し、ある程度の精度で実行可能解を求めるための手法であり、古くから様々な方法が提案されている (Conn et al.[1])。近年アルゴリズムの発展により、改めて注目されている手法であり、金融分野においても適用例が見られている。例えば、Hibiki and Yamamoto[5]、枇々木他 [15] ではアセットミックスのリバランス問題について DFO 手法を利用しており、資産配分比率がある一定の閾値を超えた場合に、閾値上の点にリバランスを行うというルールの下で目的関数を最小化する閾値を求めている。本論文で取り扱う問題に関しても、Hibiki and Yamamoto[5]、枇々木他 [15] の問題と同様、モンテカルロ・シミュレーションを用いて定義される取引ルールの下でそのパラメータを最適化するという点で類似しており、DFO 手法と相性のよい問題であるといえる。本論文では、DFO 手法を用いることで効率的に最適な取引ルールを求めることができることも示していく。

これより、本論文の先行研究との位置づけをまとめると表 1 のようになる。

表 1: 先行研究との位置づけ

カテゴリ	論文	時間間隔	決定変数	評価関数	問題の記述	方法論
理論	Elliott et al.[3]	離散	閾値	なし	確率過程	条件付期待値
	Mudchanatongsuk et al.[7]	連続	保有ウェイト	期待効用	確率過程	解析的手法
	Tourin and Yan[9]	連続	保有ウェイト	期待効用	確率過程	解析的手法
	山田・Primbs[16]	連続	保有ウェイト	平均・分散	確率過程	解析的手法
実証	Gatev et al.[4]	離散	閾値	リターン・コスト・リスク	過去の株価	バックテスト
	袴田 [14]	離散	閾値	リターン・コスト・リスク	過去の株価	バックテスト
	安達 [11]	離散	閾値	リターン・コスト・リスク	過去の株価	バックテスト
	本論文	離散	閾値	リターン・コスト・リスク	確率過程	DFO 手法

表 1 より、本論文は理論的研究と比較した場合、同様の確率過程を利用した問題の記述を行った上で、実証的研究で行われている取引ルールや評価を取り入れることで、実際の運営が可能な状況の下で最適な取引ルールを考察できる点が大きな特徴である。また実証的研究と比較した場合、確率過程を用いたシミュレーションで問題を記述していることから、様々な状況下での最適な取引ルールについて考察できる点が大きな違いとなっている。本論文では、これらの研究の乖離を埋め、より現実的で効率的なペアトレード戦略について検討することを目的とする。さらに本論文で行うような分析を行う場合、DFO 手法の利用が効率的であると示すことは、従来の理論/実証的研究にない新しい示唆を与えることができる。

本論文の構成は以下の通りである。次章では、ペアトレード戦略の定式化として、Mudchanatongsuk et al.[7] で利用された問題設定を紹介し、より実際の運営に近い条件を考慮した定式化を行う。第 3 章では、定式化した問題を DFO 手法を用いて解いた結果について考察し、最適なペアトレード戦略について議論を行う。第 4 章では、実際のファンド運営においては複数のペアを用いて戦略を構築することを考慮し、複数ペアでのファンド運営方法について言及する。最後に第 5 章では、まとめと今後の課題について述べる。

## 2 定式化

### 2.1 スプレッド過程の定式化

本論文では、**確率的アプローチの研究**である Mudchanatongsuk et al.[7] で利用された設定を用いて問題を定式化する<sup>2</sup>。Mudchanatongsuk et al.[7] では、株式  $A, B$  の対数価格差をスプレッドとして、スプレッド  $X$  と無リスク資産  $M$  への投資を考える。はじめに時点  $t$  における無リスク資産、株式  $B$  の価格  $M(t), B(t)$  を以下のような幾何ブラウン運動に従うものとして定義する。

$$dM(t) = rM(t)dt, \quad (1)$$

$$dB(t) = \mu B(t)dt + \sigma B(t)dZ(t). \quad (2)$$

ここで  $r$  は無リスク収益率、 $\mu$  は株式  $B$  の期待収益率、 $\sigma$  はボラティリティ、 $Z(t)$  はウィナー過程を示している。

<sup>2</sup>多変量の対数資産価格に対する定式化に関しては、他にも Duan and Pliska[2], Nakajima and Ohashi[8] などがある。

このとき、資産  $A, B$  の対数収益率のスプレッドとその確率過程を以下のように定義する。

$$X(t) = \ln(A(t)) - \ln(B(t)), \quad (3)$$

$$dX(t) = \kappa(\theta - X(t))dt + \eta dW(t). \quad (4)$$

ここで  $X(t)$  は平均回帰過程であり、 $\theta$  がその平均、 $\kappa$  が速さ、 $\eta$  はスプレッドのボラティリティ、 $W(t)$  はウィナー過程を表している。また 2 つのウィナー過程には相関  $dZ(t) \cdot dW(t) = \rho \cdot dt$  があるものとする。

次に時点  $t$  におけるポートフォリオの価値を  $V(t)$ 、スプレッド  $X$  の保有ウェイトを  $h(t)$  とし、自己資金調達  
の運用を行うと仮定すると、 $V(t)$  は以下のように記述できる。

$$dV(t) = V(t) \left\{ h(t) \frac{dA(t)}{A(t)} - h(t) \frac{dB(t)}{B(t)} + \frac{dM(t)}{M(t)} \right\}. \quad (5)$$

Mudchanatongsuk et al.[7] では、(5) 式で定義されるポートフォリオ価値の満期  $T$  時点でのべき乗型効用関数を用いた期待効用最大化問題を解析的に解くことで、最適な保有ウェイト  $h(t)$  を導出している。

## 2.2 シミュレーションのアルゴリズム

本論文では、実際の運用を意識したルールの下で最適なペアトレード戦略を DFO 手法を用いて検討する。そこで次に DFO に与えるシミュレーションのアルゴリズムについて説明する。

はじめに各資産過程  $A, B, X$  を離散化して以下のように記述する。

$$X(t_{k+1}) = \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + e^{-\kappa\Delta t}X(t_k) + \sqrt{\frac{\eta^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})}\delta(t_k), \quad (6)$$

$$B(t_{k+1}) = e^{\mu\Delta t + \sigma\epsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}}B(t_k), \quad (7)$$

$$A(t_{k+1}) = B(t_{k+1})e^{X(t_{k+1})}. \quad (8)$$

ここで  $\Delta t$  は  $t_k, t_{k+1}$  の間の期間、 $\delta(t_k), \epsilon(t_k)$  はそれぞれ標準正規分布に従う確率変数とし、2 つの確率変数は  $\rho$  の相関を持つものとする。次に確率変数  $\delta(t_k), \epsilon(t_k)$  にモンテカルロ法でサンプル数  $S$  の正規乱数を与え、(6)~(8) 式を用いて各資産とスプレッドの価格をシミュレートする。

このとき時点  $t_{k+1}$ 、パス  $s$  におけるポートフォリオの価値から得られる収益率  $r_V^{(s)}(t_{k+1})$  は以下のように表現することができる。

$$r_V^{(s)}(t_{k+1}) = \frac{V^{(s)}(t_{k+1}) - V^{(s)}(t_k)}{V^{(s)}(t_k)} \quad (9)$$

$$= h_A^{(s)}(t_k) \frac{A^{(s)}(t_{k+1}) - A^{(s)}(t_k)}{A^{(s)}(t_k)} + h_B^{(s)}(t_k) \frac{B^{(s)}(t_{k+1}) - B^{(s)}(t_k)}{B^{(s)}(t_k)} + h_M^{(s)}(t_k) r \Delta t. \quad (10)$$

ここで  $V^{(s)}(t_k), A^{(s)}(t_k), B^{(s)}(t_k)$  はそれぞれパス  $s$  のポートフォリオ価値、資産  $A, B$  の価格を表す。そして  $h_A^{(s)}(t_k), h_B^{(s)}(t_k), h_M^{(s)}(t_k)$  はパス  $s$  の資産  $A, B, M$  への投資比率を表し、 $h_M^{(s)}(t_k) = 1 - h_A^{(s)}(t_k) - h_B^{(s)}(t_k)$  である。

また、本論文ではコスト関数として線形コストを仮定し、各時点の保有比率からポートフォリオ価値に対する取引コスト比率  $c_V^{(s)}(t_k)$  を以下のように記述する。

$$c_V^{(s)}(t_k) = c \left( |h_A^{(s)}(t_k) - h_{A0}^{(s)}(t_k)| + |h_B^{(s)}(t_k) - h_{B0}^{(s)}(t_k)| \right). \quad (11)$$

ここで  $c$  は線形コスト係数を表し、 $h_{A0}^{(s)}(t_k)$ ,  $h_{B0}^{(s)}(t_k)$  は、時点  $t_k$  初での資産  $A$ ,  $B$  の保有ウェイトであり、以下の式で算出される。

$$h_{A0}^{(s)}(t_k) = \frac{h_A^{(s)}(t_{k-1}) \frac{A^{(s)}(t_k)}{A^{(s)}(t_{k-1})}}{\frac{V^{(s)}(t_k)}{V^{(s)}(t_{k-1})}}, \quad (12)$$

$$h_{B0}^{(s)}(t_k) = \frac{h_B^{(s)}(t_{k-1}) \frac{B^{(s)}(t_k)}{B^{(s)}(t_{k-1})}}{\frac{V^{(s)}(t_k)}{V^{(s)}(t_{k-1})}}. \quad (13)$$

本論文では、ペアトレード戦略の評価として、期待リターン、期待コスト、リスク（分散）を利用する。これらの要素は、運用戦略における代表的な評価項目であり、実証的研究である Gatev et al.[4], 安達 [11], 袴田 [14] でもこれらを投資戦略の評価に用いている。パス  $s$  における投資期間  $t_1$  から  $t_K$  までの期待リターン、期待コスト、リスクを以下のように定義する。

$$r(s) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_V^{(s)}(t_k), \quad (14)$$

$$c(s) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c_V^{(s)}(t_k), \quad (15)$$

$$v(s) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (r_V^{(s)}(t_k) - r(s))^2. \quad (16)$$

これより、本論文で利用する目的関数を以下のように定義する。

$$f = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \{r(s) - \alpha_1 c(s) - \alpha_2 v(s)\}. \quad (17)$$

ここで  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  はそれぞれコストペナルティとリスクペナルティを示し、目的関数が高いと取引戦略の有効性が高いことを示している。

### 2.3 取引ルールの定式化

次に本論文で検討した取引ルールについて説明する。目的関数を高めるためには、問題の変数である投資比率  $h_A^{(s)}(t_k)$ ,  $h_B^{(s)}(t_k)$  を直接決定変数として扱うことが望ましい。しかしながら、自由度の高い取引戦略は解釈が難しく、実証的研究や実際の運用で用いられることは少ない。また問題の決定変数が多い場合には、DFO 手法

による求解が難しく、計算時間が膨大なる可能性も考えられる。実証的研究では、Elliott et al.[3] の考え方を簡易的に利用したものが多く、インサンプル期間で計測したスプレッドの平均と標準偏差から平均  $\pm x$  標準偏差という閾値を設定し、スプレッドと閾値の大小関係でポジションの構築/解消を決定している。実際のファンド運営を考えた場合、複数のポジションをモニタリングする日々の運営負荷が大きいため、取引ルールは単純かつ解釈しやすいほうが望ましい。また問題の変数を少なくすることで DFO 手法での求解が行え、回転率やコスト、ポジションのレバレッジなど実際のファンドで必要な制約条件を考慮して最適な取引戦略を求めることができる。

そこで本論文では、実務的研究で用いられている閾値によるポジション構築/解消ルールを定式化し、閾値の設定方法について検討する。まず時点  $t_k$  におけるポジション構築の閾値を  $\tau^o(t_k)\eta$ 、ポジション解消の閾値を  $\tau^c(t_k)\eta$  とし、時点  $t_k$  の期初にスプレッドの水準を確認して、以下のように保有ウェイトを決定する取引ルールを設定する (図 2)。

表 2: 保有ウェイトを決定する取引ルール

$h_A^{(s)}(t_k)$	$h_B^{(s)}(t_k)$	条件
-1	1	$X^{(s)}(t_k) \geq \theta + \tau^o(t_k)\eta\sqrt{\Delta t}$ and $h_A^{(s)}(t_{k-1}) \geq 0$
0	0	$\theta + \tau^c(t_k)\eta\sqrt{\Delta t} > X^{(s)}(t_k) \geq \theta - \tau^c(t_k)\eta\sqrt{\Delta t}$ and $h_A^{(s)}(t_{k-1}) \neq 0$
1	-1	$\theta - \tau^o(t_k)\eta\sqrt{\Delta t} > X^{(s)}(t_k)$ and $h_A^{(s)}(t_{k-1}) \leq 0$
$h_{A0}^{(s)}(t_k)$	$h_{B0}^{(s)}(t_k)$	otherwise

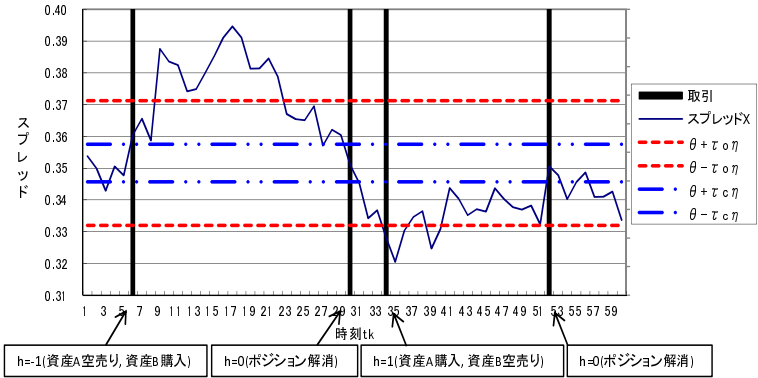


図 2. 取引ルールの例 (ルール 1)

本論文では、ポジション構築/解消の閾値の関数として以下の 2 つを設定する。

[ルール 1] コンスタント投資戦略

実証的研究の多くが利用している手法である。  $\tau^o(t_k)$ ,  $\tau^c(t_k)$  について時間依存せず一定の値を利用するもの

であり、本論文では以下のように定義する。

$$\tau^o(t_k) = \tau^o \quad (18)$$

$$\tau^c(t_k) = \tau^c \quad (19)$$

ここで  $\tau^o, \tau^c$  が閾値の大きさを決めるパラメータであり、スプレッドのボラティリティ  $\eta$  の定数倍が閾値となる。

#### [ルール 2] 時間依存投資戦略

理論的研究の多くは保有ウェイトが時間依存する関数で表現される。そこで本論文ではそれらの研究を参考とし、いくつかの基礎分析から以下のような指数関数を用いて時間依存の閾値を表現する<sup>3</sup>。

$$\tau^o(t_k) = \tau^o(1 + a^o e^{-b^o(T-k+1)\Delta t}) \quad (20)$$

$$\tau^c(t_k) = \tau^c(1 + a^c e^{-b^c(T-k+1)\Delta t}) \quad (21)$$

ここで  $\tau^o, a^o, b^o, \tau^c, a^c, b^c$  が閾値の大きさを決めるパラメータとなり、時間の経過とともに閾値が大きくなり、ポジションを構築しにくくなることを表している。Tourin and Yan[9] では、連続時間での最適な保有ウェイトが時間とともに小さくなっていくことを示しており、ルール 2 と整合的な結果となっている。また  $a^o = 0, a^c = 0$  の場合にはルール 1 と同様のコンスタント投資戦略となり、ルール 1 の自然な拡張と解釈できる。

## 2.4 DFO の定式化

これより、本論文で DFO によって求解する最適化問題を以下のように定義する。

$$[\text{ルール 1}] \left\{ \begin{array}{l} \text{最大化} \quad f = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \{r(s) - \alpha_1 c(s) - \alpha_2 v(s)\} \\ \text{条件} \quad \tau^o \geq \tau^c \geq 0, \end{array} \right. \quad (22)$$

$$[\text{ルール 2}] \left\{ \begin{array}{l} \text{最大化} \quad f = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \{r(s) - \alpha_1 c(s) - \alpha_2 v(s)\} \\ \text{条件} \quad \tau^o \geq \tau^c \geq 0 \\ \quad \quad a^o \geq a^c \geq 0 \\ \quad \quad b^c \geq b^o \geq 0. \end{array} \right. \quad (23)$$

これらの問題は、構造の内部に非連続的な保有ウェイトの決定ルールを含むシミュレーション型の最適化問題となっており、標準的な数理計画法を用いて求解することができない。本論文ではこれらの問題に対し、ルールに基づく意思決定を行う最適化問題をある程度の目的関数の精度で求解することができる DFO 手法を用いた。ソフトウェアには (株)NTT データ数理システム社の数理計画法パッケージ NUOPT のアドオンである NUOPT/DFO を利用した (数理システム [12])。

<sup>3</sup>基礎分析は付録 A を参照されたい。



### 3 計算機実験

#### 3.1 問題設定

本論文では, 図 1 で示したトヨタ自動車と豊田自動織機を例とし, 2012 年度の株価から総務省郵政研究所 [13] と同様の方法で必要なパラメータを推計し, 計算機実験を行った. 推計したパラメータの値を表 3 に示す.

表 3: 推定パラメータ

パラメータ	推計値
トヨタ自動車の期待収益率	$\mu = 4\%$
トヨタ自動車のボラティリティ	$\sigma = 3\%$
スプレッドの平均回帰速度	$\kappa = 19$
スプレッドの平均回帰水準	$\theta = 0.35$
スプレッドのボラティリティ	$\eta = 0.15$
トヨタ自動車とスプレッドの相関	$\rho = 0.09$

また無リスク利率は 2012 年 4 月の有担保コール翌日物レートから  $r = 0.04\%$ , 線形コスト係数は  $c = 0.3\%$  とし, シミュレーションのサンプル数は  $S = 10,000$  として分析を行った.

計算機実験に用いた計算機は, Panasonic Let's note(Windows 7, 2.53GHz, 4GB), ソフトウェアは NUOPT Ver.14.1 (アドオン:NUOPT/DFO) である

#### 3.2 ルール 1

はじめに一般的なベアトレード戦略として利用されている, 時間に対してポジション構築/解消の閾値が一定のルール 1 について分析を行う. 具体的には, まず DFO 手法の求解精度を検証するため, 最適解を全探索で求めた結果と比較する. 次に分析期間やリバランス間隔, スプレッド過程のパラメータを変化させた場合の感度分析を行い, 各パラメータの変化と最適戦略との関係を考察する. 最後に計算面での DFO 手法の特性として計算時間を確認する.

##### 3.2.1 DFO 手法の精度検証

ルール 1 の問題は決定変数が 2 変数であり, 時間をかけることで全探索法での求解も可能である. ここでははじめに DFO 手法の精度検証として, ルール 1 の問題を全探索法と DFO 手法で求解し, その精度を比較する. 期間は 3ヶ月と 12ヶ月, 1 日でのリバランスを想定し,  $T = 60, 250$ ,  $\Delta t = 0.004$  とする. コスト, リスクペナルティは  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  とした.

また全探索法は,  $\tau^o$  の探索幅が 0.01,  $\tau^c$  の探索幅が 0.001 として全組合せを探索している. 表 4 に両手法の最適解を示す.

表 4: 最適解の比較

		$\tau^o$	$\tau^c$	リターン	コスト	リスク	目的関数値
$T = 250$	DFO 手法	1.999	0.000	0.305	0.078	0.020	0.207
	全探索法	1.940	0.000	0.308	0.080	0.021	0.207
$T = 60$	DFO 手法	2.120	0.000	0.274	0.080	0.018	0.176
	全探索法	1.910	0.000	0.285	0.090	0.018	0.176

表 4 より、どちらのケースも目的関数値は DFO 手法、全探索法とも同じ値に収束していることが分かる。一方最適解に関しては、どちらのケースも若干異なる値となっており、特に  $T = 60$  のケースでは違いが大きい。

次にこの違いを考察するために目的関数の形状を考察する。具体的には片方の変数を全探索法の最適解に固定し、もう片方の変数を変化させて目的関数値、リターン、コスト、リスクの形状を観察した。図 3 に  $\tau^o$  の変化と目的関数値の関係を示す。

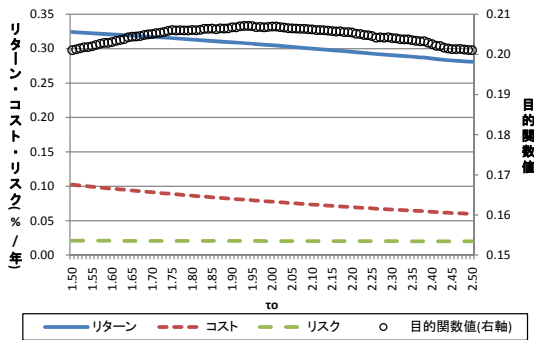


図 3(a).  $\tau^o$  の変化と目的関数値の関係 ( $T = 250$ )

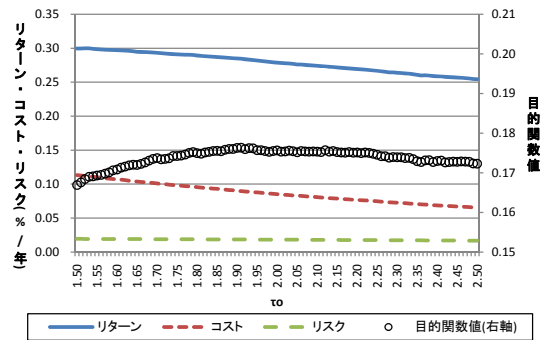


図 3(b).  $\tau^o$  の変化と目的関数値の関係 ( $T = 60$ )

$T = 250$  の場合、 $\tau^o$  の変化に対する目的関数の形状は凸型をしており、DFO 手法を用いて最適解を求めやすいと考えられる。一方、 $T = 60$  の場合には  $\tau^o = 1.9$  程度から目的関数値が横ばいになっており、 $\tau^o$  が大きくなっても目的関数値があまり変わらない。これは分析期間が短いため、ポジション構築の閾値を上げることでポジション構築回数が少なくなり、目的関数に影響を与えにくくなることが原因であると思われる。つまり、分析期間が短い場合には目的関数値が退化しているため、最適解が安定しない可能性があることに注意が必要である。

次に図 4 に  $\tau^c$  と目的関数値の関係を示す。

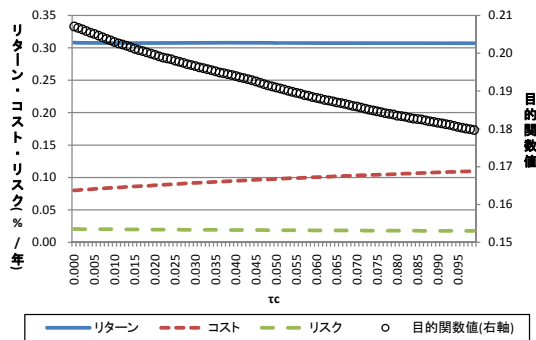


図 4(a).  $\tau^c$  の変化と目的関数値の関係 ( $T = 250$ )

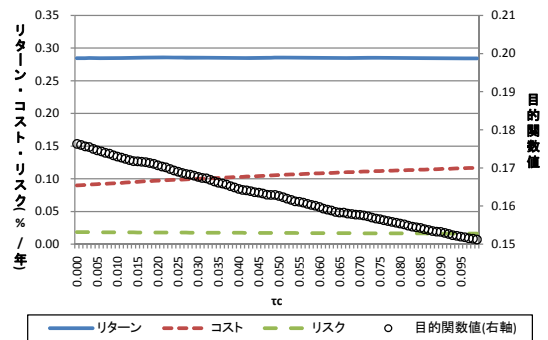


図 4(b).  $\tau^c$  の変化と目的関数値の関係 ( $T = 60$ )

図 4 より、どちらのケースも  $\tau^c$  の変化による目的関数の形状は右下がりの形状となっている。これはポジション解消の閾値を高めることによりリスクは軽減するものの、リターン獲得の機会が少なくなること、さらにリバランスをする回数も増えるためコストも増加することが原因であると考えられ、 $\tau^c = 0$  が最適解になることが分かる。

以上の結果より、本問題は目的関数が概ね凸型の形状をしているため、DFO 手法を用いて最適解が求めやすく、全探索法と同程度の目的関数値を得ることができると考えられる。

### 3.2.2 分析期間、リバランス間隔に関する考察

ペアトレード戦略の分析期間  $T$  とリバランス間隔  $\Delta t$  を変化させた場合の最適取引戦略について考察する。分析期間は 1ヶ月、3ヶ月、6ヶ月、12ヶ月、18ヶ月、24ヶ月、リバランス間隔は 1日 ( $\Delta t = 0.004$ )、3日 ( $\Delta t = 0.012$ )、5日 ( $\Delta t = 0.02$ ) とした。図 5 に最適取引戦略を示す。

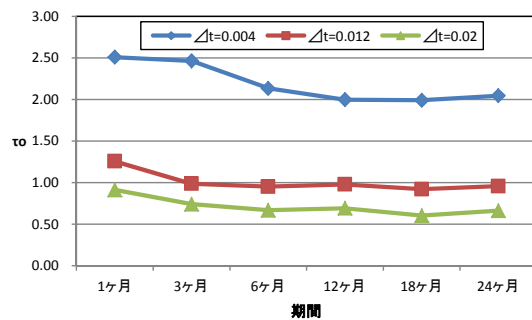


図 5(a).  $\tau^o$  の変化

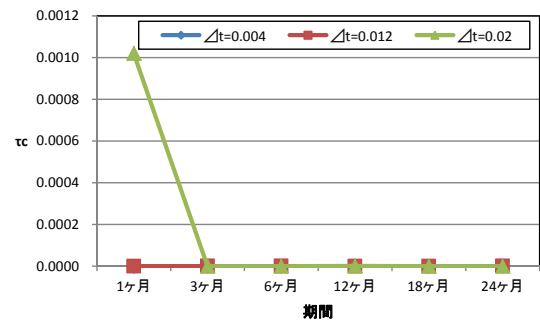


図 5(b).  $\tau^c$  の変化

図 5 より、リバランス間隔が大きいほどポジション構築/解消の閾値が小さくなることが分かる。これはリバランス間隔が大きいと連続的な取引ができなくなるために起こる現象であり、リバランス間隔が大きい場合にはポジション構築/解消を早めに行うべきであることを示している。特にポジション構築の閾値  $\tau^o$  は 1日と 5日で 3 倍程度値が異なっており、リバランスに制約のあるファンドは注意が必要である。

また分析期間は長いほどポジション構築/解消の閾値  $\tau^o$ ,  $\tau^c$  が小さくなっており、戦略を構築する期間が異なれば閾値も異なることが分かる。特にポジション解消の閾値は3ヶ月以上の分析期間ではほぼゼロになっている。代表的な実証的研究である Gatev et al.[4] では、分析期間を6ヶ月とし、ポジション解消の閾値をゼロとして分析を行っている。本研究で得られた結果は、Gatev et al.[4] の結果と整合的であり、その論文の妥当性を示唆するものとなっている。

### 3.2.3 スプレッドパラメータに関する感度分析

ペアトレード戦略を決定するスプレッドのパラメータが変化した場合の最適取引戦略について考察する。ここでは分析期間を12ヶ月 ( $T = 250$ )、リバランス間隔を1日 ( $\Delta t = 0.004$ ) とした。はじめにスプレッドの平均回帰速度  $\kappa$  が変化した場合の結果を図6に示す。

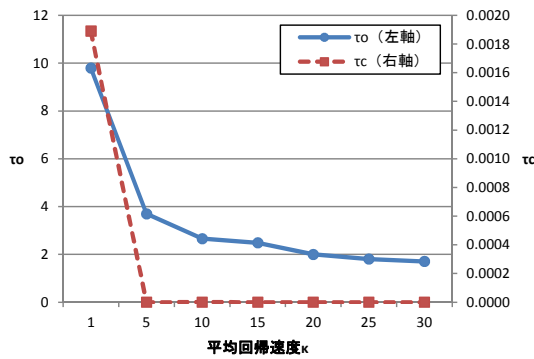


図6(a).  $\kappa$  の変化と最適解  $\tau^o, \tau^c$  の関係

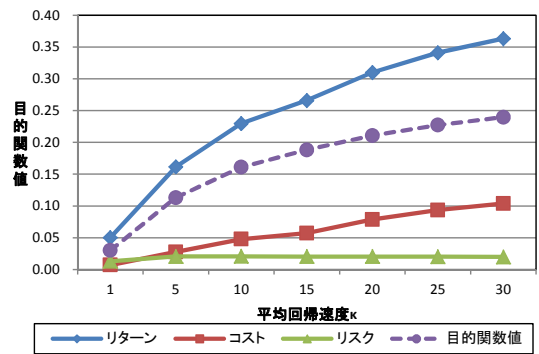


図6(b).  $\kappa$  の変化と目的関数の関係

図6(a)より、平均回帰速度が大きくなるほどポジション構築/解消の閾値が小さくなることが分かる。これは図6(b)を見てもわかるように、平均回帰速度が大きいほど乖離したスプレッドがすぐに収斂し、獲得できるリターンが大きくなるため、ポジションを多く構築することが最適であるからである。その結果、コストも高くなるが合計した目的関数値に関しては、単調増加の傾向になっている。

次にスプレッドのボラティリティ  $\eta$  が変化した場合の結果を図7に示す。

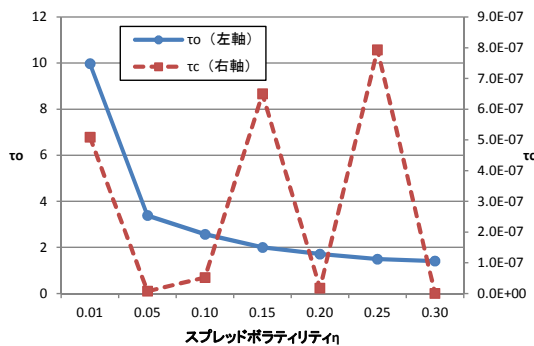


図7(a).  $\eta$  の変化と最適解  $\tau^o, \tau^c$  の関係

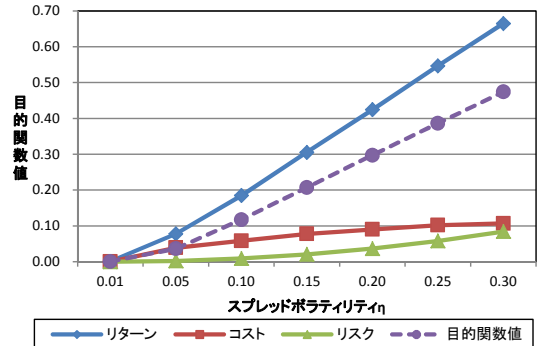


図7(b).  $\eta$  の変化と目的関数の関係

図 7(a) より、スプレッドのボラティリティが大きくなるほどポジション構築の閾値が小さくなることが分かる。図 7(b) を見て分かる通り、これはボラティリティが大きくなるほど獲得できるリターンが大きくなるのが原因であると思われる。この傾向はスプレッドの平均回帰速度の変化と類似しているが、コストとリスクの関係が若干異なっており、図 6(b) に比べボラティリティが大きいほうがコストは大きく変わらないが、戦略のリスクが高まる結果となっている。一方、ポジション解消の閾値はほぼゼロの値となっており変化していない<sup>4</sup>。

次にスプレッドとトヨタ自動車の相関  $\rho$  が変化した場合の結果を図 8 に示す。

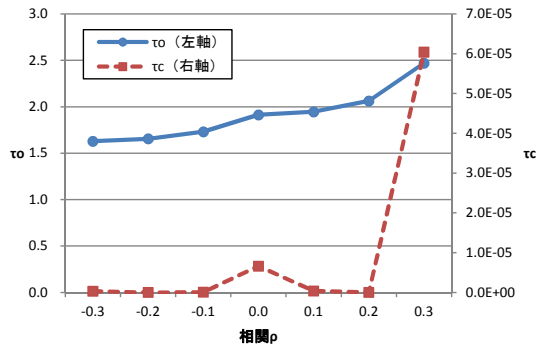


図 8(a).  $\rho$  の変化と最適解  $\tau^o, \tau^c$  の関係

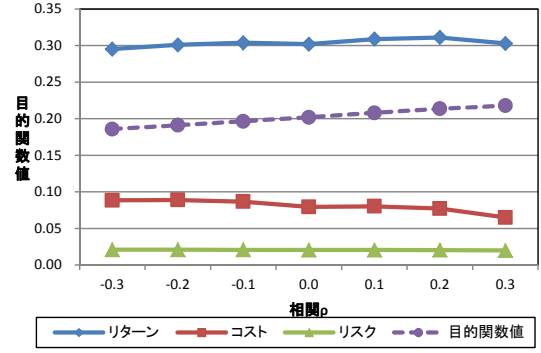


図 8(b).  $\rho$  の変化と目的関数の関係

図 8(a) より、スプレッドとトヨタ自動車の相関が高まるとポジション構築の閾値は緩やかに増加していくことが分かる。図 8(b) を見ても、目的関数はほぼ横ばいであり、他のパラメータに比べて大きな影響は与えていないことが分かる。

以上の結果より、スプレッドの平均回帰速度やボラティリティが異なれば、最適な戦略も異なることが分かる。多くの実証的研究では対象とするペアに対し一律にポジション構築/解消の閾値を与えている。しかしながら本論文の結果より、そのような戦略は最適なものではなく、ペアごとにスプレッドの特性を見て戦略を構築すべきであるということが出来る。

### 3.2.4 目的関数ペナルティに関する感度分析

目的関数のペナルティを変化させた場合の最適取引戦略について考察する。はじめにコストペナルティ  $\alpha_1$  が変化した場合の結果を図 9 に示す。

図 9(a) より、コストペナルティを増やすとポジション構築の閾値が急激に増加していくことが分かる。これはポジション構築の閾値を増やすことでポジションを構築する回数を減らし、コストを削減することが最適であることを示している。またポジション解消の閾値はコストペナルティによらずゼロとなっている。図 9(b) を見てもポジションの構築回数が減ることにより、リターン、コスト、リスクが減少していることが分かる。

次にリスクペナルティ  $\alpha_2$  が変化した場合の結果を図 10 に示す。

<sup>4</sup> $\tau^c$  の値はばらついている (安定していない) ように見えるが、ほぼゼロで  $10^{-7} \sim 10^{-5}$  のオーダーであることに注意されたい。図 8(a), 図 9(a), 図 10(a) についても同様である。DFO 手法では、このオーダーに対して、厳密な精度を要求することはできない。

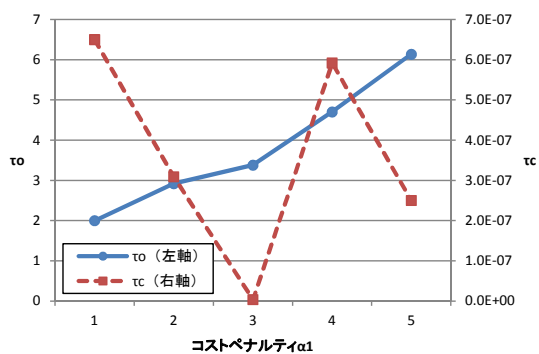


図 9(a).  $\alpha_1$  の変化と最適解  $\tau^o, \tau^c$  の関係

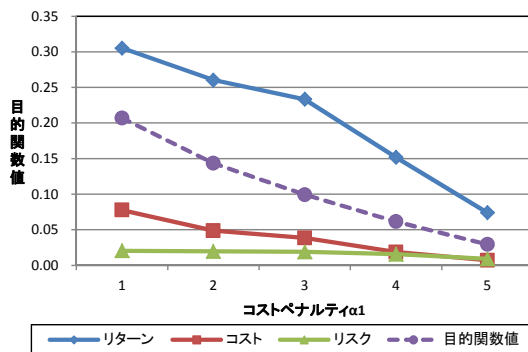


図 9(b).  $\alpha_1$  の変化と目的関数の関係

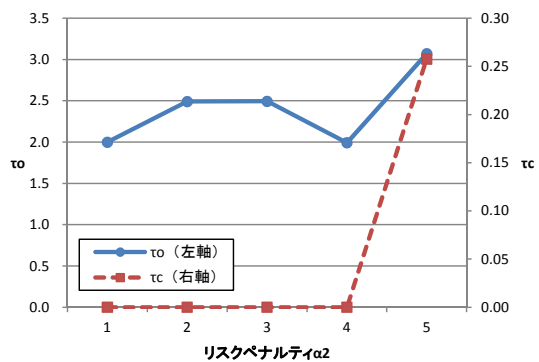


図 10(a).  $\alpha_2$  の変化と最適解  $\tau^o, \tau^c$  の関係

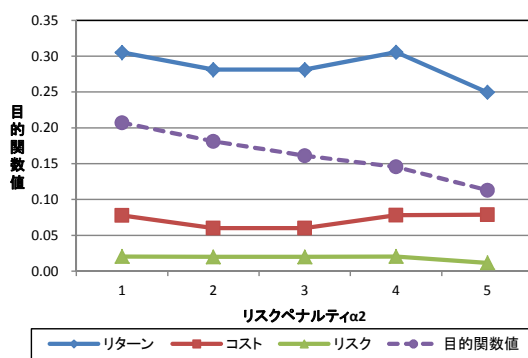


図 10(b).  $\alpha_2$  の変化と目的関数の関係

図 10(a) より、コストペナルティと同様にリスクペナルティを増やしてもポジション構築閾値が増加していくことが分かる。これはポジション構築閾値を増やすことでポジションを構築する回数を減らし、リスクを削減することが最適であることを示している。図 10(b) を見てもポジション構築回数が減ることにより、リターン、コスト、リスクが減少しているが、コストに比べリスクの水準が小さいため、コストペナルティよりも変化が緩やかであることが分かる。

### 3.2.5 計算時間の考察

最後に DFO 手法の計算時間について考察する。DFO 手法の計算時間は目的関数を評価するシミュレーションに依存するため、本問題の場合にはシミュレーションのパス数と期間数に影響を受ける。そこで 3.2.2 項で説明した分析期間とリバランス間隔が異なる 18 ケースにおいて、発生させる乱数のパスのシードを変化させ 10 パターンの計算を行い、その計算時間の統計量を表 5 に示した<sup>5</sup>。

表 5: 計算時間の統計量 (単位: 秒)

		1ヶ月	3ヶ月	6ヶ月	12ヶ月	18ヶ月	24ヶ月
$\Delta t = 0.004$	平均	15.86	35.95	63.74	134.17	158.13	227.95
	標準偏差	4.65	7.42	18.31	41.95	38.27	60.15
$\Delta t = 0.012$	平均	7.98	14.54	22.95	33.87	55.27	69.46
	標準偏差	1.85	1.47	4.24	8.49	17.03	13.25
$\Delta t = 0.02$	平均	6.91	9.69	17.23	27.27	33.33	44.21
	標準偏差	1.01	2.07	5.86	6.82	9.03	9.99

表 5 より、想定どおり分析期間は長いほど、リバランス間隔は短いほど計算時間が多くなっていることが分かる。ただし、最も計算負荷の高い日次リバランス ( $\Delta t = 0.004$ )、分析期間 24ヶ月 ( $T = 500$ ) においても 230 秒程度である。これに対し 3.2.1 項で比較した全探索法は、探索する区間や区間幅で計算時間が大きく変わるため詳細には記載しないが、 $\Delta t = 0.004$ 、 $T = 250$  のケースでも約 2000 秒程度の時間がかかっており、探索区間や区間幅を調整する手間もかかってしまう。これらのチューニングや計算時間を総合して考えると、DFO 手法は本問題を効率的に解くことができる手法であるということが出来る。

### 3.3 ルール 2

時間によってポジション構築/解消の閾値が変化するルール 2 について分析を行う。具体的には、まずルール 2 で求めた最適解をルール 1 で求めた最適解と比較し、ルール 2 の有効性、解の特性を確認する。次に計算面での特性として計算時間について確認する。

<sup>5</sup>シミュレーションパスの数は全ての分析で  $S = 10,000$  とした。

### 3.3.1 最適解の考察

はじめに 3.2.2 項で扱った分析期間とリバランス間隔を変化させた分析において、ルール 2 を利用したことによる目的関数値の改善度を確認する。

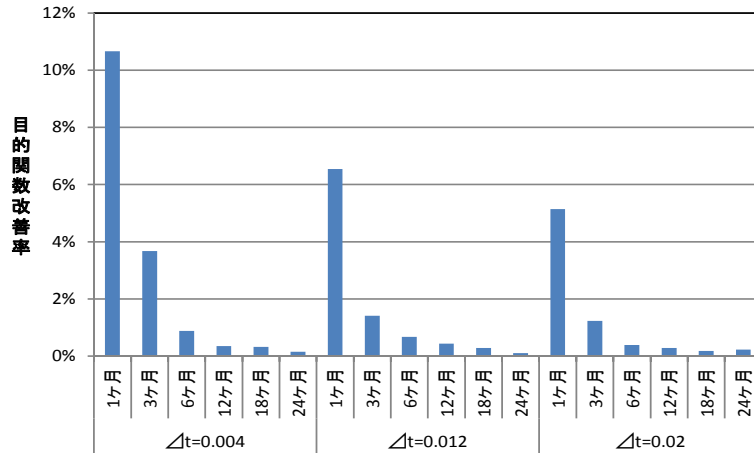


図 11. 目的関数値の改善比率

図 11 より、ポジション構築/解消の閾値を時間依存関数で拡張した場合、どのケースも目的関数は改善していることが分かる。特に分析期間が短い 1ヶ月、3ヶ月では大きく改善し、それ以降は 1%程度の改善率となっている<sup>6</sup>。確率的アプローチを用いた Tourin and Yan[9] では、最適な保有ウェイトが時間の経過とともに小さくなっていくことが示されている。閾値を時間の経過とともに大きくし、ポジション構築を少なくするルール 2 で目的関数値が改善していることは、この論文の結果と整合的である。

詳細に考察するため、リバランス間隔 1日 ( $\Delta t = 0.004$ )、分析期間 1ヶ月、12ヶ月のケースの最適解を図 12、図 13 に示す。

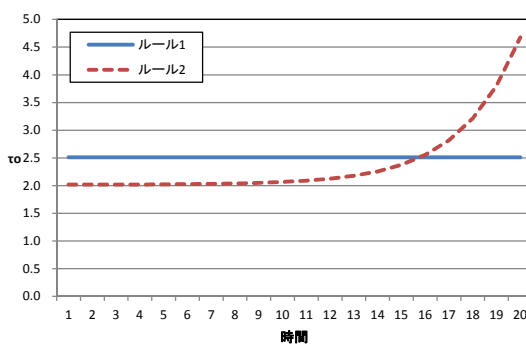


図 12(a). ポジション構築の閾値比較 (1ヶ月  $T = 20$ )

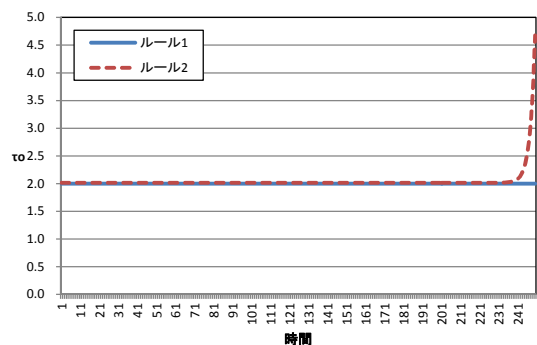


図 12(b). ポジション構築の閾値比較 (12ヶ月  $T = 250$ )

図 12(a) より、分析期間が短い場合のポジション構築の閾値は違いが明確に現れている。ルール 1 に比べると分析開始直後は閾値が小さくポジションを多くとるが、時間の経過とともに閾値が大きくなり、ルール 1 を超

<sup>6</sup>3.2.3 項、3.2.4 項の感度分析のケースも分析を行ったが、どのケースも 0.5%程度の改善率となっている。



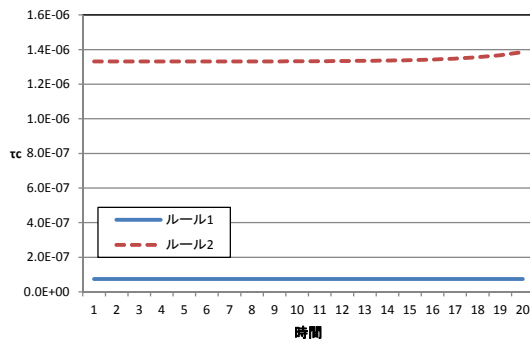


図 13(a). ポジション解消の閾値比較 (1ヶ月  $T = 20$ )

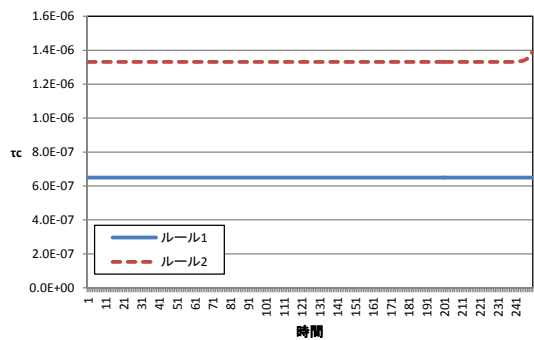


図 13(b). ポジション解消の閾値比較 (12ヶ月  $T = 250$ )

えている。一方、図 12(b) を見ると、分析終了間際には違いが現れるが、それ以外はルール 1 とルール 2 にほとんど差は見られず、目的関数値にも影響を与えにくいことが分かる。

図 13 にはポジション解消の閾値を確認しているが、ルール 2 もほぼ一定の値となっており、ルール 1 との差も大きくないことが分かる。これは図 4 に示したとおり、ポジション解消の閾値は目的関数値に大きな影響を与えないことが原因であると思われる。

これより実証的研究で見られる分析期間でポジション構築の閾値を固定する設定は最適な戦略ではなく、分析期間の後半では閾値を大きくし、新しいポジションを構築しないことが最適であることが分かる。これは分析終了間際には、コストをかけて新しいポジションを構築してもリターン獲得の前に分析が終了してしまうことが原因であると思われる。特に分析期間が 1ヶ月、3ヶ月程度と短い場合にはその影響が大きくなっている。

### 3.3.2 計算時間の考察

最後にルール 2 の計算時間について考察する。分析を行ったのは 3.2.5 項と同じ問題とした。

表 6: 計算時間の統計量 (単位: 秒)

		1ヶ月	3ヶ月	6ヶ月	12ヶ月	18ヶ月	24ヶ月
$\Delta t = 0.004$	平均	122.53	308.77	521.97	1028.27	1518.97	2184.96
	標準偏差	29.75	82.23	99.67	287.09	418.19	496.22
$\Delta t = 0.012$	平均	106.16	184.82	286.68	511.87	749.78	916.38
	標準偏差	27.80	69.28	70.43	150.94	99.25	98.00
$\Delta t = 0.02$	平均	79.58	158.96	240.50	376.56	462.68	624.84
	標準偏差	32.47	39.01	26.52	87.48	78.09	193.81

表 6 より、ルール 1 と比べ決定変数の数が多くなっているため、10 倍程度の計算時間を要することが分かる。分析期間が長い場合にはより計算時間の差が大きくなる一方で、図 11 を見ても分かるように目的関数値は大き

く変わらない。分析期間が短い場合にルール 2 を利用することである程度の計算時間でより有効な戦略の構築が期待できると考えられる。

## 4 ファンド運営への適用

これまでの議論では、2 資産、1 ペアのペアトレード戦略についてモデル化し、最適な取引ルールに関する分析を行ってきた。具体的には、Mudchanatongsuk et al.[7] が提案した理論モデルを前提とし、実際のファンド運営で与えられる制約条件（離散時間、取引コスト、目的関数）の下で問題を定式化した上で最適な取引ルールについて考察を行った。

しかしながら、実際のファンド運営を行う場合、少なくとも数億円から数十億円の運用金額が必要となり、1 ペアで運用を行うと流動性やマーケットインパクトの問題があるため、運用が困難になることが考えられる<sup>7</sup>。本章では、実際のファンド運営に提案した手法を利用する方法やモデル拡張について、言及を行っていく。

### 4.1 2 段階最適化によるポートフォリオ構築手法

この方法では、予め複数のペアを用意しておき、運用金額を各ペアに割り振って提案した手法を用いて 1 ペアごとのペアトレード戦略を構築していく。提案した手法をそのまま利用することができ、運用としても個別のペアトレード戦略とペアへの配分が分離されているため、理解しやすいものである。

具体的には、はじめにある程度流動性のある銘柄において、共和分構造のあるペアを複数抽出する (Gatev et al.[4], 山田・Primbs[16])。次に抽出した各ペアにおいてパラメータを推計し、提案した手法を DFO 手法で求解して最適な取引戦略を導出する。さらに各ペアの最適な取引戦略の上で各ペア間の平均リターン、分散、相関を推計する<sup>8</sup>。最後に推計したパラメータを用いて例えば平均・分散モデルを求解して、各ペアへの投資金額を決定する<sup>9</sup>。

### 4.2 複数ペアを考慮した全体最適ポートフォリオ構築手法

4.1 節で提案した 2 段階最適化によるポートフォリオ構築は利用しやすい方法であるが、各ペアへの配分問題と各ペアの最適取引問題が分離されているため、全体として最適な取引戦略になる保証はない。ポートフォリオ全体として、最適な取引戦略を決定するためには全体を包括した最適化問題を解く必要がある。

具体的には、はじめにある程度流動性のある銘柄において、共和分構造のあるペアを  $N$  個抽出し、シナリオ  $s$ 、時点  $t_k$  のペア  $i$  の価格を  $A_i^{(s)}(t_k)$ ,  $B_i^{(s)}(t_k)$ 、ペア  $i$  の資産  $A$ ,  $B$  への配分ウェイトを  $h_{A_i}^{(s)}(t_k)$ ,  $h_{B_i}^{(s)}(t_k)$  とする。次にポートフォリオの価値から得られる収益率、各時点の売買から発生する取引コスト (10), (11) 式を以下

<sup>7</sup> 1 日の売買金額の 10%程度であれば、マーケットインパクトが小さいと仮定した場合、2013 年 3 月末時点において、1 日の売買金額の過去 1 ヶ月平均の 10%の金額が 1 億円以上である銘柄は 388 銘柄存在する。つまり、1 つの目安ではあるが 10 億円の運用金額であれば、10 ペア程度で運用することで、マーケットインパクトを抑えながら、実際に運用することが可能であると考えられる。

<sup>8</sup> 平均リターンと分散については、DFO 手法を求解したときに得られる。

<sup>9</sup> 各ペアへの配分は、等ウェイトなど簡易的な方法や山田・Primbs[16] のように動的最適化を用いる方法も考えられる。

のように拡張して表現する.

$$r_V^{(s)}(t_{k+1}) = \sum_{i=1}^N \left( h_{A_i}^{(s)}(t_k) \frac{A_i^{(s)}(t_{k+1}) - A_i^{(s)}(t_k)}{A_i^{(s)}(t_k)} + h_{B_i}^{(s)}(t_k) \frac{B_{B_i}^{(s)}(t_{k+1}) - B_{B_i}^{(s)}(t_k)}{B_{B_i}^{(s)}(t_k)} \right) + h_M^{(s)}(t_k) r \Delta t, \quad (24)$$

$$c_V^{(s)}(t_k) = \sum_{i=1}^N c_i \left( |h_{A_i}^{(s)}(t_k) - h_{A_{0i}}^{(s)}(t_k)| + |h_{B_i}^{(s)}(t_k) - h_{B_{0i}}^{(s)}(t_k)| \right). \quad (25)$$

ここで  $c_i$  はペア  $i$  の線形コストを表し,  $h_{A_{0i}}^{(s)}(t_k)$ ,  $h_{B_{0i}}^{(s)}(t_k)$  は, 時点  $t_k$  初でのペア  $i$  の資産  $A_i$ ,  $B_i$  の保有ウェイトとして, (12), (13) 式と同様に表現される.

また取引ルール表 2 も以下のように変更する.

表 7: 保有ウェイトを決定する取引ルール (複数ペア)

$h_{A_i}^{(s)}(t_k)$	$h_{B_i}^{(s)}(t_k)$	条件
$-h_i$	$h_i$	$X_i^{(s)}(t_k) \geq \theta_i + \tau_i^o(t_k) \eta_i \sqrt{\Delta t}$ and $h_{A_i}^{(s)}(t_{k-1}) \geq 0$
0	0	$\theta_i + \tau_i^c(t_k) \eta_i \sqrt{\Delta t} > X_i^{(s)}(t_k) \geq \theta_i - \tau_i^c(t_k) \eta_i \sqrt{\Delta t}$ and $h_{A_i}^{(s)}(t_{k-1}) \neq 0$
$h_i$	$-h_i$	$\theta_i - \tau_i^o(t_k) \eta_i \sqrt{\Delta t} > X_i^{(s)}(t_k)$ and $h_{A_i}^{(s)}(t_{k-1}) \leq 0$
$h_{A_{0i}}^{(s)}(t_k)$	$h_{B_{0i}}^{(s)}(t_k)$	otherwise

ここで  $h_i$  はペア  $i$  の資産  $A_i$ ,  $B_i$  への投資ウェイトであり,  $X_i^{(s)}(t_k)$  はペア  $i$  のシナリオ  $s$ , 時点  $t_k$  のスプレッド,  $\theta_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\tau_i^o$ ,  $\tau_i^c$  はそれぞれ銘柄  $i$  のスプレッドの平均, ボラティリティ, ポジション構築/解消の閾値である. このように問題を拡張し, DFO 手法を用いて目的関数 (17) 式を最大化することで, 複数ペアにおける最適取引戦略を導出することができる.

しかしながら, コンスタント投資戦略を利用した場合でも問題の決定変数の数が  $3N$  個となり, 例えば 10 個のペアを対象とした場合, 30 の決定変数が必要となる. DFO 手法は推定するパラメータの数が多くなると求解が不安定になりやすく, この規模の問題を求解するためには何らかのヒューリスティック解法が必要になると思われる. また, 各ペアとペア間の期待収益率やボラティリティ, 相関係数も推計する必要があるが, 推定するパラメータが多いとその値の信頼性も問題となる可能性もあるため注意が必要である.

これらの問題点を解決するには, 検討する課題が多いため, 今後の課題として引き続き議論していきたい.

## 5 結論と今後の課題

本論文では, 伝統的な投資戦略の 1 つであるペアトレード戦略について理論的・実証的先行研究を整理し, 実際の運用戦略で利用できる設定や目的関数の下でシミュレーションを行うことで最適な投資戦略について考察した. 具体的には, 理論的研究である Mudchanatongsuk et al.[7] の確率過程による表現を利用してモンテカルロ・シミュレーションを行い, 実証的研究である Gatev et al.[4] や実際の運用で用いられるリターン, コスト, リスクの観点での評価や閾値に基づく取引ルールの下で最適な投資戦略を DFO 手法によって求め, 様々な状況での最適戦略について考察を行った.

その結果、以下のような新たな知見が得られた。

- 理論的研究では連続時間のリバランスを前提としているが、離散時間のリバランスを行う場合、リバランス間隔に応じて最適なポジション構築/解消の閾値は異なる。特にリバランス間隔が長いほど閾値は小さくなる。
- 実証的研究では全てのペアに対して同じ閾値を利用しているが、スプレッドの特性、特に平均回帰速度やボラティリティの値によって最適な閾値は異なる。
- 実証的研究ではポジション構築と解消の閾値を設定することが多いが、ポジション解消の閾値は目的関数値に大きな影響を与えない。
- 実証的研究ではポジション構築/解消の閾値を分析期間で固定しているが、分析終了間際には新たにポジションを構築することは最適ではなく、時間とともに最適閾値は大きくなる。またその影響は分析期間が短いと大きい。
- 最適な投資戦略を求めるためには、DFO 手法を利用することが有効であり、少ない計算時間で最適な投資戦略を構築することができる。

今後の課題は、今回得られた結果を利用して実際にペアトレード戦略の実証分析を行いその有効性を確認することである。また4章で議論したように実際のファンド運営で最適な取引戦略を行うためには、複数ペアでの最適化問題を求解する必要がある。そのためには、最適化の方法に何らかのヒューリスティック解法の開発が必要であり、今後検討を進めてく予定である。

## 参考文献

- [1] Conn A. R., K. Scheinberg and L. N. Vicente, *Introduction to Derivative-Free Optimization*, MPS-SIAM Series on Optimization, (2009).
- [2] Duan J. and S. R. Pliska, "Option Valuation with Co-integrated Asset Prices," *J. of Economic Dynamics and Control*, 28(2004) 727-754.
- [3] Elliott, R. J., J. V. D. Hoek and W. P. Malcom, "Pairs Trading," *Quantitative Finance*, 5(2005) 271-276.
- [4] Gatev, E. G., W. N. Goetzmann and K. G. Rouwenhorst, "Pairs Trading: Performance of a Relative-Value Arbitrage Rule," *Review of Financial Studies* 19(2006) 797-827.
- [5] Hibiki N. and R. Yamamoto "Optimal Symmetric No-trade Ranges in Asset Rebalancing Strategy with Transaction Costs," The 17th Annual Conference of The Asia-Pacific Risk and Insurance Association, (2013), New York.
- [6] Lin Y. X., M. McCrae and C. Gulati, "Loss Protection in Pairs Trading Through Minimum Profit Bounds: A Cointegration Approach," *J. of Applied Mathematics and Decision Sciences*(2006) 1-14.

- [7] Mudchanatongsuk S., J. A. Primbs and W. Wong, “Optimal Pairs Trading: A Stochastic Control Approach,” *Proceedings of the American Control Conference*(2008) 1035-1039.
- [8] Nakajima K. and K. Ohashi, “A Cointegrated Commodity Pricing Model,” *J. of Futures Markets*, 32(2012) 995-1033.
- [9] Tourin A. and R. Yan, “Dynamic Pairs Trading Using the Stochastic Control Approach,” *J. of Economic Dynamics and Control*, 37(2013) 1972-1981.
- [10] Vidyamurthy G., *Pairs Trading: Quantitative Methods and Analysis*, John Wiley and Sons (2004).
- [11] 安達哲也, 「ペア・トレーディングの収益性に関する分析」, 応用時系列研究会予稿集 (2006) 25-50.
- [12] 数理システム, 「NUOPT/DFO 利用ガイド」, (2011).
- [13] 総務省郵政研究所, 「日米長期金利の変動要因と推計に関する調査研究報告書」, (2001).
- [14] 袴田守一, 「日本株式市場におけるペアトレーディング戦略の収益性の検討」, 日本ファイナンス学会予稿集予稿集 (2002) 51-57.
- [15] 枇々木規雄, 山本零, 田辺隆人, 今井義弥, 「取引コストを考慮した最適資産配分問題 -DFO 手法を用いた最適乖離許容領域の決定-」, *Transactions of the Operations Research Society of Japan* ,57(2014) 1-26.
- [16] 山田雄二, J. A. Primbs, 「共和分に基づく最適ペアトレード」, *ジャフイージャーナル* (2012) 125-153.

## 付録 A. 時間依存関数決定の基礎分析

本章では 2.3 節で時間依存の閾値関数として定義した指数関数について, その決定に関する基礎分析を示す. 関数の決定に関して以下の 2 つの分析を行った. 分析については  $\Delta t = 0.004$ ,  $T = 250$  のケースで行っており, ルール 1 の問題で全探索法を行うと  $\tau^o = 1.94$ ,  $\tau^c = 0.00$  が最適解となる.

[分析 1] 後半閾値変更戦略 任意の時点まで閾値  $\tau^o = 1.9$ ,  $\tau^c = 0.0$  とし, それ以降の期間閾値を変化させる戦略. 全ての期間 ( $k = 1 \sim 250$ ) において閾値を 0.1 刻みで全探索し, 各時点における最適な閾値を網羅的に探索する.

[分析 2] 前半閾値変更戦略 任意の時点以降を閾値  $\tau^o = 1.9$ ,  $\tau^c = 0.0$  とし, それ以前の期間閾値を変化させる戦略. 全ての期間 ( $k = 1 \sim 250$ ) において閾値を 0.1 刻みで全探索し, 各時点における最適な閾値を網羅的に探索する.

これらの分析結果を図 A1 に示す.

図 A1(a) の分析 1 を見ると, ポジション構築の閾値に関しては, 分析期間の後半 240 日以降で最適な閾値が大きくなっていることが分かる. 一方で分析 2 を見ると分析期間前半でも大きく閾値は変わっていない. これは分析期間後半では, 新たにポジションを構築してもリターン獲得までの期間が小さいためポジションを構築しにくくすることが最適であることを示している. このような期の後半に閾値が大きくなる関数として本論文

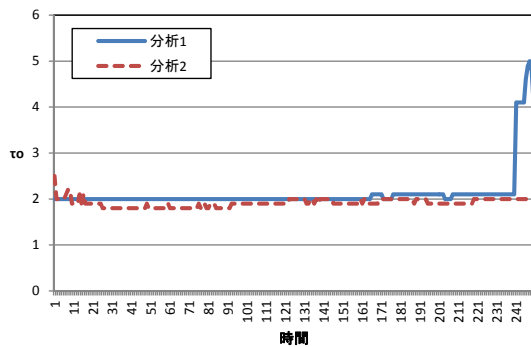


図 A1(a).  $\tau^o$  の変化

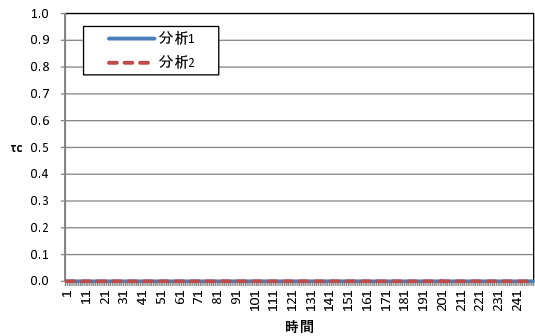


図 A1(b).  $\tau^c$  の変化

では (20), (21) 式の指数関数を利用した<sup>10</sup>. またこの指数関数は Hibiki and Yamamoto[5], 枇々木他 [15] でも利用されており, DFO 手法とも相性の良い関数であることが知られている.

図 A1(b) より, ポジション解消の閾値に関しては, どちらもゼロで一定となっている. これはポジション解消の閾値が目的関数に大きな影響を与えないことが原因であると思われる. 閾値を固定とする表現も (20), (21) 式の指数関数で表現できるため, 本論文ではポジション解消閾値も指数関数とした<sup>11</sup>.

<sup>10</sup>べき乗関数など他の関数も検討したがほぼ結果は変わらなかった.

<sup>11</sup>問題 (23) においてポジション解消の閾値のみを固定値とすることで問題の決定変数を減らし計算時間を短縮することも可能である. ただし, 最適解はほぼ変わらなかった.