

最適資産配分問題に対する シミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル

枇々木 規雄

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

校正稿：平成 13 年 3 月 8 日

最終稿：平成 12 年 12 月 27 日

初稿：平成 12 年 11 月 4 日

〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1

TEL: 045-566-1635

FAX: 045-566-1617

E-mail: hibiki@ae.keio.ac.jp

【 概要 】

年金基金などの長期的な資金運用を行う投資家にとって、多期間にわたる不確実性を考慮した動的投資政策の決定を「明示的に」モデル化するためには、1 期間モデルではなく、多期間モデルを構築する必要がある。実際に多期間確率計画問題を解くためのモデルとして、近似の方法が異なる二種類のタイプのモデル化の方法があり、「投資の意思決定」の適切さを重視したモデル化が「シナリオ・ツリー型モデル」であり、「不確実性の記述」の精細さを重視したモデル化が「シミュレーション型モデル」である。この二つのモデルはそれぞれのモデルにおいても、問題の規模を固定すれば、「投資の意思決定」と「不確実性の記述」はトレードオフ関係にあり、どちらを重視するかによってモデルの選択が行われることになる。

本研究では、二種類のタイプのモデルにおいてトレードオフ関係にあると考えられている長所をうまく組み合わせたモデルを提案する。このモデルをシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデルと呼ぶ。提案するモデルは、将来の資産価格変動はモンテカルロ・シミュレーションによって生成された複数のサンプル・パス(シミュレーション経路)を用いるが、投資の意思決定はシナリオ・ツリーのように時間経過とともに意思決定を行うノードが広がる条件付き意思決定を許すモデルである。また、シミュレーション経路を直接的に利用することができるので、どのような確率分布に従っている場合でも(確率分布を複雑に合成した場合でも)、シミュレーションでパスを生成することができれば、問題を解くことができるという極めて柔軟で強力なモデル化の方法である。

モデルの振る舞いを検証するために、シミュレーション経路数が 1,000 本で、4 資産を対象にした 3 計画期間問題に対する数値実験も行った。要求期待富レベルや分岐数を様々に変えたケースについて実験を行い、リスクとリターンの間のトレードオフの関係や具体的な資産配分政策を示すことによって簡単な例ではあるが、モデルの振る舞いを見ることができた。

1 はじめに

複数の投資対象の中から投資家にとって最も好ましいように、どの投資対象にどれだけ投資をしたらよいかという問題をポートフォリオ最適化問題という。特に投資対象を資産区分(アセット・クラス)に限定した問題、すなわち、複数の資産にどのように投資をしたらよいかという問題を最適資産配分問題という。機関投資家は、様々な不確実性、政策や法的制約、その他の条件のもとで、最大の期待効用、もしくは好ましいリスク・リターンが得られるように、長期的な動的投資政策のための最適資産配分を行う必要がある。ポートフォリオ最適化問題を解くためのモデルとしては、モデル構築や解法上の容易さから、運用期間にかかわらず、平均・分散モデルを代表とする1期間モデルが中心的に用いられている。しかし、年金基金などの長期的な資金運用を行う投資家にとって、多期間にわたる不確実性を考慮した動的投資政策の決定を「明示的に」モデル化するためには、1期間モデルではなく、多期間モデルを構築する必要がある。本論文では、この多期間ポートフォリオ問題について議論する。

1.1 多期間モデルの必要性とその利用

なぜ、多期間モデルで考える必要があるのだろうか。1期間と多期間は、不確実性(確率変数)の記述と意思決定の2つの側面に分けることができる。不確実性の記述という側面から考えると、資産価格変動を柔軟に記述できるというメリットがあるため、その必要性は極めて大きく、リスク評価を行う多くの研究で用いられている。それに加えて、多期間確率計画モデルは意思決定の記述という側面においてもメリットがある。

長期的な投資計画を立てる場合、投資資産を持ち続けなければいけない必要はなく、途中でのリバランスを考えている。多期間確率計画モデルはこのことを「明示的に」モデル化し、意思決定に役立てることができる。モデルは初期時点だけでなく、将来時点での意思決定に対しても最適解を導出する。しかし、このモデルは、時間が経過したときに、モデルから得られた将来時点での最適解に従って投資行動を「しなければならない」ことを意図しているのではなく、「行うことを前提にして」初期時点の意思決定を導出することを目的としている。実際に時間が経過したときには、再度モデルを解き直して、その時点の先の将来も考慮して、その時点での意思決定を行うことになる。

多期間計画モデルは1期間計画モデルに比べて、長期的な投資計画のためのモデル化の方法として適しているが、以下のような欠点もある。

- ① 多期間にわたる不確実性を記述するために、1期間モデルに比べて多くの入力要素が必要である。
- ② 実際に問題を解くのが難しく、近似モデルでないと現実の問題を反映させるのは難しい。また、近似モデルであっても、最適解を導出するための計算時間は1期間モデルに比べて多くの時間が必要である。

多期間計画モデルを用いるか、1期間計画モデルを用いるかは、これらのトレードオフを考慮して決める必要がある。

1.2 多期間確率最適化モデル

次のような二種類のタイプの多期間確率最適化モデルが動的投資問題を解くために用いることができる。

- (1) 確率制御 (動的確率計画) モデル
- (2) シナリオ・ツリーを用いた確率計画モデル

多期間モデルによるポートフォリオ最適化問題として最初に提案されたのは、確率制御 (動的確率計画) モデルのタイプである。Merton(1969) と Samuelson(1969) によって基本的枠組みが提示されたが、確率制御モデルは一般に問題を解くのが難しく¹、実際に多期間ポートフォリオ最適化問題を解くためのモデルとしては、シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルが中心となって発展している。シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルは近年、コンピュータの高速化と解法アルゴリズムの発展に伴い、大規模な問題を解くことが可能になり、様々な研究が行われている²。しかし、シナリオ・ツリー型モデルは不確実性の記述を詳細にしようとすると、問題の規模が指数的に増加するという欠点がある。また、問題を大規模にしないためには数少ないシナリオでうまく不確実性を記述しなければいけない難しさもある。

一方、確率制御モデルのタイプでも、離散時間で離散分布に従う確率変数をモンテカルロ・シミュレーションにより発生させたパスで不確実性を記述することによって、問題を解くためのモデル化が考えられる。このようなタイプのモデルはシナリオ・ツリーに比べて不確実性をより詳細に記述することが可能であるが、非凸非線形計画問題として定式化されるため、一般に大域的最適解の導出を保証することができない。

そこで、枇々木 (1999a, 1999b) は、モンテカルロ・シミュレーションによるパスを用いて不確実性を記述した確率制御 (動的確率計画) モデルの枠組みのもとで、従来想定している投資決定ルールを変更することによって線形計画問題³として記述できるモデル化 (定式化) を提案している。このタイプのモデルは「シミュレーション型多期間確率計画モデル」と呼ばれる。通常、ポートフォリオ最適化問題は投資比率を求める問題として記述されるが、多期間モデルではそのことがモデルの非線形構造の原因となっている。投資比率の代わりに投資額または投資量を求める問題に変更する (投資ルールを変更する) ことによって、線形計画モデルとしての定式化を可能にしている⁴。

以上のように、実際に多期間確率計画問題を解くためのモデルとして、近似の方法が異なる以下の二種類のタイプのモデルを用いることができる。

- シナリオ・ツリー型多期間確率計画モデル
- シミュレーション型多期間確率計画モデル

¹金融経済学の側面から様々な研究がされている。詳しくは本多 (1999) を参照されたい。

²詳細は、Mulvey and Ziemba(1995, 1998) の参考文献を参照されたい。

³目的関数が非線形凸関数の場合には、非線形凸計画問題となるが、大域的最適解の導出は保証される。

⁴シナリオ・ツリー型モデルでも投資比率を用いると非線形計画問題となるので、投資額もしくは投資量を求める問題として定式化される。シナリオ・ツリー型モデルでは、投資比率、投資額、投資量のいずれを用いてもそれらの定式化は等価になるのに対し、シミュレーション型モデルでは 3 種類の定式化は等価にはならない。

次に、表1 を用いて両方のモデルを比較してみよう。

表 1：モデルの比較

要素	シナリオ・ツリー型	シミュレーション型
不確実性の記述	シナリオ・ツリー	シミュレーション経路
投資の意思決定	各時点・各状態ごと	各時点ごと

将来のある時点(t 時点)の投資の意思決定は、 t 時点までにどのような状態が生じたかによって(t 時点の状態を前提にして生じる $t+1$ 時点以降の状態も考慮して)、決められるはずである。シナリオ・ツリー型モデルはこの考え方を忠実にモデル化している。しかし、この考え方をモデル化し、かつ、不確実性の記述を精細にしようとする問題の規模が膨大になり、実際の問題を解くことができなくなる。一方、シミュレーション型モデルは、不確実性の記述を精細にするのと引き換えに、投資の意思決定は簡便にしている。将来のある時点において、状態にかかわらずにある一つの投資量(投資額、投資比率)にリバランスをするという戦略(意思決定戦略)のもとで、その最適な投資量(投資額、投資比率)を求める方法をモデル化していると考えられる。このことは、将来のある時点(t 時点)の投資の意思決定が、 t 時点でどのような状態が生じたかを考慮しないで(時間経過に伴う不確実性の減少を考慮しないで)決められることを前提にしたモデル化であることを意味する。

まとめると、「投資の意思決定」の適切さを重視したモデルがシナリオ・ツリー型モデルであり、「不確実性の記述」の精細さを重視したモデルがシミュレーション型モデルである。この二つのモデルはそれぞれのモデルにおいても、問題の規模を固定すれば、「投資の意思決定」と「不確実性の記述」はトレードオフ関係にあるが、モデル間においてもどちらを重視するかによってモデルの選択が行われることになる。

1.3 新しいモデルの提案と本論文の構成

本研究では、二種類のタイプのモデルにおいてトレードオフ関係にあると考えられている長所をうまく組み合わせたモデル、すなわちシナリオ・ツリー型モデルの「投資の意思決定」の適切さとシミュレーション型モデルの「不確実性の記述」の精細さを組み合わせたモデルを提案する。このモデルをシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル(multi-period stochastic programming model using simulated paths and extended decision tree)と呼ぶ。提案するモデルは、将来の資産価格変動はモンテカルロ・シミュレーションによって生成された複数のサンプル・パス(シミュレーション経路)を用いるが、投資の意思決定はシナリオ・ツリーのように時間経過とともに意思決定を行うノードが広がる条件付き意思決定を許すモデルである。

本論文の構成は以下の通りである。2節では、混合型モデルの考え方と定式化を示す。3節では、4資産を対象にした3計画期間問題に対する数値実験例を示す。最後に、4節で結論と今後の課題を述べる。

2 シミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル

2.1 投資の意思決定とモデル化

シミュレーション型多期間確率計画モデルでは、モンテカルロ・シミュレーションによって生成された複数のサンプル・パス(シミュレーション経路)によって、将来の資産価格の不確実な変動を記述する(図1)。

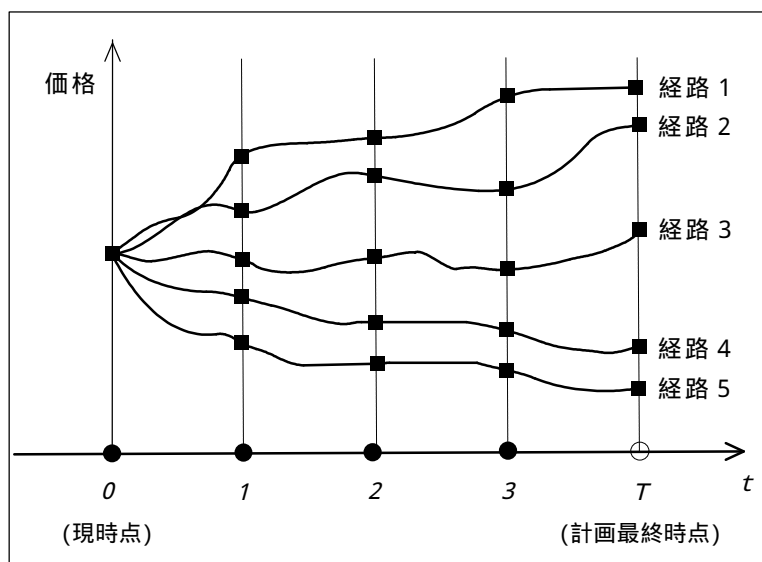


図 1: シミュレーション経路(パス)

シミュレーション経路は1本の経路にだけ注目すると、 t 時点の状態の次に発生する $t+1$ 時点の状態は1つしか想定しない。そこで、シミュレーション型モデルの場合には、すべての時点で状態に依存しない(どの状態に到達するかに関わらない)取引戦略による意思決定が行われる。「状態に依存しない取引戦略」とは、一つの投資決定をすべてのシミュレーション経路に適用する戦略のことである。 t 時点における意思決定が $t+1$ 時点で複数の状態に影響を与えるような意思決定であれば、不確実性下での意思決定であると考えることができる。そこで、シミュレーション型モデルの枠組みのもとでシナリオ・ツリーの考え方を意思決定のみに適用するモデル化の方法を考える。そのために、危険資産に対して同一の意思決定を行うノードでシミュレーション経路を束ねていき、意思決定のためのツリーを生成する。このツリーをシナリオ・ツリーや通常決定ツリーと区別するために、拡張決定ツリー(extended decision tree)と呼ぶことにする。このようなモデル化を行うことによってシミュレーション型モデルの中に意思決定の適切さを加えることができる。

拡張決定ツリーを図2のような3期間問題で、しかも1資産のみの価格変動の例を用いて説明する。シミュレーション経路を20本生成し、1時点で3分岐(3状態)、2時点でさらに2分岐(計6状態)する拡張決定ツリーを生成する。図2の1時点、2時点、3時点ともに不確実な状態の数は20個に保たれているが、価格の変動によって1時点では3通りの条件付き意思決定、2時点ではそれぞれ2通り(合計6通り)の条件付き意思決定を行うことができる。

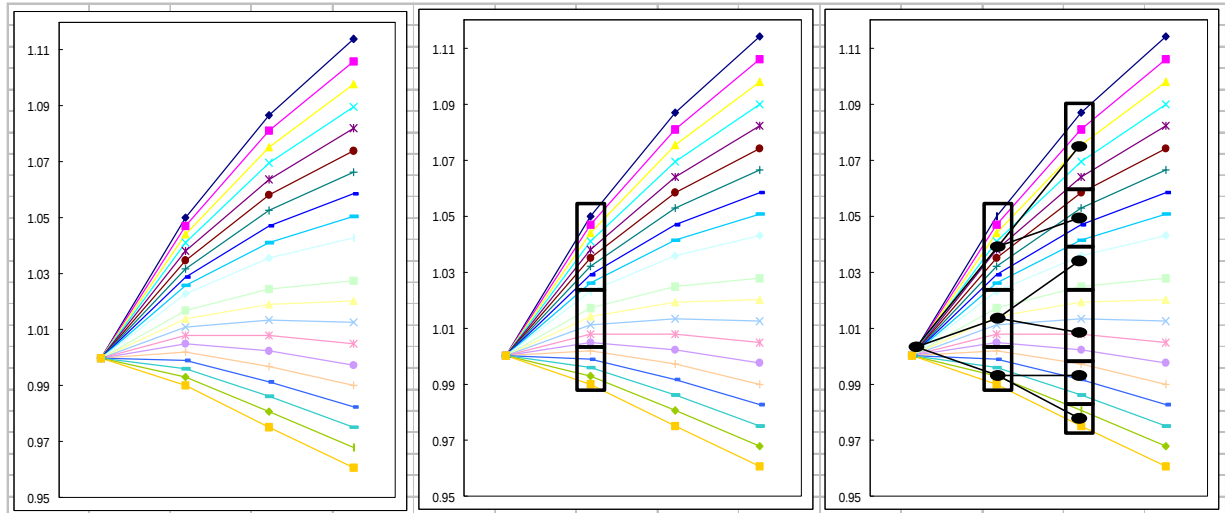


図 2：拡張決定ツリーの図解

図 2の説明

- ① 20 個のシミュレーション経路を生成する。
 - ② 期間 1 の収益率データを用いて、ある基準^a によって経路を 3 つのグループに分ける。この例では、9 個、6 個、5 個に分かれる。それぞれのグループを 1 時点における意思決定ノードと考え、それぞれのノードでは同一の意思決定を行う。
 - ③ 期間 2 の収益率データを用いて、ある基準によって 1 時点の各グループごとに経路を 2 つのグループに分ける。この例では、意思決定ノード 1 では 5 個と 4 個に、意思決定ノード 2 では 2 個と 4 個に、意思決定ノード 3 では 3 個と 2 個に分かれる。それぞれのグループを 2 時点における意思決定ノードと考え、それぞれのノードでは同一の意思決定を行う。黒丸を線で結んだツリーが拡張決定ツリーとなる。
- 3 時点においては意思決定を行わないので、グループ分けをする必要はない。

^a本論文で提案する多期間モデルを構築する上では、グループに分けることのできる方法であれば、どのような方法でもよい。本研究ではその 1 つの方法として逐次的クラスタリング法を示す。詳しくは、2.2 項を参照のこと。

分岐数が 1 のシミュレーション/ツリー混合型モデルはシミュレーション型モデルになる。また、意思決定ノードを通るサンプル・パスの資産価格(変動)を一つに固定している場合には、シナリオ・ツリー型モデルに相当する。したがって、混合型モデルは、より一般的な多期間確率計画モデルであるといえることができる。

2.2 逐次的クラスタリング法

拡張決定ツリーを生成する 1 つの方法として、逐次的にクラスタ分析を行い、グループに分ける方法を示す。この方法を逐次的クラスタリング法(sequential clustering method)と呼ぶことにする。3 節の数値実験では階層的クラスタ分析法の 1 つであるウォード法(Ward method)を用いてグループ分けした。階層的クラスタ分析法は多変量変数で特徴づけられた個体をいくつかの均質なクラスタに分類する方法で、クラスタを生成するときの手続きの違いによって様々

な手法がある⁵．ここでは、1つのサンプル・パスが複数の種類の資産の収益率によって特徴づけられると考え、複数のサンプル・パスをいくつかのクラスターに分ける．そのクラスターを意思決定ノードと考える．

逐次的クラスタリング法の計算手続きを以下に示す．

- Step 1** 期間1の収益率を用いてクラスター分析を行い、グループ分けを行う．
- Step 2** 期間1で分けられた各グループごとに、期間2の収益率を用いて再度クラスター分析を行い、グループに分ける．
- Step 3** この手続きを時間とともに逐次的に実行する．

2.3 モデルの定式化

シミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデルを用いた資産配分問題を記述する． n 個の危険資産 ($j = 1, \dots, n$) と現金 ($j = 0$) に資金を配分する問題を考える．資産0を現金(安全資産)、資産1～資産 n を危険資産とする対象資産数が $n+1$ 個の資産配分問題である．0時点を投資開始時点、 T 時点を計画最終時点とする．「同一意思決定を行うノード」を簡単のために「決定ノード」と呼ぶ．

リターン尺度には計画最終時点における富(最終富)の期待値(期待最終富)、リスク尺度には計画最終時点における富の1次の下方部分積率を設定する．下方部分積率とは富の目標水準(目標富)⁶を下回る大きさ(富の不足分)をリスクと考える下方リスク尺度の1つである(Bawa and Lindenberg(1977), Harlow(1991))． $W_T^{(i)}$ を経路 i における最終富、 W_G を目標富、 I を経路数、次数 k をリスク選好の度合いを表すパラメータとすると、下方部分積率 LPM_k は、(1) 式のように記述できる⁷．

$$LPM_k \equiv \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I |W_T^{(i)} - W_G|_-^k \quad (1)$$

ここで、 $|a|_- = \max(-a, 0)$ である．以下のモデルで1次($k=1$)の下方部分積率を用いる理由は、線形計画問題として記述するためである⁸．

混合型モデルもシミュレーション型モデルやシナリオ・ツリー型モデルと同様に、投資比率、投資額、投資量のどれを決定変数として用いるかによってモデルの記述や取引戦略は異なる．本研究では、投資量を決定変数としたモデル化を行う⁹．

⁵階層的クラスタ分析法には、最短距離法、最長距離法、群平均法、重心法、メジアン法、ウォード法がある．この中でもウォード法は実用的に優れた方法としてよく利用されている方法である．詳しくは田中ら(1983)を参照のこと．

⁶目標富とは、この値を下回る大きさをリスクと考えるときの目標となる富の水準である．

⁷最終富 $\tilde{W}_T$ が連続分布 $f(\tilde{W}_T)$ に従うときの下方部分積率は以下のように記述できる．

$$LPM_k \equiv \int_{-\infty}^{W_G} (W_G - \tilde{W}_T)^k f(\tilde{W}_T) d\tilde{W}_T$$

⁸2次以上にしても凸計画問題として記述できるので、大域的最適解の導出は保証される．

⁹シミュレーション型モデルではリスク(最終富の1次の下方部分積率)とリターン(期待最終富)の2パラメータを基準として最適資産配分を行う場合、投資量を決定変数としたモデルの方が投資額を決定変数としたモデルよりも優位であるという数値実験結果が出ている．本研究でも同様のリスクとリターンの尺度を用いるので、投資量を決定変数としたモデルのみを記述する．投資量決定モデルで考える取引戦略は次の通りである．

2.3.1 記号

(1) 集合および添字

- i : 経路 (パス) を表す添字 .
- s : 決定ノードを表す添字で, 時点 (t) とともに記述する .
- s' : 任意の時点の決定ノード s につながっている 1 時点前の決定ノードを表す添字 .
- V_t^s : t 時点の決定ノード s に含まれる経路の集合 .
- S_t : t 時点の決定ノード s の集合 .

(2) パラメータ

- I : 経路の本数
- ρ_{j0} : 0 時点の危険資産 j の価格 (相対価格)¹⁰ . ($j = 1, \dots, n$)
- $\rho_{jt}^{(i)}$: t 時点の経路 i の危険資産 j の価格 (相対価格) . ($j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$)
- r_0 : 期間 1 の金利 (0 時点のコールレート) .
- $r_{t-1}^{(i)}$: 期間 t の経路 i の金利 ($t-1$ 時点のコールレート) . ($t = 2, \dots, T; i = 1, \dots, I$)
- W_0 : 0 時点での富 (初期富) .
- W_E : 計画最終時点で投資家が要求する期待富 .
- W_G : 計画最終時点での目標富 .

(3) 決定変数

- z_{j0} : 0 時点の危険資産 j への投資量 (投資基準価額)¹¹ . ($j = 1, \dots, n$)
- z_{jt}^s : t 時点の決定ノード s の危険資産 j への投資量 (投資基準価額) .
($j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t$)
- $W_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の富 . ($t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$)
- $q^{(i)}$: 計画最終時点の経路 i の富の目標富に対する不足分 . ($i = 1, \dots, I$)
- v_0 : 0 時点の現金 (コール運用額) .
- $v_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の現金 (コール運用額) . ($t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I$)

2.3.2 定式化

配分決定のための制約条件式, およびそれを用いて計算した各時点の富の計算式を以下に示す .

(1) 0 時点での配分決定 : z_{j0}, v_0

- 各意思決定ノードにおける危険資産 j への投資量を同一にする . 各経路での投資による富は異なるが, その富の違いはすべて現金で保有する . シミュレーション経路の各時点 (状態) における現金の保有額は同一ではない .

¹⁰ 相対価格とは $\frac{\text{単位あたり価格}}{\text{単位あたり基準価額}}$ のことである . ここで, 基準価額とは額面価額や投資開始時点での投資額のことであり, 投資量を金額換算するために導入する . 投資額は, 単位あたり価格と投資量 (単位数) を用いて記述しても, 相対価格と投資基準価額を用いて記述しても全く同じなので, 使いやすさに応じて使い分けられよい . 投資基準価額とは, 基準価額で記述した投資量のことである .

¹¹ 脚注 10 を参照のこと .

初期富 W_0 を用いて、価格が ρ_{j0} である危険資産 j に z_{j0} 単位投資し、残りを現金 v_0 で運用する。

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \quad (2)$$

(2) 0時点の配分決定による1時点の経路 i の富 ($i = 1, \dots, I$)

1時点での危険資産 j の価格が $\rho_{j1}^{(i)}$ であり、それを0時点で z_{j0} 単位投資しているので、危険資産 j の1時点での価値は $\rho_{j1}^{(i)} z_{j0}$ となる。すべての危険資産に対する合計と0時点からの現金 v_0 の運用分 $(1 + r_0)v_0$ を足し合わせたものが1時点での富になる。

$$W_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1 + r_0)v_0 \quad (3)$$

(3) $t - 1$ 時点の配分決定 ($z_{j,t-1}^{s'}, v_{t-1}^{(i)}$) による t 時点の経路 i の富

$$(t = 2, \dots, T; s' \in S_{t-1}; i \in V_{t-1}^{s'})$$

同様に、 t 時点の経路 i での富は $t - 1$ 時点での配分決定をもとにして (4) 式によって表すことができる。

$$W_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1}^{s'} + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} \quad (4)$$

$$(t - 1 \text{ 時点の配分決定}) \quad \sum_{j=1}^n \rho_{j,t-1}^{(i)} z_{j,t-1}^{s'} + v_{t-1}^{(i)} = W_{t-1}^{(i)} \quad (5)$$

特に、 $t = T$ のときは、計画最終時点 (T 時点) における経路 i の富を表し、(6) 式で表すことができる。

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1}^{s'} + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \quad (6)$$

(5) 目的関数

計画最終時点での富 (最終富) の期待値をある一定以上にするという制約 ((10) 式) のもとで、最終富の目標富に対する不足分 (1 次の下方部分積率) を最小化する¹²。

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (7)$$

$$\text{subject to} \quad W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (8)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (9)$$

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \geq W_E \quad (10)$$

¹²(7) ~ (9) 式によって

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left| W_T^{(i)} - W_G \right|_-$$

を表すことができる。

(3) ~ (5) 式は (11), (12) 式のように記述できる .

$$W_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1 + r_0) v_0 = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j1}^s + v_1^{(i)}, \quad (s \in S_1; i \in V_1^s) \quad (11)$$

$$W_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1}^{s'} + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt}^s + v_t^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T-1; s \in S_t; i \in V_t^s) \quad (12)$$

まとめて定式化を記述すると , 以下のようになる .

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (13)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j1}^s + v_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1 + r_0) v_0 \quad (= W_1^{(i)}), \quad (s \in S_1; i \in V_1^s) \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt}^s + v_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1}^{s'} + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} \quad (= W_t^{(i)}), \quad (t = 2, \dots, T-1; s \in S_t; i \in V_t^s) \quad (16)$$

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1}^{s'} + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)}, \quad (s' \in S_{T-1}; i \in V_{T-1}^{s'}) \quad (17)$$

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \geq W_E \quad (18)$$

$$W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (19)$$

$$z_{j0} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (20)$$

$$z_{jt}^s \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (21)$$

$$v_0 \geq 0 \quad (22)$$

$$v_t^{(i)} \geq 0, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (23)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (24)$$

投資量を決定変数にしたモデルを解くことによって , 危険資産 j への投資額や投資比率を以下のように計算することができる¹³ .

投資額

- 0 時点の危険資産 j への投資額 : $\rho_{j0} z_{j0}^*$, ($j = 1, \dots, n$)
- t 時点の経路 i の危険資産 j への投資額 : $\rho_{jt}^{(i)} z_{jt}^{s*}$, ($j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t; i \in V_t^s$)

¹³決定変数に「*」(アステリスク)が付いている場合には最適解を表す .

投資比率

- 0 時点の危険資産 j の投資比率 : $\frac{\rho_{j0} z_{j0}^*}{W_0}, (j = 1, \dots, n)$
- 0 時点の現金 (コール運用) の比率 : $\frac{v_0^*}{W_0}$
- t 時点の経路 i の危険資産 j の投資比率 : $\frac{\rho_{jt}^{(i)} z_{jt}^{s*}}{W_t^{(i)*}}, (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t; i \in V_t^s)$
- t 時点の経路 i の現金 (コール運用) の比率 : $\frac{v_t^{(i)*}}{W_t^{(i)*}}, (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$

ところで、混合型モデルの問題の規模はシミュレーション型モデルと同様に、経路数に大きく依存するので膨大になるが、係数行列は疎大行列となる。経路数を様々に変更したときの経路数と非ゼロ要素数および非ゼロ要素比率 (= 非ゼロ要素数/全要素数) を図3に示す。ここでは、危険資産数を $n = 3$ 、期間数を $T = 4$ 、拡張決定ツリーの分岐数を $3(\bar{S}_1 = 3, \bar{S}_2 = 9, \bar{S}_3 = 27; \bar{S}_t$ は t 時点でのノード数) に固定した場合の図を示す。

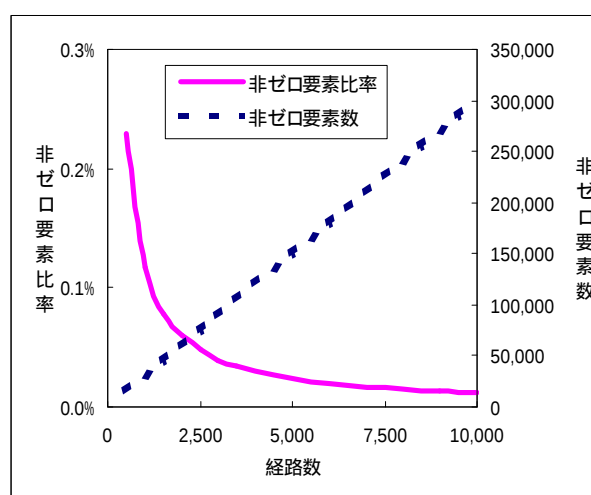


図 3 : 経路数と非ゼロ要素の関係 ($n = 3, T = 4$, 分岐数: 3)

経路数が増加するにつれて、非ゼロ要素数もほぼ比例して増加するが、非ゼロ要素比率はほぼ経路数の逆数に比例して減少する。

3 数値実験

シミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデルに対する数値実験例を示す。数値実験は、数理計画法ソフトウェア NUOPT を用いた¹⁴。

3.1 設定条件

- 3 期間
- シミュレーション経路: 1,000 経路
- 対象資産: 株式, 債券, CB(転換社債), 現金 (コール運用)

¹⁴NUOPT は (株) 数理システムの製品である。

- 表2のような各資産に対するデータの基本統計量(期待値, 標準偏差, 相関係数行列)¹⁵を用いてシミュレーション経路を生成する.

表 2 : 数値実験に用いたデータの基本統計量

		金利			株式			債券			CB		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
期待値		-0.087	-0.081	-0.089	0.848	0.867	0.843	0.625	0.623	0.645	0.786	0.780	0.786
標準偏差		0.780	0.784	0.778	5.571	5.582	5.595	1.372	1.372	1.353	3.543	3.541	3.538
相関係数		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
金利	1	1.000	-0.091	0.073	-0.101	0.000	-0.032	-0.238	0.008	0.090	-0.146	-0.044	-0.052
	2	-0.091	1.000	-0.092	0.045	-0.094	-0.007	-0.183	-0.237	0.011	-0.012	-0.144	-0.047
	3	0.073	-0.092	1.000	0.016	0.042	-0.091	-0.166	-0.188	-0.221	-0.062	-0.017	-0.138
株式	1	-0.101	0.045	0.016	1.000	0.022	-0.031	0.145	-0.173	-0.096	0.761	0.042	-0.045
	2	0.000	-0.094	0.042	0.022	1.000	0.018	0.085	0.144	-0.170	0.019	0.760	0.0414
	3	-0.032	-0.007	-0.091	-0.031	0.018	1.000	0.077	0.085	0.141	0.011	0.019	0.760
債券	1	-0.238	-0.183	-0.166	0.145	0.085	0.077	1.000	0.130	-0.108	0.327	0.202	0.065
	2	0.008	-0.237	-0.188	-0.173	0.144	0.085	0.130	1.000	0.137	-0.114	0.327	0.204
	3	0.090	0.011	-0.221	-0.096	-0.170	0.141	-0.108	0.137	1.000	-0.180	-0.109	0.321
CB	1	-0.146	-0.012	-0.062	0.761	0.019	0.011	0.327	-0.114	-0.180	1.000	0.092	-0.068
	2	-0.044	-0.144	-0.017	0.042	0.760	0.019	0.202	0.327	-0.109	0.092	1.000	0.093
	3	-0.052	-0.047	-0.138	-0.045	0.041	0.760	0.065	0.204	0.321	-0.068	0.093	1.000

- シミュレーション経路の生成方法は, 以下の通りである.

- ① 資産 j の t 時点の収益率は, 期待値 $\bar{\mu}_{jt}$, 標準偏差 σ_{jt} の正規分布に従う. また, ε_{jt} を標準正規分布に従う確率変数とする. 標準正規乱数 $\varepsilon_{jt}^{(i)}$ を用いて, シミュレーション経路 i の資産 j の t 時点の収益率 $\mu_{jt}^{(i)}$ を以下のように生成する.

$$\mu_{jt}^{(i)} = \bar{\mu}_{jt} + \sigma_{jt}\varepsilon_{jt}^{(i)}, \quad (j = 0, \dots, n; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I)$$

また, コールレート $r_t^{(i)}$ は以下の式を用いて, 生成する.

$$r_1^{(i)} = r_0 \times (1 + \mu_{01}^{(i)}), \quad (i = 1, \dots, I)$$

$$r_t^{(i)} = r_{t-1}^{(i)} \times (1 + \mu_{0t}^{(i)}), \quad (t = 2, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$$

- ② 確率変数 ε_{jt} は資産間, 時点間で相関を持つ.

$$\varepsilon_{jt} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$$

ここで, Σ は資産間, 時点間の相関係数行列 $((n+1)T \times (n+1)T$ 行列) である.

- 資産価格は簡単のため相対価格を用いることにし, 株式, 債券, CB(転換社債)の初期時点での価格を 1 とする¹⁶. また, コールレートの初期金利は, 0.44%(1期間換算) とする.
- 初期(時点の)富(W_0)は1億円とする.
- 計画期末(3時点後)の目標富(W_G)は1億円とする.
- 決定ノードの分岐数として, 2~5個の4通りを設定する. 各時点での決定ノード数は以下の通りである.

¹⁵これらの基本統計量は, 日興株式パフォーマンスインデックス(東証一部), 日興債券パフォーマンスインデックス(総合), 日興CBパフォーマンスインデックス(総合), コール・レートをもとに生成した.

¹⁶危険資産の相対価格は以下のように計算できる.

$$\rho_{j1}^{(i)} = 1 + \mu_{j1}^{(i)}, \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, I)$$

$$\rho_{jt}^{(i)} = (1 + \mu_{jt}^{(i)}) \rho_{j,t-1}^{(i)}, \quad (j = 1, \dots, n; t = 2, \dots, T; i = 1, \dots, I)$$

分岐数	1 時点	2 時点
2	2	4
3	3	9
4	4	16
5	5	25

- 計画期末(3時点後)の期待富(W_E)に対する制約を様々に変えることによって,どのような資産配分になるかを調べる. 調べたケースは以下の8ケースである. ただし, 極端なケースを調べるために, ケース1とケース8は定式化を変更し¹⁷, それぞれ(期待富制約なしの)リスク最小化問題, (リスクを考慮しない)期待富最大化問題として問題を解いている¹⁸. 以降, 単位のない場合には, すべて万円単位とする.

ケース 1	リスク最小化
ケース 2	$W_E = 10,180$
ケース 3	$W_E = 10,195$
ケース 4	$W_E = 10,210$
ケース 5	$W_E = 10,225$
ケース 6	$W_E = 10,240$
ケース 7	$W_E = 10,255$
ケース 8	期待富最大化

¹⁷ケース1, ケース8の問題はそれぞれ以下のように定式化される.

【 ケース1 】

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \\ & \text{subject to} \quad (14) \sim (17), (19) \sim (24) \text{ 式} \end{aligned}$$

【 ケース8 】

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \\ & \text{subject to} \quad (14) \sim (17), (19) \sim (24) \text{ 式} \end{aligned}$$

¹⁸最初にケース1とケース8の問題を解いた結果, ケース1およびケース8の期待富は以下のような値が得られたので, ケース2~ケース7の要求期待富を 10,180万円 ~ 10,255万円 に設定している.

分岐数	ケース1	ケース8
2	10,154.1	10,274.7
3	10,161.1	10,280.4
4	10,166.1	10,293.6
5	10,174.3	10,301.5

3.2 結果

3.2.1 結果 1: 期待富の違いによる比較

分岐数が3個の場合の結果を示す。(1), (2) は, 紙面の都合上, ケース 1, ケース 3, ケース 5, ケース 7, の4ケースのみを示す。

(1) 投資量 (投資基準価額)

問題を解くと, 表3に示すような投資量 (投資基準価額) が最適解として求められる。ただし, 1 時点と2時点の現金はシミュレーション経路によって異なるので, 紙面の都合上, その平均値を示した。具体的には以下の決定変数に対する最適解である。

$$\text{現金} : v_0^*, \bar{v}_t^{s*}, (t = 1, 2; s \in S_t)$$

$$\text{危険資産} : z_{jt}^{s*}, (j = 1, 2, 3; t = 0, 1, 2; s \in S_t)$$

表 3 : 投資量 (投資基準価額)

ケース1											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
8075.9	7762.1	6542.5	117.1	0.0	0.0	1109.9	1415.1	3496.0	697.1	856.4	0.2
		6340.8			75.4			3266.7			375.3
		8544.8			0.0			0.0			1516.5
	7995.0	6759.4		0.0	0.2		0.0	0.1		1993.0	3148.0
		9032.0			1033.3			0.2			0.3
		9507.3			555.5			0.0			0.0
	7882.8	9331.7		461.5	67.6		1689.8	633.3		0.0	0.0
		6527.0			99.3			1.1			3406.5
		7818.3			0.0			1892.1			341.6
ケース3											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
5656.9	9188.5	461.8	6.2	0.7	198.1	3167.7	211.0	8915.2	1169.3	648.8	431.2
		5671.7			37.7			4139.5			212.1
		7574.0			0.2			1.0			2430.7
	6277.0	6217.1		35.5	20.1		0.3	1.8		3614.0	3718.9
		8663.3			1406.7			6.5			5.2
		9871.6			185.3			1.4			0.3
	3941.1	4685.6		638.0	0.1		5442.9	5291.1		0.1	0.1
		718.8			2987.8			0.4			6267.0
		9627.7			2.0			439.7			5.7
ケース5											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2261.0	8579.1	302.6	312.4	0.0	0.2	5463.7	14.6	9105.6	1962.9	1460.5	581.5
		3702.6			349.2			6007.5			0.8
		6510.9			0.0			0.1			3484.5
	1916.5	4067.3		0.5	0.7		0.0	0.2		7863.5	5946.9
		7996.3			2149.0			0.7			0.5
		8715.8			1263.9			0.1			0.0
	174.2	204.6		338.2	0.0		9430.5	9707.5		0.0	0.0
		759.8			2878.7			0.0			6319.4
		7838.0			0.1			2182.0			0.5
ケース7											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0.0	4461.2	525.2	473.3	0.0	0.1	5734.9	1692.7	9193.1	3791.7	3878.0	217.4
		223.9			418.0			7420.5			1968.1
		461.4			0.0			0.0			9354.0
	324.2	334.4		1010.2	20.3		0.0	0.2		8437.9	9489.4
		4271.4			5660.3			0.4			0.2
		6849.3			3097.9			0.2			0.1
	284.3	297.2		116.8	0.0		9456.0	9547.6		0.0	0.0
		899.4			9031.3			0.0			0.3
		215.6			0.1			9623.6			6.2

(2) 平均投資比率

最適投資量を用いて投資比率を計算した結果を表4に示す．ただし，経路ごとに投資比率は異なるので，紙面の都合上，その平均値を示した．具体的には以下の計算値である¹⁹．

$$\text{現金} : \frac{v_0^*}{W_0}, \frac{\bar{v}_t^{s*}}{\bar{W}_t^{s*}}, (t = 1, 2)$$

$$\text{危険資産} : \frac{\rho_{j0} z_{j0}^*}{W_0}, (j = 1, 2, 3), \frac{\bar{\rho}_{jt}^s z_{jt}^{s*}}{\bar{W}_t^{s*}}, (j = 1, 2, 3; t = 1, 2; s \in S_t)$$

表 4：平均投資比率

ケース1											
現金				株式				債券			
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
80.76%	77.23%	64.95%	1.17%	0.00%	0.00%	11.10%	14.17%	35.04%	6.97%	8.59%	0.00%
		62.75%			0.77%			32.67%			3.81%
		84.30%			0.00%			0.00%			15.70%
	79.21%	66.03%		0.00%	0.00%		0.00%	0.00%		20.79%	33.97%
		88.83%			11.16%			0.00%			0.00%
		94.27%			5.73%			0.00%			0.00%
	78.74%	93.05%		4.33%	0.60%		16.93%	6.34%		0.00%	0.00%
		64.55%			1.00%			0.01%			34.44%
		77.65%			0.00%			19.04%			3.31%
ケース3											
現金				株式				債券			
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
56.57%	91.39%	4.58%	0.06%	0.01%	1.90%	31.68%	2.11%	89.29%	11.69%	6.51%	4.23%
		56.09%			0.38%			41.37%			2.15%
		74.79%			0.00%			0.01%			25.19%
	62.02%	60.07%		0.38%	0.23%		0.00%	0.02%		37.60%	39.69%
		84.76%			15.12%			0.06%			0.05%
		98.07%			1.92%			0.01%			0.00%
	39.41%	46.85%		6.00%	0.00%		54.59%	53.15%		0.00%	0.00%
		7.08%			29.85%			0.00%			63.07%
		95.51%			0.02%			4.42%			0.06%
ケース5											
現金				株式				債券			
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
22.61%	85.22%	3.00%	3.12%	0.00%	0.00%	54.64%	0.15%	91.28%	19.63%	14.63%	5.71%
		36.53%			3.55%			59.90%			0.01%
		64.03%			0.00%			0.00%			35.97%
	18.79%	38.23%		0.01%	0.01%		0.00%	0.00%		81.20%	61.76%
		77.20%			22.79%			0.01%			0.01%
		86.88%			13.11%			0.00%			0.00%
	1.75%	2.05%		3.20%	0.00%		95.05%	97.94%		0.00%	0.00%
		7.49%			28.81%			0.00%			63.70%
		78.00%			0.00%			22.00%			0.01%
ケース7											
現金				株式				債券			
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0.00%	44.28%	5.24%	4.73%	0.00%	0.00%	57.35%	16.91%	92.61%	37.92%	38.81%	2.15%
		2.20%			4.24%			73.70%			19.87%
		4.49%			0.00%			0.00%			95.51%
	3.15%	3.08%		10.59%	0.22%		0.00%	0.00%		86.26%	96.70%
		40.72%			59.27%			0.00%			0.00%
		67.99%			32.01%			0.00%			0.00%
	2.88%	3.01%		1.11%	0.00%		96.01%	96.99%		0.00%	0.00%
		8.94%			91.06%			0.00%			0.00%
		2.16%			0.00%			97.78%			0.06%

¹⁹ 富，現金の値は経路に依存して決定するが，表の中で用いる平均値は以下のように計算している． $\bar{V}_t^s$ は t 時点の決定ノード s に含まれる経路数を表す．

$$\text{決定ノードごとの平均資産価格} : \bar{\rho}_{jt}^s = \frac{1}{\bar{V}_t^s} \sum_{i \in V_t^s} \rho_{jt}^{(i)}$$

$$\text{決定ノードごとの現金 (平均)} : \bar{v}_t^s = \frac{1}{\bar{V}_t^s} \sum_{i \in V_t^s} v_t^{(i)}$$

$$\text{決定ノードごとの平均富} : \bar{W}_t^s = \frac{1}{\bar{V}_t^s} \sum_{i \in V_t^s} W_t^{(i)}$$

(3) リスクとリターン

リターン尺度である計画最終時点の期待富とリスク尺度である計画最終時点の1次の下方部分積率(LPM_1)の値を表5に、最終富の経験分布の累積分布を図4に示す。

表 5：各時点の期待富の大きさとリスク

	初期富	期中富		最終富	LPM_1
	0	1	2	3	
ケース 1	10000.0	10049.5	10102.3	10161.1	0.00
ケース 2	10000.0	10052.2	10106.4	10180.0	1.99
ケース 3	10000.0	10055.3	10115.5	10195.0	5.44
ケース 4	10000.0	10059.2	10126.5	10210.0	10.89
ケース 5	10000.0	10064.4	10139.4	10225.0	18.23
ケース 6	10000.0	10069.7	10148.8	10240.0	28.26
ケース 7	10000.0	10072.6	10155.6	10255.0	43.38
ケース 8	10000.0	10082.4	10174.8	10280.4	127.25

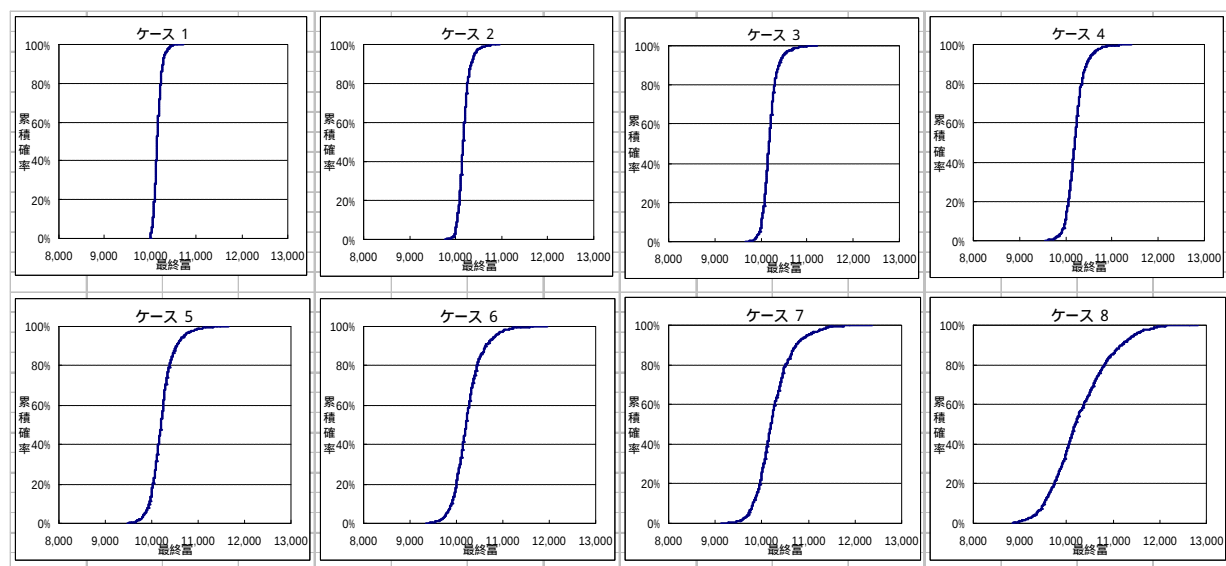


図 4：最終富の累積分布関数の比較

3.2.2 結果 2: 決定ノードの分岐数の違いによる比較

4通りの異なる分岐数(2～5個)に対するケース5(要求期待富が10,225万円)の場合の結果を示す。分岐数が1個の場合(シミュレーション型モデル)の結果も合わせて示す。

(1) 投資量 (投資基準価額)

問題を解くと、表6に示すような投資量 (投資基準価額) が最適解として求められる。

表 6 : 投資量 (投資基準価額)

分岐数 = 1											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0.0	85.8	124.6	1864.9	2273.7	1544.9	2909.3	3760.3	3773.5	5225.8	3882.0	4560.9
分岐数 = 2											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0.5	5763.7	539.1	353.8	0.2	811.1	7501.6	0.1	8658.2	2144.2	4261.4	0.2
		5638.7			0.1			0.2			4410.1
	195.5	182.2		3.1	0.1		9711.3	9727.8		0.1	0.1
		748.8			0.8			1392.5			7926.6
分岐数 = 3											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2261.0	8579.1	302.6	312.4	0.0	0.2	5463.7	14.6	9105.6	1962.9	1460.5	581.5
		3702.6			349.2			6007.5			0.8
		6510.9			0.0			0.1			3484.5
	1916.5	4067.3		0.5	0.7		0.0	0.2		7863.5	5946.9
		7996.3			2149.0			0.7			0.5
		8715.8			1263.9			0.1			0.0
	174.2	204.6		338.2	0.0		9430.5	9707.5		0.0	0.0
		759.8			2878.7			0.0			6319.4
		7838.0			0.1			2182.0			0.5
分岐数 = 4											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
3468.9	7473.8	402.3	3.5	5.2	4611.3	4730.4	20.4	5088.0	1797.3	2543.5	1.0
		190.0			0.4			8262.9			1488.5
		2761.9			0.1			7281.4			1.0
		430.7			1.0			0.9			9308.5
	9162.2	5974.5		0.2	0.7		105.6	3542.5		800.1	562.0
		7347.7			0.4			0.9			2639.2
		239.8			603.0			9228.8			1.1
		347.2			0.5			9653.3			2.5
	4043.6	5305.7		0.5	11.5		0.2	1.1		5809.2	4687.5
		8246.2			1857.8			3.5			2.6
		2534.3			2326.8			5095.5			0.8
		10080.7			0.6			0.5			0.3
	254.1	159.0		325.7	0.1		9389.0	9788.4		0.1	0.1
		187.6			593.2			9234.5			0.6
		779.8			3210.9			0.2			5989.8
		9360.8			0.5			705.7			0.5
分岐数 = 5											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
4149.0	7756.6	233.5	1.3	430.9	1777.5	4465.0	11.9	8020.4	1384.7	1848.7	1.0
		391.8			8158.2			0.6			1492.6
		205.3			0.8			8727.2			977.0
		3508.4			0.2			6546.0			2.0
		471.7			1.6			1.5			9269.4
	9603.5	10130.7		0.2	0.7		44.7	4.0		420.4	3.0
		3106.5			5.6			6250.9			671.9
		7708.9			0.6			1.2			2277.5
		250.2			380.2			9438.7			1.5
		349.0			0.8			9653.5			3.1
	5504.1	10376.5		1.5	1.9		0.3	2.1		4400.3	2.7
		1218.3			5185.7			1.7			2725.6
		8463.4			1618.3			5.1			3.7
		1760.1			2195.4			6021.0			1.0
		10086.2			2.2			0.9			0.5
	699.4	2093.2		274.1	0.1		9006.7	7883.1		0.2	0.2
		166.3			1045.7			8886.3			0.7
		507.3			2269.3			0.2			7218.0
		7041.7			2925.0			7.9			1.8
		6149.3			2.3			3895.8			0.3
	3048.6	9969.1		0.7	0.4		6894.3	2.5		0.6	0.9
		217.6			4.7			2.8			10060.7
		453.3			17.1			6.3			10420.4
		9638.8			1.5			340.2			2.2
		6280.4			4145.9			4.2			2.3

(2) 平均投資比率

最適投資量を用いて投資比率を計算した結果を表 7 に示す。

表 7：平均投資比率

分岐数 = 1											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0.00%	0.85%	1.23%	18.65%	22.76%	15.48%	29.09%	37.56%	37.64%	52.26%	38.83%	45.65%
分岐数 = 2											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0.00%	56.99%	5.34%	3.54%	0.00%	8.07%	75.02%	0.00%	86.59%	21.44%	43.01%	0.00%
		54.66%			0.00%			0.00%			45.33%
	1.97%	1.83%		0.03%	0.00%		98.00%	98.17%		0.00%	0.00%
		7.43%			0.01%			14.05%			78.50%
分岐数 = 3											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
22.61%	85.22%	3.00%	3.12%	0.00%	0.00%	54.64%	0.15%	91.28%	19.63%	14.63%	5.71%
		36.53%			3.55%			59.90%			0.01%
		64.03%			0.00%			0.00%			35.97%
	18.79%	38.23%		0.01%	0.01%		0.00%	0.00%		81.20%	61.76%
		77.20%			22.79%			0.01%			0.01%
		86.88%			13.11%			0.00%			0.00%
	1.75%	2.05%		3.20%	0.00%		95.05%	97.94%		0.00%	0.00%
		7.49%			28.81%			0.00%			63.70%
		78.00%			0.00%			22.00%			0.01%
分岐数 = 4											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
34.69%	74.55%	4.01%	0.04%	0.05%	44.97%	47.30%	0.20%	51.01%	17.97%	25.20%	0.01%
		1.91%			0.00%			83.79%			14.30%
		27.23%			0.00%			72.76%			0.01%
		4.21%			0.01%			0.01%			95.77%
	90.87%	58.86%		0.00%	0.01%		1.06%	35.38%		8.07%	5.75%
		72.27%			0.00%			0.01%			27.72%
		2.38%			5.55%			92.06%			0.01%
		3.44%			0.00%			96.53%			0.02%
	39.79%	50.54%		0.01%	0.13%		0.00%	0.01%		60.20%	49.32%
		80.11%			19.82%			0.03%			0.03%
		25.38%			23.13%			51.48%			0.01%
		99.99%			0.01%			0.01%			0.00%
	2.55%	1.59%		3.07%	0.00%		94.38%	98.41%		0.00%	0.00%
		1.88%			5.12%			93.00%			0.01%
		7.67%			32.07%			0.00%			60.25%
		92.90%			0.00%			7.09%			0.01%
分岐数 = 5											
現金			株式			債券			CB		
0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
41.49%	77.33%	2.33%	0.01%	4.24%	17.05%	44.65%	0.12%	80.61%	13.85%	18.31%	0.01%
		3.89%			81.41%			0.01%			14.70%
		2.06%			0.01%			88.54%			9.39%
		34.59%			0.00%			65.39%			0.02%
		4.61%			0.02%			0.02%			95.36%
	95.31%	99.92%		0.00%	0.01%		0.45%	0.04%		4.24%	0.03%
		30.65%			0.06%			62.44%			6.86%
		76.00%			0.01%			0.01%			23.98%
		2.48%			3.50%			94.01%			0.01%
		3.46%			0.01%			96.51%			0.03%
	54.28%	99.93%		0.02%	0.02%		0.00%	0.02%		45.70%	0.03%
		11.65%			59.31%			0.02%			29.02%
		82.57%			17.34%			0.05%			0.04%
		17.58%			21.76%			60.65%			0.01%
		99.96%			0.02%			0.01%			0.01%
	6.99%	20.91%		2.60%	0.00%		90.41%	79.09%		0.00%	0.00%
		1.66%			9.08%			89.25%			0.01%
		4.99%			22.49%			0.00%			72.52%
		69.04%			30.86%			0.08%			0.02%
		60.84%			0.02%			39.13%			0.00%
	30.78%	99.96%		0.01%	0.00%		69.21%	0.03%		0.01%	0.01%
		2.18%			0.04%			0.03%			97.75%
		4.53%			0.14%			0.06%			95.26%
		96.55%			0.01%			3.42%			0.02%
		63.56%			36.38%			0.04%			0.02%

(3) リスクとリターン

リターン尺度である計画最終時点の期待富とリスク尺度である計画最終時点の1次の下方部分積率(LPM_1)の値を表8に、最終富の経験分布の累積分布を図5に示す。

表 8：各時点の期待富の大きさとリスク

分岐数	初期富	期中富		最終富	LPM_1
	0	1	2	3	
1	10000.0	10075.1	10150.1	10225.0	97.0
2	10000.0	10069.6	10141.5	10225.0	31.7
3	10000.0	10064.4	10139.4	10225.0	18.2
4	10000.0	10061.0	10132.0	10225.0	14.7
5	10000.0	10058.9	10125.6	10225.0	10.5

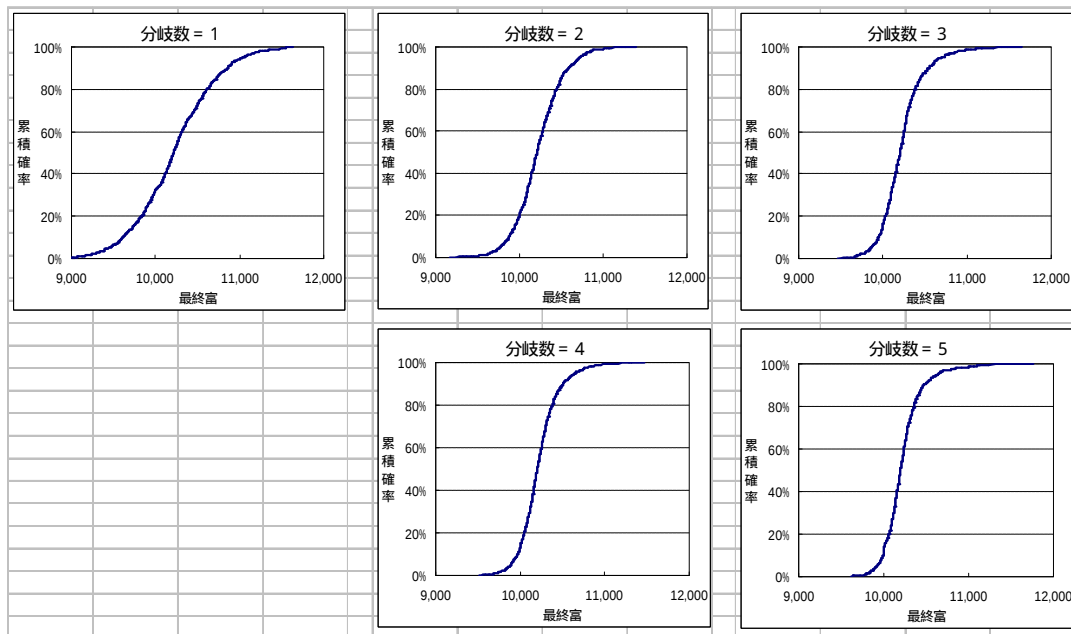


図 5：最終富の累積分布関数の比較

3.3 考察

まずはじめに、結果1に対する考察を行う。ケース1はリスク最小化を目指しているので、目標富の水準を初期富と同じにしていることもあり、全体的には現金の保有割合が多くなっている。期待富の要求水準が高くなるにつれて、現金の保有割合が下がり、危険資産へ投資をシフトさせている。しかし、すべての決定ノードにおいて、3つの危険資産の中で最もリスクの高い株式にシフトしているとは限らない。この理由は以下の2つが考えられる。

- (1) 条件付き意思決定であるために、各資産が各決定ノードにおいて、どのような価格変動をするのかによって、投資の意思決定を変更することができる。
- (2) 計画期末に近づくにつれて、モデル上は不確実性の減少が生じる。

今回の数値実験ではモデルの特徴を明らかにするために、各資産の組み入れ比率や売買回転率の制約を入れなかった。したがって、投資量の極端な変動を許しているが、これらの制約を入れることによって、より現実的にも許容できる取引政策になることが期待できる。期待富の要求水準を上げる(ケース1からケース8へ移行する)につれて、リスク値や計画最終時点の富の分布の様子からも富のばらつきが大きくなり、リスクとリターンのトレードオフ関係をうまく記述できることが分かる。

次に、結果2に対する考察を行う。分岐数が増えるにつれて、初期時点ではリスクの小さい資産(現金、債券)への投資割合が増えている。この理由は、分岐数が増えると、条件付き意思決定の自由度が大きくなり、計画期末に近づくにつれて、リスク尺度およびリターン尺度に対してより有利になるように意思決定を行えばよいからである。同じリターン水準(10,225万円)のもとで、リスク値が下がっている。図6の効率的フロンティア²⁰を見ても、これらのことをより明確に示すことができる。

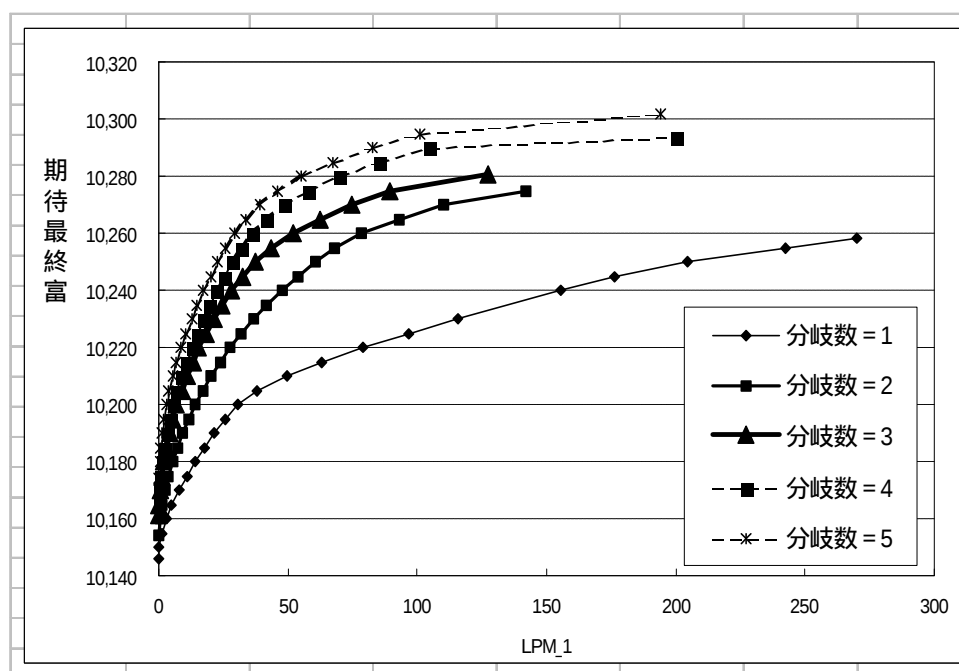


図 6 : 効率的フロンティア

²⁰計画最終時点で投資家が要求する期待富の水準を5万円刻みに設定して問題を解いたときの効率的フロンティアである。

4 結論と今後の課題

本研究では、多期間にわたる最適資産配分決定のための多期間線形確率計画モデルを提案した。本研究で提案したシミュレーション/ツリー混合型確率計画モデルは、シミュレーション型モデルの持つ「不確実性の記述」の詳細さとシナリオ・ツリー型モデルの持つ「投資の意思決定」の適切さという従来提案されている2つのモデル間でトレードオフの関係にあると考えられている特徴(長所)を両方ともに生かすことのできるモデルである。モデルは線形計画問題として定式化が可能であるため、大規模な問題も解くことができる。問題のサイズは、意思決定ノードを増加させれば、シナリオ・ツリー型モデルのように指数的に増加する。しかし、従来のシナリオ・ツリー型モデルのようにノードによって不確実性を記述する役割はないので、ノードを少なくしてもよいと思われる。また、決定変数の数はノード数に比例して増加するが、問題の構造上、非ゼロ要素数はシミュレーション型モデルとほぼ同じであり、ほぼ同様の計算負荷と考えてよいだろう。

本モデルもシミュレーション型モデルと同様に、シミュレーションで生成された複数のサンプル・パス(シミュレーション経路)を直接的に利用することができるので、どのような確率分布に従っている場合でも(確率分布を複雑に合成した場合でも)、シミュレーションでパスを生成することができれば、問題を解くことができるという極めて柔軟で強力なモデル化の方法である。

実際に問題を解くためのモデルとして、投資量決定モデルを示した。モデル化の方法として、投資比率や投資額を決定変数とするモデルも考えられるが、解法の難しさ、シミュレーション型モデルにおける数値計算結果、売買コストを考慮したモデルへの拡張性などを考慮し、投資量決定モデルによるモデル構築を行っている。資産価格や投資量といった実際の市場での取引を直接的に用いることができるので、モデルとしても取り扱いやすい。

モデルの振る舞いを検証するために、1,000サンプルの簡単な数値実験も行った。リスクとリターンの間のトレードオフの関係や具体的な資産配分政策を示すことによって簡単な例ではあるが、モデルの振る舞いを見ることができた。サンプル数や資産数、資産価格(収益率)の従う確率分布を様々に変えたときにモデルがどのような振る舞いをして、最適解を導き出すのかなど、検証する必要がある課題は様々あるが、それらは今後の課題としたい。また、意思決定ノードの生成方法(各経路をグループ分けする方法)として、逐次的にクラスター分析をする方法(逐次的クラスタリング法)を用いたが、この方法についてもさらなる検討が必要である。

シミュレーション/ツリー混合型モデルは、分岐数が1のときにはシミュレーション型モデル、意思決定ノードを通るサンプル・パスの資産価格(変動)を一つに固定している場合がシナリオ・ツリー型モデルに相当するタイプとなる、より一般的な多期間確率計画モデルである。分岐数とシミュレーション経路の本数の関係、意思決定、不確実性の記述(問題の規模)と計算時間のトレードオフなど、検証すべき問題点も多いが、これらも今後の課題としたい。

参考文献

- V.S. Bawa and E.B. Lindenberg(1977), “Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework”, *Journal of Financial Economics*, **5**, 189–200.
- W.V. Harlow(1991), “Asset Allocation in a Downside-Risk Framework”, *Financial Analysis Journal*, (September-October), 28–40.
(翻訳：片岡淳(1994), 「ダウンスайд・リスクのフレームワークにおけるアセット・アロケーション」証券アナリストジャーナル, **32** (2), 34–47.)
- 枇々木規雄(1999a), 「戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル」慶應義塾大学理工学部管理工学科テクニカルレポート, No.99002.
- 枇々木規雄(1999b), 「戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル」日本金融・証券計量・工学学会 1999年冬季大会予稿集, 36–55.
- 枇々木規雄(2000), 「資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル」日本金融・証券計量・工学学会 2000年夏季大会予稿集, 175–193.
- 枇々木規雄(2001), 『金融工学と最適化』, 朝倉書店.
- 本多俊毅(1999), 「投資機会が変動する場合の最適ポートフォリオについて, 現代ファイナンス」**6**, 19–45.
- 今野浩(1998), 『理財工学 II — 数理計画法による資産運用最適化 —』, 日科技連.
- R.C. Merton(1969), “Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case”, *The Review of Economics and Statistics*, **51**, 247–257.
- J.M. Mulvey and W.T. Ziemba(1995), “Asset and Liability Allocation in a Global Environment”, Chapter 15 in “*Handbooks in OR & MS, Vol.9*”, edited by R.Jarrow et al..
(翻訳：枇々木規雄(1997), 「グローバル環境における資産負債配分」, 今野浩, 古川浩一編著, 『ファイナンスハンドブック』第15章, 朝倉書店.)
- J.M. Mulvey and W.T. Ziemba(1998), “Asset and Liability Management Systems for Long-Term Investors: Discussion of the Issues”, Chapter 1 in “*Worldwide Asset and Liability Modeling*”, edited by W.T. Ziemba and J.M. Mulvey.
- P.A. Samuelson(1969), “Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming”, *The Review of Economics and Statistics*, **51**, 239–246.
- 竹原均(1997), 『ポートフォリオの最適化』朝倉書店.
- 田中豊, 脇本和昌(1983), 『多変量統計解析法』現代数学社.